高等学校教材

概率论与数理统计

主　编　魏广华　徐鹤卿
副主编　伍　鸣　秦仁杰　顾培培

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高 等 学 校 教 材

概率论与数理统计

Gailülun yu Shuli Tongji

主　编　魏广华　徐鹤卿
副主编　伍　鸣　秦仁杰　顾培培

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书针对应用型人才的培养目标和学习特点，对概率论与数理统计的传统内容进行了整合，既考虑与中学数学课程内容的衔接，又保持其自身的系统性和完整性，同时注重阐述用数学知识解决实际问题的基本思想和方法，强调数学建模思想的渗透，选例鲜活有趣，问题分析透彻。

本书主要内容包括随机事件及其概率、一维随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析，书后附有习题答案。

本书可作为工学、经济学、管理学、农学等门类专业的概率论与数理统计课程教材或参考书，也可供工程技术人员、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/魏广华，徐鹤卿主编. —北京：高等教育出版社，2011.7

ISBN 978-7-04-032717-5

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①魏…②徐… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 120603 号

策划编辑 张彦云　责任编辑 张彦云　封面设计 于 涛　版式设计 范晓红

插图绘制 郝 林　责任校对 刘春萍　责任印制 刘思涵

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	唐山市润丰印务有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×960mm 1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	17.5	版　　次	2011年7月第1版
字　　数	310千字	印　　次	2011年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	24.10元

物 料 号　32717-00

前　言

当前我国高等教育理念已经发生了深刻的变化，为适应社会需求，培养全方位、多层次、有较宽广的理论基础和较强应用能力的人才已成为许多高等学校的共识，这种理念的重大转变自然带来了教学内容和教学模式的变化，相应的教材改革不可避免。为适应这一变化，编者分析了原有教材存在的不足，结合国内外同类优秀教材将科学性、实用性融于一体的成功经验，根据“工科类、经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，在多年从事工科类和经济管理类等专业概率论与数理统计课程的教学基础上编写了本教材。

概率论与数理统计是一门重要的数学基础课，它的基本概念、基本理论、解决问题的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到了广泛应用。本书针对应用型人才的培养目标对概率论与数理统计的传统内容进行了整合，既注意到中学内容和大学内容的衔接，又充分考虑高等教育大众化背景下的学生特点和教学要求，同时注重阐述用数学知识解决实际问题的基本思想和方法，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力。本书在结构上既删减了较艰深的理论推导，加强应用性，又保持概率论与数理统计自身具有的系统性和完整性，为学生继续深造和考研提供了保障。

本书共九章，其中第一章由徐鹤卿编写，第二、第三章和附录由魏广华编写，第四、第五章由伍鸣编写，第六、第七章由顾培培编写，第八、第九章由秦仁杰编写，全书由徐鹤卿和魏广华负责统稿。宋丁全和张国印教授对本教材的建设提供了热情的支持和帮助，并提出了不少有益建议，高等教育出版社对本书的出版给予了大力支持，编者在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2011 年 2 月于南京

目　　录

第一章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是一门研究随机现象的学科，它是人们在人类社会发展进程中不断与相伴而生的偶然性和不确定性奋斗的产物. 经过长期的积累和升华，这门学科的内容越来越丰富，也产生了许多行之有效的结论，并成为人类对抗不确定性带来的影响的有力工具，它在国民经济、工程技术以及人们生活等各方面都有着广泛的应用.

本章将介绍随机现象、随机事件及概率的一些基本概念，讨论随机事件的集合特性和概率的性质与运算，并探讨随机事件间常见的重要关系——独立性的概念、性质及其在概率计算中的作用.

§1.1　随机现象和随机试验

人们在日常生活和各种实践活动中经常会遇到两类现象：**确定性现象与随机现象.**

在标准大气压下将水加热到 100 ℃，水会沸腾；放开充满氢气的气球，气球会飞入空中；太阳从东方升起，向西方落下，这些都是确定性现象.

随意抛掷一枚硬币，会出现两种可能：国徽朝上或国徽朝下；从一批电视机中随意地抽取一台，其使用寿命有许多种可能；在证券市场中，每天股票交易的综合指数收盘的点数同样会有许多种可能，而且这些现象在一定条件下的各种结果都有可能出现，但未必一定会出现，事先无法准确预言. 这类现象称为随机现象，它们表达了条件和结果之间的非确定性联系.

然而我们对于上述这些随机现象往往能作出较为符合实际的预判. 比如，尽管每天股市交易的综合指数收盘点数有许多种可能，但人们根据各种信息(外围市场、上市公司、政策变化等)还是有一定的把握可以估计出其收盘点数上涨还是下跌，这是由随机现象的内在特性所决定的. 一般来说，随机现象是这样有多种结果的不确定现象，即虽不能准确预言其某种结果一定出现，但其各种结果在一定的条件下能够呈现出规律性.

为了研究和掌握随机现象的规律性，需要做一系列试验，我们把对随机现象

的一次观测或进行一次科学试验，统称为一个**试验**. 对随机现象的试验称为**随机试验**，用 E 表示，它们具有如下共同特征：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 试验的可能结果不止一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

(3) 试验前不能确定哪个结果会出现.

以下是几个熟悉的随机试验：

E_1：抛掷一枚硬币，观测国徽朝上或国徽朝下的情况；

E_2：抛掷一颗均匀对称的骰子，观测它朝上一面出现的点数；

E_3：10 个产品中，有 3 个次品，现从中任取出 4 个产品，观测其中的次品数；

E_4：一场篮球赛中，观测主队的胜或负；

E_5：在一批电视机中任取一台，测试其寿命.

无数实践告诉人们，随机现象的规律性在一次或几次试验中难以看出，需要在大量的试验中才能体现出来. 比如，抛掷一枚硬币，观察其正面朝上的规律性，历史上一些科学家就曾做过多项抛掷试验，从中得出了正面朝上的可能性占一半的规律(如表 1.1).

表 1.1

实验者	投掷次数 n	正面出现次数 m	正面出现频率 $\frac{m}{n}$
德摩根(De Morgan)	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰(Buffon)	4 040	2 048	0.506 9
费希尔(Fisher)	10 000	4 979	0.497 9
皮尔逊(K. Pearson)	12 000	6 019	0.501 6
皮尔逊(K. Pearson)	24 000	12 012	0.500 5

这表明，随机现象的内在规律性是其本身固有，客观存在的，它不体现在对某一结果的准确预测上，而是反映了其各种结果的出现与否和一定的条件有着必然的联系，这使人们有可能对其出现的结果作出尽可能正确的判断. 显然掌握随机现象的内在规律性对人们的生活与工作有着十分重要的意义，概率论与数理统计就是研究和揭示其规律性的数学学科.

§1.2 随机事件及其集合特性

1.2.1 随机事件

随机现象是由多种结果组成的，通过随机试验，每种结果都有可能出现，我

们称试验的每一可能结果为一个**随机事件**,简称**事件**,通常用英文大写字母 A, B, C, …表示. 比如在上述试验 E_3 的结果中,{没有次品},{次品数为 1},{次品数为 2},{次品数为 3}都是随机事件. 注意到这几个事件都是试验的直接结果,并非由几个结果组成,这种事件称为**基本事件**. 显然,一次随机试验有且仅有一个基本事件出现. 而事件{次品数大于 1}则是由两个基本事件{次品数为 2}与{次品数为 3}组成,这种由若干个基本事件组成的事件称为**复合事件**. 复合事件是随机现象中最常遇到的事件,是我们研究的主要对象,弄清它与基本事件的关系至关重要,在今后的学习中应充分重视.

需要指出的是,在随机试验中还有两种特殊情况,其一是在试验中不可能出现的事件,如试验 E_3 中的事件{次品数为 4};其二是在试验中一定会出现的事件,如试验 E_3 中的事件{次品数不超过 3},这两种情况都是确定性现象,但是为了便于讨论,我们将它们作为随机事件的极端情况处理. 前者称为**不可能事件**,记作 $\varnothing$;后者称为**必然事件**,记作 Ω.

1.2.2 样本空间与事件的集合表示

为对事件展开深入讨论,针对事件的结构特点,将其与集合结合起来会带来极大方便. 为此我们引入样本点和样本空间的概念.

随机试验的每一个直接结果(即每一个基本事件)称为**样本点**,记作 ω_1, ω_2, …;所有样本点构成的集合称为**样本空间**,记作 Ω,即 $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$.

例如在试验 E_3 中,约定 ω_i 表示观测到的次品数是 i ($i=0,1,2,3$),则 ω_i 就是样本点,而样本空间为 $\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$.

有了样本点及样本空间的概念,我们就可以将事件集合化. 基本事件即是由样本点构成的单点集;而复合事件则是由若干样本点构成的集合,它们都是样本空间的子集. 特别地,随机试验的必然事件就是其样本空间本身,两者统一记作 Ω,其对应的是全集;不可能事件 $\varnothing$ 则对应着空集.

例 1 在随机试验 E_2 中,写出样本点、样本空间以及以下三个事件:{点数不小于 4}、{点数不超过 6}和{点数小于 1}的集合表示.

解 设 ω_i 表示观测到的点数为 i ($i=1,2,3,4,5,6$),则试验 E_2 中的样本点为:$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$;样本空间为:$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;事件{点数不小于 4}的集合表示为:$\{\omega_4, \omega_5, \omega_6\}$;{点数不超过 6}的集合表示为:$\Omega$;{点数小于 1}的集合表示为:$\varnothing$.

例 2 随机试验 E:在单位正方形内任取一点,观测它的坐标. 试写出 E 的样本点和样本空间.

解 设 ω_{xy} 表示观测到的点的坐标,即 $\omega_{xy}=(x, y)$, $x, y\in(-\infty, +\infty)$,

则试验 E 的样本点为：$\omega_{xy}=(x,y)\quad(0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1)$；样本空间为：$\Omega=\{\omega_{xy}\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

应该指出，事件可以看成集合，但这种集合与中学学过的集合有着一定的不同之处. 中学学过的集合的元素是广义的、可以赋予任何意义的对象，而事件集合的元素则是具有随机性的对象. 也就是说，事件是一类带有随机性意义的特殊集合，当然这并不影响它与一般集合在关系及运算上的一致性.

1.2.3 事件的关系及运算

在一个样本空间中，结构复杂的事件与结构较为简单的事件往往存在着一定的联系，如果能将这些联系数学化，从而用简单事件表示复杂事件，这对讨论复杂事件将会十分有益. 下面就从集合的角度介绍事件之间常用的关系和运算.

1. 包含与相等关系

如果事件 A 发生必导致事件 B 发生，则称事件 A 包含于事件 B 中，或称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 从集合上看，事件 A 中所有样本点必在事件 B 中(如图 1.1). 如在例 1 中，令 $A=\{$点数超过 5$\}$，$B=\{$点数不小于 4$\}$，则 $A\subset B$.

显然，对任一事件 A，有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

若事件 A 与事件 B 互相包含，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$. 从集合上看，事件 A 与事件 B 具有完全相同的样本点.

显然，$A=B$ 当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

2. 和事件(事件并)

“事件 A 与事件 B 至少发生一个”构成一个事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$. 从集合上看，和事件 $A\cup B$ 是由事件 A 与事件 B 的所有样本点组成，即事件 A 与事件 B 的并集(如图 1.2).

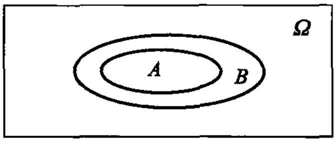

图 1.1

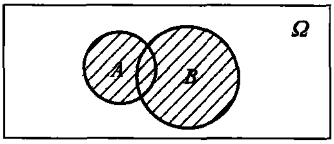

图 1.2

一般地，和事件的概念可以推广到任意多个事件的和事件中，如 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 为无穷可列个事件，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示“n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少发生一个”构

成的和事件；$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$表示“无穷可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 至少发生一个”构成的和事件.

3. 积事件(事件交)

“事件 A 与事件 B 同时发生”构成一个事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A \cap B$ 或 AB. 从集合上看，积事件 $A \cap B$ 是由事件 A 与事件 B 中公共的样本点组成，即事件 A 与 B 的交集(如图 1.3).

一般地，积事件的概念也可以推广到任意多个事件的积事件中，如 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为无穷可列个事件，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$表示“n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$同时发生”构成的积事件，也可记为 $A_1A_2\cdots A_n$；$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$表示“无穷可列个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生”构成的积事件，也可记为 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$.

4. 差事件(事件差)

“事件 A 发生而事件 B 不发生”构成一个事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$. 从集合上看，差事件 $A-B$ 是由属于事件 A 而不属于事件 B 的样本点组成，即事件 A 与 B 的差集(如图 1.4).

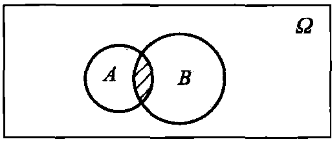

图 1.3

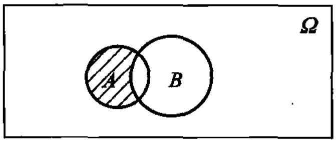

图 1.4

5. 互不相容事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，则称事件 A 与事件 B 为互不相容事件或互斥事件. 从集合上看，互不相容的两事件 A 与 B 没有共同的样本点，是不相交的两个集合(如图 1.5).

显然，事件 A 与事件 B 互不相容，当且仅当 $AB=\varnothing$.

若多个事件中任两个事件都互不相容，则称这多个事件两两互不相容.

6. 对立事件

事件 A 与事件 B 互不相容且必有一个发生，则称事件 A 与事件 B 为对立事件，并称 A 是 B 的对立事件或 B 是 A 的对立事件，同时亦称事件 A 与事件 B 是互逆事件. 通常 A 的逆事件(对立事件)记为 $\overline{A}$，即 $B=\overline{A}$. 从集合上看，相互对立的两事件 A 与 B 将样本空间划分成没有共同样本点的两个互补集合(如图 1.6).

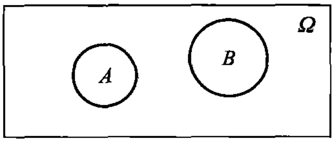

图 1.5

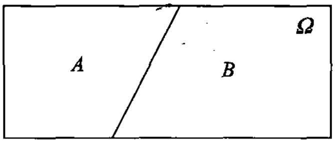

图 1.6

显然，事件 A 与事件 B 相互对立，当且仅当 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$.

需要指出的是，事件 A 与 B 相互对立则必互不相容，反之未必. 如例 1 中，令 $A=\{$点数超过 5$\}$，$B=\{$点数小于等于 3$\}$，则 A 与 B 互不相容但不相互对立. 此外对立事件是矛盾的双方，非此即彼，利用简单的事件的对立事件讨论复杂事件是研究概率统计问题的常用手段.

从以上对事件关系和运算的定义中可以清楚看出，事件作为特殊集合，它与普通集合在运算上保持一致，因而事件之间的运算仍满足普通集合具有的运算律：

(1) 交换律 $A\cup B=B\cup A, AB=BA$；

(2) 结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, A(BC)=(AB)C$；

(3) 分配律 $A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4) 对偶律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对偶律是十分常用的性质，它可以推广到多个事件中

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i,$$
$$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A}_i.$$

此外还有以下一些常用公式：

$\overline{A}=\Omega-A$， $\overline{\overline{A}}=A$， $A\cup A=A$， $A\cup\Omega=\Omega$， $A\cup\varnothing=A$， $AA=A$， $A\Omega=A$，

$A\varnothing=\varnothing$，$A-B=A-AB=A\overline{B}$，若 $A\supset B$，则 $AB=B$，$A\cup B=A$，等等，不在此一一列举.

例 3 设 A,B,C 是三个事件，试用 A,B,C 表示下列事件：

(1) A 与 B 发生，C 不发生； (2) A,B,C 中至少有两个发生；

(3) A,B,C 中恰好发生两个； (4) A,B,C 中至多有一个发生.

解 (1) $AB\overline{C}$（或 $AB-C$）；

(2) $AB\cup AC\cup BC$；

(3) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$(或 $\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$).

例 4 某系学生会在全系学生中选出一名学生担任主席,令事件 A 表示被选学生是男生,事件 B 表示被选学生是二年级学生,事件 C 表示被选学生获得少于 80%的选票.

(1) 叙述事件 $AB\overline{C}$ 的意义;

(2) 在什么条件下 $AB\overline{C}=B$;

(3) 什么时候关系式 $\overline{C}\subset B$ 成立?

解 (1) $AB\overline{C}$ 表示事件{该主席是二年级男生且以不少于 80%的选票当选};

(2) 当 $B\subset A\overline{C}$ 成立时,即该系被选出的二年级学生一定是男生且获得不少于 80%的选票时,$AB\overline{C}=B$ 成立;

(3) 当该系获得不少于 80%选票的学生都在二年级学生中时,$\overline{C}\subset B$ 成立.

例 5 设 A,B,C 是三个事件,化简下列各式:

(1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}$; (2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}$.

解 (1) $\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}=\overline{\overline{A}}\cup\overline{\overline{B}}=A\cup B$;

(2) $AB\cup\overline{A}B\cup A\overline{B}\cup\overline{A}\overline{B}-\overline{AB}=((A\cup\overline{A})B\cup(A\cup\overline{A})\overline{B})-\overline{AB}$

$$=(B\cup\overline{B})-\overline{AB}=\Omega-\overline{AB}=AB.$$

§1.3 事件的概率

1.3.1 概率的描述性定义

事件的建立使我们能够深入研究随机现象.当我们把组成随机现象的每一个事件的规律都研究清楚,也就掌握了随机现象的规律性.事件的概率就是用来描述事件的规律,刻画事件发生可能性大小的数量指标.直观地说,在一次试验中事件 A 发生的可能性大小的度量,称为事件 A 的**概率**,记作 $P(A)$,用百分比度量"可能性大小"既形象又方便.概率具有以下几个基本性质:

(1) $P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0$;

(2) 对任意事件 A,$0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(3) 若 $A\subset B$,则有 $P(A)\leqslant P(B)$.

当然,上述事件概率的定义只是一种定性描述,在面对实际问题时,不能由这个定义直接求得事件的概率.但历史上人们在对这个概念的理解下,针对不同

的问题给出了一些具体且可实际求出概率大小的概率定义和计算方法，下面介绍三种简单而常用的概率定义及计算方法.

1.3.2 概率的统计定义

在抛掷一枚硬币的试验中，令事件 $A=\{$国徽朝上$\}$，则 §1.1 的表 1.1 中的大量试验数据告诉我们，A 发生的可能性大小围绕着 0.5 窄幅波动，而且随着试验次数越多波动越窄. 人们常常就将 0.5 作为事件 A 的概率. 这采用的就是概率的统计定义，即用频率来刻画概率.

定义 1.3.1 在相同条件下重复进行 n 次试验，事件 A 发生了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记作 $f_n(A)$.

显然，事件 A 发生的频率反映了在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度. 当事件 A 发生得越频繁，表明事件 A 发生的可能性越大，相应的频率 $f_n(A)$ 也就越大，反之，当事件 A 发生的可能性较小，相应的频率 $f_n(A)$ 也就较小. 这表明频率在一定程度上刻画了事件发生的可能性大小，同时，频率还具有下述一些性质：

(1) $f_n(\Omega)=1, f_n(\varnothing)=0$；

(2) 对任意事件 A，$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(3) 若 $A\subset B$，则有 $f_n(A)\leqslant f_n(B)$；

(4) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$f_n\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} f_n(A_k).$$

因而可以看出，频率具备了概率的特征，那么能否用频率来刻画概率呢？§1.1 中的表 1.1 清楚表明，$f_n(A)$ 是具有随机性的，不过经验表明，随着试验次数 n 的增大，$f_n(A)$ 波动的幅度随之减小，当 n 足够大时，$f_n(A)$ 的值几乎总是在某个定值附近波动并逐渐稳定于该定值. 频率呈现的这种"稳定性"反映的正是事件的内在规律，这样用频率来刻画概率符合人们对概率的理解. 因此我们给出如下概率的统计定义：

定义 1.3.2 在相同条件下重复进行 n 次试验，称事件 A 的频率 $f_n(A)$ 取值的稳定中心值 p 为事件 A 的**概率**，即

$$P(A)=p. \tag{1.1}$$

由于频率是统计出来的，常常也称其为**统计概率**. 显然，统计概率使人们可以通过试验得到事件的概率，比如在抛掷硬币、检验产品的质量、检验药品的可靠性等实验中都可以这样求得事件的概率. 不过求得这种统计概率需要做大量

的试验，如果试验次数不够大，频率有较大的波动性，此时也就不能把频率作为概率，而且许多事件(如电视机的使用时数等)的概率是不能用频率来表示的. 为了克服这样的不足，人们又给出了概率的古典定义.

1.3.3　概率的古典定义

由 1.2 节中的例 1 知，在抛掷一颗均匀对称的骰子的随机试验 E_2 中，其样本空间为：$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. 这个随机试验有两个特点：首先是所有的基本事件(样本点)只有有限个(六个)；其次由于骰子是均匀对称的，每一个基本事件发生的可能性相同. 正是由于这两个特点，在这个随机试验中的任一事件在相同条件下的重复试验中发生的可能性大小在理论上应该是不变的，它与试验的次数无关，只与该事件所含基本事件个数在基本事件总数中所占的比例有关，这样计算此类事件的概率可以无需再进行试验，这就给研究概率带来了极大的方便. 由于这样的随机试验在现实世界中广泛存在，也是概率论发展早期主要的研究对象，人们将之归纳为古典概型，并将由此得到的概率称为概率的古典定义.

定义 1.3.3　若随机试验 E 满足以下两个条件：

(1) 试验的样本空间只含有限个元素，即该试验的基本事件总数是有限数；

(2) 每个基本事件在试验中发生的可能性相同，即基本事件具有等可能性，

则称该试验为**等可能概型**，也称为**古典概型**.

若古典概型 E 中基本事件的总数为 n，事件 A 包含其中的 m 个，则定义事件 A 的**概率**为

$$P(A)=\frac{A\text{ 包含的基本事件数}}{E\text{ 的样本空间中基本事件总数}}=\frac{m}{n},\tag{1.2}$$

由式(1.2)给出的古典概型概率的定义被称为**概率的古典定义**.

由此定义，§1.2 节例 1 中的随机试验 E_2 是古典概型，且由式(1.2)有

$$P(\omega_i)=\frac{1}{6},\quad i=1,2,\cdots,6,\quad P(\{\text{点数不小于 }4\})=\frac{3}{6}=0.5.$$

从定义中可以看出，古典概型概率的计算已经转化为"计数"问题，虽然一些简单问题的计数很容易求出，但在多数情况下计数还是相当困难的，需要掌握一定的计数方法.

***基本计数方法**

实际问题的计数形式多种多样，但分析此类问题的基本方法可以归纳为如下两大原理.

加法原理　完成一件事，有 n 类方式，在第 1 类方式中有 m_1 种不同的方法，在第 2 类方式中有 m_2 种不同的方法，……，在第 n 类方式中有 m_n 种不同的方