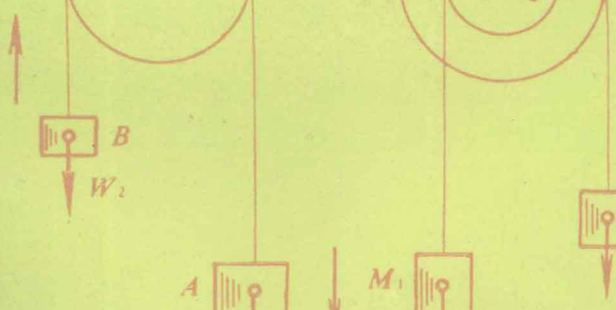
高等学校试用教材

理论力学（下册）

同济大学理论力学教研室　编

TONGJI DAXUE CHUBANSHE



同济大学出版社

高 等 学 校 试 用 教 材

理 论 力 学

下 册

同济大学理论力学教研室编

同济大学出版社

（沪）新登字第204号

内容提要

本书包含了1980年《理论力学教学大纲》（草案）（120学时）所规定的全部内容，并有所扩充。本书分上、下两册出版，上册为静力学与运动学部分，下册为动力学部分。

本书可作为高等学校工科土建、水利类各专业的理论力学教材；也可用作电视大学、职工大学及函授同类专业的教材；机械类专业或其他专业亦可适用；并可供自学青年和工程技术人员参考。

责任编辑　[illegible]明芳
封面设计　李　伦

高等学校试用教材

理　论　力　学

下　册

同济大学理论力学教研室编

同济大学出版社出版

（上海四平路1239号）

新华书店上海发行所发行

浙江上虞科技外文印刷厂排版

吴县人民印刷二厂印刷

开本：850×1168　1/32　印张：20.875　字数：597

1990年1月第1版　1992年10月第2次印刷

印数：4001—14000　定价：7.90元

ISBN 7-5608-

前　言

本书是近年来我室教学实践的总结，并参考1980年《理论力学教学大纲》（草案）（120学时）及1987年《理论力学课程教学基本要求》（草案）（100～110学时）编写而成的。

本书在体系上的特点是：在第二章汇交力系、第三章力偶系中，对平面汇交力系、平面力偶系作为特殊情况处理；在第十三章动力学基本定律与质点运动微分方程中，包括了质点相对运动微分方程。本书除包括该教学大纲所规定的全部内容外，还扩充了一些内容。例如，牵连运动为一般运动时，点的加速度合成定理、质点运动微分方程的极坐标形式、刚体对任意轴的转动惯量、质点系相对于动矩心的动量矩定理、质点在有心力作用下的运动、碰撞对平面运动刚体的作用、哈密顿原理、两个自由度系统的自由振动及受迫振动与刚体的定点运动和一般运动等。

本书中有“*”号的章或节为加深内容。对第一、二、三篇中的“*”号内容可根据需要选学。

本书各章均配有思考题、小结与习题，并在书末附有理论力学词汇汉、英对照表。

参加本书编写的有陈祥翟（第一、二、三、四、六、七章）、黄骏（第五、十二、二十一、二十三章）、徐妙新（第八、九、十、十一章）、杨兆光（第十三、十四、十六、十七、二十二章）、沈桂荣（第十五、十八、十九、二十章），由杨兆光负责主编。

限于编者水平，本书可能存在不少缺点和错误，诚恳希望读者，特别是使用本书作为教材的师生提出批评和指正。

编　者

1987年8月

目　　录

第三篇　动　力　学

绪言 ……………………………………………………（1）

第十三章　动力学基本定律与质点运动微分方程 ……………（1）

§13-1　动力学基本定律 ……………………………………（3）

§13-2　质点运动微分方程 …………………………………（5）

§13-3　质点相对运动微分方程 ……………………………（22）

习题 ……………………………………………………（40）

第十四章　动量定理 ……………………………………（55）

§14-1　质点系动量定理 ……………………………………（55）

§14-2　质心运动定理 ………………………………………（70）

*§14-3　变质量质点运动微分方程 …………………………（83）

习题 ……………………………………………………（93）

第十五章　转动惯量 ……………………………………（106）

§15-1　刚体的转动惯量 ……………………………………（106）

§15-2　转动惯量的平行轴定理 ……………………………（113）

§15-3　刚体对任意轴的转动惯量 …………………………（117）

习题 ……………………………………………………（136）

第十六章　动量矩定理 …………………………………（143）

§16-1　质点系的动量矩 ……………………………………（143）

§16-2　质点系动量矩定理 …………………………………（148）

§16-3　刚体定轴转动微分方程 ……………………………（159）

§16-4　质点系相对于动矩心的动量矩定理 ………………（167）

§16-5　刚体平面运动微分方程 ……………………………（172）

习题 ……………………………………………………（184）

第十七章　动能定理 ……………………………………（196）

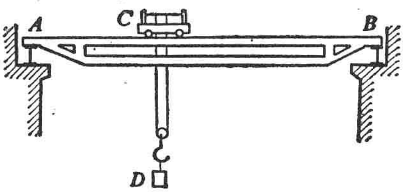
§ 17-1　力的功 ……………………………………………………………（197）
§ 17-2　动能 ……………………………………………………………（208）
§ 17-3　质点系动能定理 ……………………………………………（213）
§ 17-4　功率·功率方程·机械效率 ………………………………（225）
§ 17-5　势力场与势能 ………………………………………………（229）
§ 17-6　机械能守恒定律 ……………………………………………（235）
§ 17-7　动力学普遍定理的综合应用 ……………………………（240）
* § 17-8　质点在有心力作用下的运动 ……………………………（246）
习题 ……………………………………………………………………（259）
第十八章　碰撞 ……………………………………………………（278）
§ 18-1　碰撞现象及其基本特征 ……………………………………（278）
§ 18-2　恢复系数 ……………………………………………………（281）
§ 18-3　用于碰撞过程的冲量定理与冲量矩定理 ………………（283）
§ 18-4　两物体的对心碰撞 …………………………………………（285）
§ 18-5　刚体的偏心碰撞 ……………………………………………（300）
§ 18-6　撞击中心 ……………………………………………………（316）
习题 ……………………………………………………………………（322）
第十九章　达朗伯原理 ……………………………………………（335）
§ 19-1　质点的达朗伯原理·惯性力 ………………………………（335）
§ 19-2　质点系的达朗伯原理 ………………………………………（340）
§ 19-3　刚体中惯性力系的简化 ……………………………………（346）
§ 19-4　刚体绕定轴转动时轴承的附加动反力 …………………（359）
习题 ……………………………………………………………………（374）
第二十章　虚位移原理 ……………………………………………（388）
§ 20-1　约束及其分类 ………………………………………………（398）
§ 20-2　自由度和广义坐标 …………………………………………（392）
§ 20-3　虚位移 ………………………………………………………（395）
§ 20-4　理想约束 ……………………………………………………（397）
§ 20-5　虚位移原理 …………………………………………………（400）
§ 20-6　用虚位移原理求约束反力 …………………………………（413）

§ 20-7　以广义坐标表示的质点系平衡条件 …………(418)
*§ 20-8　保守系统平衡的稳定性 ……………………(427)
习题 ……………………………………………………(437)
第二十一章　拉格朗日方程和哈密顿原理 ……………(454)
§ 21-1　动力学普遍方程 ……………………………(454)
§ 21-2　拉格朗日方程 ………………………………(468)
*§ 21-3　拉格朗日方程的初积分 ……………………(470)
*§ 21-4　哈密顿原理 …………………………………(481)
习题 ……………………………………………………(496)
第二十二章　振动的基本理论 …………………………(503)
§ 22-1　单自由度系统的自由振动 …………………(506)
§ 22-2　用能量法计算单自由度系统的固有圆频率 …(520)
§ 22-3　单自由度系统的有阻尼自由振动 …………(530)
§ 22-4　单自由度系统的无阻尼强迫振动 …………(537)
§ 22-5　单自由度系统的有阻尼强迫振动 …………(549)
§ 22-6　隔振的概念 …………………………………(556)
*§ 22-7　两个自由度系统的自由振动 ………………(556)
*§ 22-8　两个自由度系统的强迫振动 ………………(576)
习题 ……………………………………………………(585)
***第二十三章　刚体的定点运动和一般运动**……………(606)
§ 23-1　定点运动刚体的动量矩和动能 ……………(606)
§ 23-2　陀螺的规则进动 ……………………………(616)
§ 23-3　欧拉动力学方程 ……………………………(618)
§ 23-4　欧拉情况 ……………………………………(626)
§ 23-5　拉格朗日情况 ………………………………(633)
§ 23-6　刚体的一般运动 ……………………………(638)
习题 ……………………………………………………(643)
附录　理论力学词汇汉、英对照表 ……………………(650)

第三篇 动 力 学

绪 言

在静力学中，研究了作用于物体上力系的简化与平衡条件，但没有研究力系在不满足平衡条件下的物体将如何运动。运动学是从几何方面来研究物体的运动，例如研究物体的运动方程、速度、加速度等，但没有分析产生这样运动的原因。上述问题可由动力学来解决。例如，图三-1所示桥式起重机，吊车 AB 和小车 C 均静止不动。当重物 D 也处于静止时，它受到一平衡力系的作用，钢丝绳的拉力与重物的重力大小相等。欲使重物加速上升，则必须增大该拉力，使它的大小大于重物的重量。随着该拉力的变化，重物的运动状态也随着变化。上例说明作用在物体上的力与物体的运动状态有着密切的关系。动力学就是研究物体的运动与其所受的力之间的关系。



图三-1

静力学和运动学是动力学的特殊情形，因为静力学和运动学都只研究物体运动的一个方面，而动力学却是全面地研究物体的运动。在分析动力学问题时，静力学和运动学知识都是不可缺少的基础。

随着科学技术的发展，在工程实际问题中碰到的动力学问题愈来愈多。例如，在土建、水利工程中，碰到的动力学问题有厂房结

构、桥梁和水坝在动荷载作用下的振动，各类建筑物的抗震，动力基础的隔振与减振等；机械工程中的机器、仪表的设计，机械的振动等都需要动力学的知识；在航天技术中，火箭、人造卫星的发射与运行等，都与动力学密切有关。因此，掌握动力学的基本理论及其应用，对于解决工程实际问题具有十分重大的意义。

动力学中研究的物体有质点、刚体和质点系。

当物体的大小和形状对所研究的问题不起显著作用时，往往将物体抽象为一质点。所谓质点是指大小可以略去不计，但仍具有一定质量的物体。例如，研究地球绕太阳的运行而不涉及地球自转时，由于地球半径远小于太阳到地球的距离，可将地球当作质点。

质点系是指有限个或无限个质点的组合。刚体是无限个质点所组成的不变质点系，即刚体中任意两点之间的距离保持不变。

质点系的含义十分广泛，它不仅包括一个物体或物体系统，也包括变形体和流体。质点系按质点的运动是否受有约束可分为自由质点系与非自由质点系。如质点系中各质点的运动不受约束的限制，称为自由质点系，例如，当太阳系中各星球简化为质点时，则太阳系为一自由质点系；反之，称为非自由质点系。工程实际中的结构、机构等就是非自由质点系。

从研究对象来看，动力学可分为质点动力学和质点系动力学。显然，质点动力学是质点系动力学的基础。下面将从质点动力学基本定律开始研究动力学问题。

第十三章　动力学基本定律与质点运动微分方程

动力学基本定律是全部动力学理论的基础。从动力学的第二基本定律，可推导出质点的运动微分方程。应用这方程可求解质点动力学的两类基本问题，即已知质点的运动，求作用于质点上的力；已知作用于质点上的力，求质点的运动。

当质点相对于非惯性坐标系运动时，第二动力学基本定律不能适用。引入牵连惯性力和科氏惯性力的概念，应用点的合成运动中的加速度合成定理，从第二动力学基本定律出发，可推导出质点的相对运动微分方程。

§13-1　动力学基本定律

动力学的全部理论都是以动力学的基本定律为基础的。这些定律是建立在人们长期的生产实践基础上，先后由伽利略、牛顿提出，并由牛顿综合总结而成的，所以一般称为牛顿运动定律。

（一）　第一定律——惯性定律

任何质点都保持静止或匀速直线运动的状态，直到其他物体对质点所作用的力迫使它改变运动状态为止。

这定律表明了任何质点都有保持其静止或匀速直线运动状态的属性，这种属性称为惯性。它是物体在机械运动中的一种内在的基本属性。所以第一定律也叫做惯性定律。而质点作匀速直线运动称为惯性运动。

由惯性定律可知，质点运动状态的改变与它所受的力有关。如果它所受的力系为一平衡力系，则质点必须保持静止或作惯性运动。如果它所受的力系为一不平衡力系，则质点的静止或惯性运动的状态将发生改变。因此，力是质点运动状态改变的原因。力

的这种作用效果就是在静力学中提出的力的运动效应。

（二） 第二定律——力与加速度的关系定律

质点受一力作用时所获得的加速度的大小与力的大小成正比，而与质点的质量成反比；加速度的方向与力的方向相同。

如以 $\boldsymbol{F}$ 表示作用在质点上的力，m 表示质点的质量，$\boldsymbol{a}$ 表示质点的加速度，则第二定律可用矢量式表示为

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{13-1}$$

如一质点同时受有几个力的作用，则式（13-1）中的力应理解为这些力的合力，即 $\boldsymbol{F} = \Sigma \boldsymbol{F}_i$，而 $\boldsymbol{a}$ 应理解为这些力共同作用下质点的加速度。

式(13-1)称为质点动力学基本方程，它建立了质点的质量、加速度与作用于质点上的力三者之间的关系。

由式(13-1)可知，在一定力的作用下，质量越大的质点，加速度越小，改变它的运动状态越难，即它的惯性越大；反之，质量越小的质点，它的加速度越大，改变它的运动状态越易，即它的惯性越小。因此，质点的质量，反映了质点运动状态改变难易的内在因素，是质点惯性的度量。在古典力学中，对一定的质点来说，质量被认为是不变的量。根据相对论力学，质点的质量是随着质点的速度而改变的，但质点以普通速度运动时，把质量视为常量仍是足够准确的，只有当速度接近于光速（3×10^5 km/s）时，才会有较大的差异。

当质点只受重力 $\boldsymbol{W}$ 作用时，质点的加速度就是重力加速度 $\boldsymbol{g}$。g 的数值随纬度改变(详见本章 §13-3 式 13-20)，一般视为常量，取为 9.80 m/s²。由式(13-1)可得数量形式

$$m = \frac{F}{a}$$

以 $F = W$，$a = g$ 代入上式，得

$$m = \frac{W}{g} \tag{13-2}$$

可见，质点的质量等于质点的重量除以重力加速度的大小。

质量和重量是不同的概念。质量是质点惯性的度量，而重量是质点所受重力的大小。在地面上不同之处，重力加速度的大小 g 并不相同，相应的重量 W 也不相等。但同一质点的质量是一个常量。

在力学中有许多物理量，各个物理量之间一般都有一定的联系。为了以适当的单位来度量每个物理量，我们选定几个物理量作为基本量，它们相应的单位即为基本单位；而其他各物理量可根据定义或定律从基本量导出，称为导出量，其相应的单位即为导出单位。

导出量都可用几个基本量按某种组合表示出来。一个物理量如何以基本量表示的式子称为量纲。不同的单位制所选取的基本量是不同的。在国际单位制（SI）中，取质量、长度和时间作为基本量，它们的基本单位分别为千克（kg）、米（m）和秒（s）。如以 $[M]$、$[L]$、$[T]$ 依次表示质量、长度、时间这三个基本量的量纲，则由式(13-1)可知力（导出量）的量纲为

$$[力]=[质量][加速度]=[M][L][T]^{-2}$$

其单位为千克·米/秒^2（$kg\cdot m/s^2$）。力的这种单位称为牛顿(N)，即质量为 1 kg 的质点，产生 1 m/s^2 的加速度所需作用力的大小就是 1 N。据此，不难得出质量为 1 kg 的质点的重量为

$$W=mg=1\ kg\times 9.80 m/s^2=9.80\ N$$

在工程单位制中，取力、长度和时间作为基本量，它们的基本单位分别为公斤（kg）、米（m）和秒（s）。如以 $[F]$、$[L]$、$[T]$ 依次表示力、长度、时间这三个基本量的量纲，则由式(13-1)可知质量（导出量）的量纲为

$$质量=\frac{[力]}{[加速度]}=[F][L]^{-1}[T]^2$$

其单位为 $\frac{公斤\cdot秒^2}{米}$（$kg\cdot s^2/m$）。质量的这种单位称为工程单位质量。例如，1 kg 重的质点，其质量为

$$m=\frac{W}{g}=\frac{1}{9.8}=0.1020\ kg\cdot s^2/m=0.1020\ 工程单位质量$$

工程单位制和国际单位制可以互相换算，因为 1 kg 质量的物体在北纬 45° 的海平面处的重量也称为 1 kg，故在工程单位制中 1 kg 的力，相当于国际单位制 9.80 N 的力。关于国际单位制和工程单位制有关力学部分的换算关系，可参考本书上册附录 I。

（三） 第三定律——作用与反作用定律

两质点相互作用的力总是大小相等，方向相反，沿同一直线，并分别作用在两质点上。

这个定律在静力学中已讲过，当解决物体系统平衡问题时曾应用它。在动力学中，这一定律也成立。可见这定律适用于运动的任何情况。由于第二定律只应用于单个质点，而第三定律则给出了质点系中各质点相互作用的关系。综合应用这两个定律，就可以将质点动力学的原理推广，去研究质点系动力学问题。因此，第三定律对研究质点系动力学问题具有特别重要的意义。

动力学基本定律又称为牛顿运动定律。以牛顿运动定律为基础的力学又称为牛顿力学或古典力学。在运动学中已指出，相对于不同的参考系，物体的运动情况是不同的。在分析运动学问题时，参考系是可以任意选取的，但在动力学中，动力学基本定律是否适用于任何参考系呢？

牛顿假想宇宙间存在着与物质运动无关的所谓“绝对空间”和绝对静止的坐标系，并且存在着与坐标系运动无关的所谓“绝对时间”，而基本定律是在“绝对空间”和“绝对时间”的前提下才成立的。从辩证唯物主义的观点来看，时间、空间是物质运动存在的形式，脱离物质运动的绝对时间和绝对空间是不存在的，宇宙间找不到任何绝对静止的空间，而时间是和坐标系的运动有关的。这种观点已为近代物理学的成就所证实。这样是否以基本定律为基础的古典力学就不适用了呢？事实上，这些基本定律是根据人们长期生产实践总结而成的，它反映着机械运动在一定范围内的客观规律。如果我们选定的参考坐标系中，应用基本定律所得到的结果在要求的精确范围内，符合客观实践，则认为这坐标系是“静止”的，这样的坐标系称为**惯性坐标系**。实践证明，在大多数工程问题

中，把固结于地球或相对于地球作匀速直线运动的坐标系，作为惯性坐标系，应用基本定律所反映的客观规律是足够精确的。今后如没有特别说明，就把固结于地球上的坐标系作为惯性坐标系。在某些需要考虑地球自转影响的问题中，惯性坐标系的坐标原点可取在地心，而三轴则分别指向三个恒星。

必须指出，古典力学的适用范围不仅在于选择怎样的坐标系，而且要注意它只适用于研究速度远小于光速的宏观物体。但在一般工程问题中，所遇到的机械运动大多数是宏观物体，且其速度远小于光速，应用古典力学能足够精确地反映物质运动的规律。因此，古典力学在近代工程技术中，仍占有很重要的地位。

思 考 题

13-1 怎样的坐标系称为惯性坐标系？并试举一例。

13-2 质点的运动方向（即速度方向）是否一定与作用在质点上的合力方向相同？

13-3 如不计空气阻力，自由下落的物体与向下扔（即给以向下的初速）的物体，哪一个加速度较大？

13-4 已知月球表面的重力加速度约为在地球表面时的1/6。问：体重 60 kg 的人在月球上体重将为多少？他在月球上质量又为多少？

13-5 质点作曲线运动时，能否不受任何力？

§13-2 质点运动微分方程

设直角坐标系 $Oxyz$ 为惯性坐标系（图 13-1）。质量为 m 的质点 M 在汇交力系 $\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$、$\boldsymbol{F}_3$、…、$\boldsymbol{F}_n$ 的作用下沿某一空间曲线运动。以 $\boldsymbol{r}$ 表示质点 M 对坐标原点 O 的矢径，$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$ 分别表示质点 M 的速度、加速度。则质点动力学基本方程可表示为

$$m\boldsymbol{a} = \Sigma \boldsymbol{F}_i = \boldsymbol{F}$$

由运动学已知

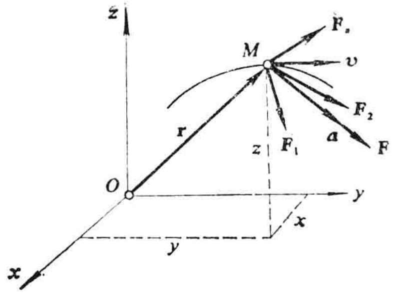


图 13-1

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

于是上式可写成

$$m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2 r}{dt^2} = \Sigma F_i \tag{13-3}$$

这就是以矢量形式表示的质点运动微分方程。

在应用式(13-3)时，根据不同的具体问题，可将式(13-3)写成不同的坐标形式。

将式(13-3)投影到直角坐标轴上，得

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= \Sigma Z_i \end{aligned}\right\} \tag{13-4}$$

这就是以直角坐标形式表示的质点运动微分方程。式中 x、y、z 为质点 M 的坐标(图 13-1)；ΣX_i、ΣY_i、ΣZ_i 分别为 F_1、F_2、…、F_n 各力在相应坐标轴上投影的代数和。

如质点 M 在平面 Oxy 内作平面曲线运动，则式(13-4)成为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= \Sigma Y_i \\ 0 &= \Sigma Z_i \end{aligned}\right\} \tag{13-5}$$

如质点 M 沿 Ox 轴作直线运动，则式(13-4)成为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= \Sigma X_i \\ 0 &= \Sigma Y_i \\ 0 &= \Sigma Z_i \end{aligned}\right\} \tag{13-6}$$

将式(13-3)投影到M点的自然轴系的切线、主法线和副法线上(图(13-2)，得

$$\left.\begin{aligned} ma_\tau &= m\frac{d^2s}{dt^2} = \Sigma F_{i\tau} \\ ma_n &= m\frac{v^2}{\rho} = \Sigma F_{in} \\ ma_b &= 0 = \Sigma F_{ib} \end{aligned}\right\} \tag{13-7}$$

这就是以自然坐标形式表示的质点运动微分方程。其中 $\Sigma F_{ib}=0$ 表明作用在质点上的合力在副法线上的投影为零，也就是说作用在质点上的合力总在该质点轨迹的密切面内。

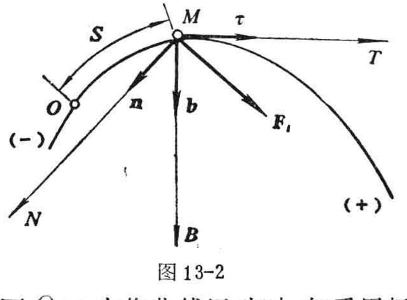


图 13-2

当质点在平面 Oxy 内作曲线运动时，如采用极坐标法，将式(13-3)投影到极坐标的径向轴和横向轴上(图 13-3)，得

$$\left.\begin{aligned} ma_r &= m(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2) = \Sigma F_{ir} \\ ma_\theta &= m(r\ddot{\theta}+2\dot{r}\dot{\theta}) = \Sigma F_{i\theta} \end{aligned}\right\} \tag{13-8}$$

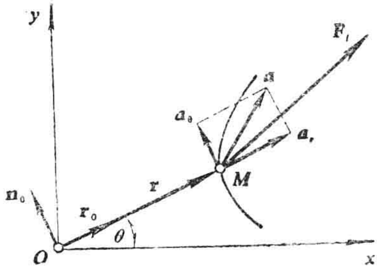


图 13-3

这就是以极坐标形式表示的质点运动微分方程。由式(13-8)可知 $\Sigma F_{iz}=0$，这说明作用在质点上的力系在 z 轴上的投影之之和必须等于零，也就是说，作用在质点上的合力总在 Oxy 平面内。

应用质点运动微分方程可解决质点动力学的两类问题：

第一类问题：已知质点的运动，求作用于质点上的力。

第二类问题：已知作用于质点上的力，求质点的运动。

此外，还有些问题是第一与第二类问题的综合。

在求解第一类问题时，质点的运动方程如已知，就可以求它们对时间的导数，于是由质点运动微分方程可求得作用在质点上的力。可见求解第一类问题是属于微分问题。

在求解第二类问题时，作用于质点上的力是已知的，它们可以是常力或变力，变力可以是时间、坐标、速度的函数或同时是这三种变量的函数。求质点的运动就是求质点运动微分方程的解。可见求解第二类问题是属于积分问题。为了确定运动微分方程的通解所包含的积分常数，还需要给出运动的起始条件。起始条件是指初瞬时质点的初位置与初速度。下面举例说明质点动力学的两类问题的求解方法。

例 13-1　一个质量为 m 的质点在 Oxy 平面内运动，质点的矢径 $\boldsymbol{r}=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+b\sin\omega t\boldsymbol{j}$。其中 a、b 和 ω 都是常数(图 13-4)。求作用在质点上的力。