北京工业大学研究生创新教育系列著作

现代医学信号处理

主　编　林　岚　吴水才

副主编　宾光宇　杨春兰

高宏建　周著黄

科学出版社

北京工业大学研究生创新教育系列著作

现代医学信号处理

主　编　林　岚　吴水才

副主编　宾光宇　杨春兰
　　　　高宏建　周著黄

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书的主要内容有随机信号分析基础、平稳随机信号的线性模型及谱估计、维纳滤波器与卡尔曼滤波器、自适应滤波、时频分析与小波变换、主成分分析与独立成分分析。为加深对基本概念和基本理论的理解，加强对基本方法和基本技能的掌握，本书第 1 章对现代信号处理理论及其数学基础进行了扼要的复习，并在各个章节末安排了习题，书中还给出了某些重要公式的推导过程。现代医学信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的前沿交叉性学科。因此在使用本教材时，要特别注意对基本概念、基本理论、基本方法和基本技能的掌握，在此基础上努力把理论和实际应用很好地结合起来，不断跟踪本学科本领域的新发展。这样，才有可能在自己的工作和学习中争取作出创造性的成果。

本书可作为高等学校研究生的学习教材，也可作为报考生物医学工程、电子信息专业及其他相关专业研究生的复习参考书。

图书在版编目(CIP)数据

现代医学信号处理/林岚，吴水才主编. —北京：科学出版社，2016.5

ISBN 978-7-03-048232-7

Ⅰ. ①现…　Ⅱ. ①林…　②吴…　Ⅲ. ①生物医学仪器-信号处理-研究　Ⅳ. ①R318.04

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 095393 号

责任编辑：罗　静　田明霞 / 责任校对：郑金红

责任印制：徐晓晨 / 封面设计：刘新新

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2016 年 5 月第　一　版　开本：720×1000　B5

2016 年 5 月第一次印刷　印张：12 1/2

字数：252 000

定价：75.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前 言

近十几年来，随着计算机技术的不断发展，数字信号处理的理论和方法都获得了迅速的发展。人们已经不满足于用线性、因果、最小相位系统去描述实际的系统和信号。非线性、非因果、非最小相位系统及非平稳信号和非高斯信号已成为信号处理的对象；高阶统计方法、小波变换技术等已经成为研究的热点。这些新发展的理论和技术已成为现代数字信号处理技术的主要标志之一，它们反映了人类对实际信号和系统认识上的深化和处理能力的飞跃。目前，现代信号处理已被广泛地应用于生物医学工程中，而且还被扩展到了很多其他工程领域。

为适应现代医学信号处理技术应用范围的日益拓展，作者在生物医学工程领域多年研究的基础上，整理编写了本书。本书是为了配合北京工业大学生命学院研究生公共课“现代医学信号处理”的教学而编写的。作为一门课的教材，我们不可能，也没必要涉及现代信号处理的所有内容。因此，本书主要系统深入地介绍了现代医学信号处理的主要新理论和新技术，特别介绍了现代信号处理在生物医学工程领域的应用。

本书由林岚、吴水才、宾光宇、杨春兰、高宏建、周著黄共同完成编写。同时感谢研究生(付振荣、王月、聂英男、关凯、杜丽莉、曹荟强、张睿、秦海鹏、池臻钦、刘智挥、李广飞、金鎏、吴文杰、杨阳、李高阳、王浩然)参与本书编写，为本书的录入、绘图、资料收集等做了大量工作，在此表示衷心的感谢！

限于作者水平，加之时间仓促，书中可能仍存在错误及不妥之处，恳切希望读者给予批评指正。

编 者

2016 年 1 月

目　　录

第 1 章　随机信号分析基础

1.1　信号的分类

信号是本课程所涉及的第一个概念，也是贯穿课程所有内容的核心概念。通常，现有教材多采取简洁的方式引入信号概念。例如，信号是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容。对信号概念的深入理解有助于更好地理解课程内容，明确信号分类。所以应该首先对信号概念有进一步的了解，明晰信号概念的内涵与外延，概括信号的基本性质。信号与信息两个概念是紧密相连的，二者不可分割。在引入信号概念之前，需先建立信息概念。

1.1.1　信息与信号的概念及性质

1. 信息

物质、能量与信息三者是具有同样基础性质的自然科学研究对象。传统科学以物质和能量为中心观念，现代科学以物质、能量和信息为中心观念。

信息是一个具有丰富内涵的概念，很难用统一的文字对其进行定义，这是由其具体表现形式的多样性造成的。信息是一个发展中的动态范畴，它随人类社会的演变而相应地扩大或收缩，总的来看，从过去到现在信息所涵盖的范围是不断扩大的，可以断定随人类社会的发展信息范畴将进一步扩大。我国信息学家钟义信教授在《信息科学原理》中对信息概念进行了本体论与认识论意义上分层次的定义。哲学中，研究世界本原或本性问题的学说称为“本体论”，研究人类认识的学说称为“认识论”。“主体”与“客体”是认识论的一对基本范畴。主体指认识者，客体指作为主体认识对象或实践对象的客观事物。

本体论意义上的信息是事物运动状态及其变化方式。认识论意义上的信息是主体所感知的事物运动状态及其变化方式，包括状态及其变化方式的形式、含义和价值团。“事物”泛指一切可能的研究对象，可以是物质客体，也可以是主观精神现象；“运动”泛指一切意义上的变化；“运动的状态”是指事物在特定时空中的性状和态势；“状态变化方式”是指事物运动状态随时空而变化的过程样式。本体论层次的信息定义从“事物”本身的角度出发，就“事”论事，是最广义的信息，它是一种客观的存在，与“人”的因素无关。

认识论层次的信息定义从“人”的角度出发，就“人”来论事。人具有感觉能力、理解能力及目的性：能够感觉到事物运动状态及其变化方式的外在形式；能够理解事物运动状态及其变化方式的内在含义；能够判断事物运动状态及其变化方式对其目的而言的价值。

2. 信号

信号：事物的物理状态随时空变化的过程称为信号。信号是信息的物理体现，一切运动或状态的变化，广义地说都是信号。

信号与信息：信息概念的核心是“事物运动状态及其变化方式”，而运动状态及其变化方式的表现形式即为“信号”。信号是信息的表现形式，信息是信号的内容。形式不等同于内容，信号不等同于信息。信号是信息的媒介，信号是信息的载体，信号所载荷的内容是信息。若事物的物理状态随时空变化的过程是自然界本身产生的，那它实际上是本体论意义上的“信息”；若这个过程是人们用来描述、记录、表示或载荷信息的手段，那它只能称为信号，不能称为信息。在本体论层次，事物的运动状态及其变化方式与人无关，它是信息，不是信号。一旦人要获取事物的信息，就进入认识论层次，面对的是信息的具体表现形式——信号。由于信号概念的广泛性，在信息处理问题中，信号概念可以与具体的物理状态相脱离，成为一个抽象概念。信号概念适用的范围是极其广泛的，可涉及所有的科学技术领域。

3. 信号的基本性质

信号是信息的载体与表现形式，信息是信号的内容。下面通过对信息性质的讨论，推演以下所述信号的主要基本性质。

(1) 普遍性

宇宙间一切事物都在运动，都有一定的运动状态和状态改变的方式，一切事物都在产生信息。信息是普遍存在的，它存在于自然界、人类社会及人的思维。信息的表现形式——信号也是普遍存在的。

(2) 无限性

宇宙时空中的事物是无限丰富的，因而它们所产生的信息也必然是无限量的，信息的表现形式——信号也是无限的。即使在有限的空间中，事物也是无限多样的；在无限的时间长河中，事物的发展变化更是无限的，因而信息与信号自然必是无限的。

(3) 可测性

信号是可以进行测量的。信号作为事物状态及其变化方式的物理表现形式，是可以进行测量的。对事物进行观测是现代科学技术的基础。任何形式的观测

结果都可看作信号。

(4)相对性

信号具有相对性。物质运动特性制约着时间与空间的特性，人所感知的事物运动状态及其变化方式具有相对性。人的感觉器官的功能和灵敏度总是有限的，并非事物的所有运动状态及其变化方式都能被感知，更多的事物是通过各种仪器间接地被认识，人所获得的信号是随观测手段的改进及认识的深化而不断发展的。对同一事物，不同的观察者关注的信号形式可能不同。

(5)传递性

包含信息的信号可以在时间上或在空间中进行传递。信号在时间上的传递称为存储；在空间中的传递称为通信。信号在空间中传递的同时，也伴有时间上的传递。信息借助于信号在时间上和在空间中传递，使人类的知识能够积累和传承，使人与人之间能够通过信号进行信息的交流，使人能够获得环境的信息，以在自然环境中生存与发展。

(6)变换性

荷载信息的信号可以进行多种形式上的转换。信息是事物运动的状态及其变化方式，不是事物本身，信息可以荷载在其他一切可能的物质载体和能量形式上，信息的载体可以进行转换，同样的信息内容可用不同的信号形式来表示。例如，信息“是”与“非”，可以表示为二进制数“1”和“0”，可用多种物理量的不同的两个状态来荷载。又如，思想可以转换为语言，语言可以转变为声音或记录成文字，声音和文字可以多种形式进行转换、传输及存储。

信号是事物的物理状态在时空中的展开，是随时空变化的过程。信号的主要基本性质有：普遍性、无限性、可测性、相对性、传递性及变换性。这些性质使得信号可用数学上的函数进行描述。在用函数表示信号时，隐去了其具体的物理形态。信号与系统课程所讨论的信号概念是抽象的，适用于所有的情形，包括各种不同的实际状态或物理量。函数的利用使得抽象的信号概念适用于任何实际情形的分析与描述。

1.1.2　信号的一般分类方法

按信号载体的物理特性，信号可以分为：电信号、光信号、声信号、磁信号、机械信号、热信号等。按自变量的数目，信号可以分为：一维信号、多维信号(二维信号、三维信号等)。按信号中自变量和幅度的取值特点，信号可以分为：连续时间信号(自变量时间在定义域内是连续的)的数字信号。如果连续时间信号的幅度在一定的动态范围内也连续取值，信号就是模拟信号。模拟信号是指用连续变化的物理量所表达的信息，如温度、湿度、压力、长度、电流、电压等，我们通

常又把模拟信号称为连续信号，它在一定的时间范围内可以有无限多个不同的取值。而数字信号是指在取值上是离散的、不连续的信号。

实际生产生活中的各种物理量，如摄像机拍摄下的图像，录音机录下的声音，车间控制室所记录的压力、转速、湿度等都是模拟信号。数字信号是在模拟信号的基础上经过采样、量化和编码而形成的。具体地说，采样就是把输入的模拟信号按适当的时间间隔采样，得到各个时刻的样本值。量化是把经采样测得的各个时刻的样本值用二进制来表示，编码则是把生成的二进制数排列在一起形成顺序脉冲序列。

模拟信号传输过程中，先把信息信号转换成几乎“一模一样”的波动电信号(因此称为“模拟”)，再通过有线或无线的方式传输出去，电信号被接收下来后，通过接收设备还原成信息信号。

近百年以来，无论是有线相连的电话，还是无线发送的广播电视，很长的时间内都是用模拟信号来传递的。照说模拟信号同原来的信号在波形上几乎“一模一样”，似乎应该达到很好的传播效果，然而事实恰恰相反。过去我们打电话时常常遇到听不清、杂音大的现象；广播电台播出的交响乐，同在现场听乐队演奏相比总有较大的欠缺；电视图像上也时有雪花点闪烁。这是因为信号在传输过程中要经过许多的处理和转送，这些设备难免要产生一些噪声和干扰；此外，如果是有线传输，线路附近的电气设备也要产生电磁干扰；如果是无线传送，则更加“开放”，空中的各种干扰根本无法抗拒。这些干扰很容易引起信号失真，也会带来一些噪声。这些失真和附加的噪声，还会随着传送的距离的增加而积累，严重影响通信质量。对此，人们想了许多办法。一种是采取各种措施来抗干扰，如提高信息处理设备的质量，减少噪声；又如给传输线加上屏蔽；再如采用调频载波来代替调幅载波等。但是，这些办法都不能从根本上解决干扰的问题。另一种办法是设法除去信号中的噪声，把失真的信号恢复过来。但是，对于模拟信号来说，由于无法从已失真的信号中较准确地推知出原来不失真的信号，因此这种办法很难有效。

离散时间信号：大多数离散时间信号是对连续时间信号采样得到的，取值上可以仍然取连续值。它们是在时间上依次出现的数值序列，例如，{…，0.5，1，2，−1，0，5，…}。相邻两个数之间的时间间隔可以是相等的，也可以是不等的。在前一情况下，设时间间隔为 T 秒，则离散信号可用符号 $x(nT)$ 来表示。在间隔 T 归一化为 1 的条件下，T 可以省略，即将 $x(nT)$ 表示为 $x(n)$。$x(n)$ 既可表示整个序列，也可表示离散信号在 nT 瞬间的值。

抽样：离散时间信号可以由连续时间信号抽样得到。开关每隔 T 秒闭合一次，则输出信号就是离散时间信号 $x(t)$。间隔时间的长短决定了抽样的离散时间信号

能否唯一地表示连续时间信号。抽样定理指出：一个有限频谱的连续时间信号 $x(t)$，如果其频谱只含有 ω_0 以下的角频率分量，则信号 $x(t)$ 可以用等间隔的抽样值来唯一地表示的条件是：间隔 T 必须满足奈奎斯特采样定律。抽样间隔 T 的倒数称为抽样频率，用 f_s 表示。最低的抽样频率应该是连续时间信号 $x(t)$ 中最高频率分量的两倍。这个最低的抽样频率 $f_s = 2f_0$ 通常称为奈奎斯特抽样率。

在理论分析和实际应用中，经常遇到两种典型的离散信号，即单位抽样信号和离散单位阶跃信号。

数字信号：数字信号是指自变量是离散的、因变量也是离散的信号，这种信号的自变量用整数表示，因变量用有限数字中的一个数字来表示。在计算机中，数字信号的大小常用有限位的二进制数表示，例如，字长为 2 位的二进制数可表示 4 种大小的数字信号，它们是 00、01、10 和 11；若信号的变化范围在-1 到 1 之间，则这 4 个二进制数可表示 4 段数字范围，即[-1，-0.5)、[-0.5，0)、[0，0.5)和[0.5，1]。由于数字信号是用两种物理状态来表示 0 和 1 的，故其抗干扰的能力比模拟信号强很多；在现代技术的信号处理中，数字信号发挥的作用越来越大，几乎复杂的信号处理都离不开数字信号；或者说，只要能把解决问题的方法用数学公式表示，就能用计算机来处理代表物理量的数字信号。

在数字电路中，由于数字信号只有 0、1 两个状态，它的值是通过中央值来判断的，在中央值以下规定为 0，以上规定为 1，所以即使混入了其他干扰信号，只要干扰信号的值不超过阈值范围，就可以再现出原来的信号。即使因干扰信号的值超出阈值范围而出现了误码，只要采用一定的编码技术，也可以很容易将出错的信号检测出来并加以纠正。因此，与模拟信号相比，数字信号在传输过程中不仅具有较高的抗干扰性，还可以通过压缩，占用较少的带宽，实现在相同的带宽内传输更多信号的效果。此外，数字信号还可用半导体存储器来存储，并可直接用于计算机处理。

数字信号的优点很多，首先，它抗干扰的能力特别强，它不但可以用于通信技术，而且可以用于信息处理技术。其次，我们使用的电子计算机都是数字的，它们处理的信号本来就是数字信号。在通信上使用了数字信号，就可以很方便地将计算机与通信结合起来，将计算机处理信息的优势用于通信事业。再次，数字信号便于存储。此外，数字通信还可以兼容电话、电报、数据和图像等多类信息的传送，能在同一条线路上传送电话、有线电视、多媒体等多种信息。数字信号还便于加密和纠错，具有较强的保密性和可靠性。

信号处理的根本目的是从信号中提取尽可能多的有用信息；增强有用信号的分量；估计信号的特征参数；识别信号的特性；抑制或消除不需要的甚至是有害

的信号分量。为达到上述目的，需要对信号进行分析和变换、扩展和压缩、滤波、参数估计、特性识别等加工，这些统称为信号处理。

1.1.3 几种简单的信号处理方法

具体正弦序列有以下 3 种情况。

1) $2\pi/\omega_0$ 为整数：$k=1$，正弦序列是以 $2\pi/\omega_0$ 为周期的周期序列。

2) $2\pi/\omega_0$ 是有理数：设 $2\pi/\omega_0=P/Q$，式中 P、Q 是互为素数的整数，取 $k=Q$，那么 $N=P$，则正弦序列是以 P 为周期的周期序列。

3) $2\pi/\omega_0$ 是无理数：任何整数 k 都不能使 N 为正整数，因此，此时的正弦序列不是周期序列。

线性系统 $y(n)=T[ax_1(n)+bx_2(n)]=ay_1(n)+by_2(n)$。

线性时不变系统具有因果性的充分必要条件是系统的单位取样响应满足 $h(n)$=0，n<0。

系统稳定的充分必要条件是系统的单位脉冲响应绝对可和

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty \tag{1.1.1}$$

序列的离散时间傅里叶变换的定义

$$X(\mathrm{e}^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-j\omega n} \tag{1.1.2}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(\mathrm{e}^{j\omega})\mathrm{e}^{j\omega n}\mathrm{d}\omega \tag{1.1.3}$$

离散时间傅里叶变换(discrete-time Fourier transform，DTFT)的周期性

$$X(\mathrm{e}^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)\mathrm{e}^{-j(\omega+2\pi M)n} \tag{1.1.4}$$

线性

$$X_1(\mathrm{e}^{j\omega})=\mathrm{DTFT}[x_1(n)],\quad X_2(\mathrm{e}^{j\omega})=\mathrm{DTFT}[x_2(n)] \tag{1.1.5}$$

$$\mathrm{DTFT}[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(\mathrm{e}^{j\omega})+bX_2(\mathrm{e}^{j\omega}) \tag{1.1.6}$$

时移(位移)与频移

$$\mathrm{DTFT}[x(n-n_0)]=\mathrm{e}^{-j\omega n_0}X(\mathrm{e}^{j\omega}) \tag{1.1.7}$$

$$\mathrm{DTFT}[\mathrm{e}^{j\omega_0 n}x(n)]=X(\mathrm{e}^{j(\omega-\omega_0)}) \tag{1.1.8}$$

序列乘以 n(频域微分)

$$\mathrm{DTFT}\left[nx(n)\right]=j\frac{\mathrm{d}X(\mathrm{e}^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega} \tag{1.1.9}$$

共轭序列

$$\mathrm{DTFT}\left[x^*(n)\right]=X^*(\mathrm{e}^{-j\omega}),\quad \mathrm{DTFT}\left[x^*(-n)\right]=X^*(\mathrm{e}^{j\omega}) \tag{1.1.10}$$

时域卷积定理

$$y(n)=x(n)*h(n)\text{，则 }Y(\mathrm{e}^{j\omega})=X(\mathrm{e}^{j\omega})H(\mathrm{e}^{j\omega})$$

$h(n)$是实因果序列

$$\mathrm{DTFT}\left[nx(n)\right]=j\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}$$

$$h_e(n)=\begin{cases}h(0), & n=0\\ \dfrac{1}{2}h(n), & n>0\\ \dfrac{1}{2}h(-n), & n<0\end{cases}\qquad h_o(n)=\begin{cases}h(0), & n=0\\ \dfrac{1}{2}h(n), & n>0\\ -\dfrac{1}{2}h(-n), & n<0\end{cases} \tag{1.1.11}$$

序列 $x(n)$ 的 Z 变换定义为

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad X(\mathrm{e}^{j\omega})=X(z)\big|_{z=\mathrm{e}^{j\omega}} \tag{1.1.12}$$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n},\quad R_{x-}<|z|<R_{x+} \tag{1.1.13}$$

$$\begin{gathered}x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z,\quad c\in(R_{x-},R_{x+})\\ F(z)=X(z)z^{n-1}\end{gathered} \tag{1.1.14}$$

用留数定理求逆 Z 变换

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k] \tag{1.1.15}$$

如果 z_k 是单阶极点，则根据留数定理

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]=(z-z_k)\cdot X(z)z^{n-1}\big|_{z=z_k} \tag{1.1.16}$$

如果 z_k 是 N 阶极点，则根据留数定理

$$\mathrm{Res}[X(z)z^{n-1},z_k]=\frac{1}{(N-1)!}\frac{\mathrm{d}^{N-1}}{\mathrm{d}z^{N-1}}[(z-z_k)^N X(z)z^{n-1}]\big|_{z=z_k} \tag{1.1.17}$$

1.2　随机事件及其概率

1.2.1　随机事件

在抛掷一枚均匀硬币的试验中，“正面向上”是一个随机事件，可用A={正面向上}表示。随机试验中的每一个可能出现的试验结果称为这个试验的一个样本点，记作ω_i。全体样本点组成的集合称为这个试验的样本空间，记作Ω，即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n,\cdots\}$。仅含一个样本点的随机事件称为基本事件，含有多个样本点的随机事件称为复合事件。

在随机试验中，随机事件一般是由若干个基本事件组成的。样本空间Ω的任一子集A称为随机事件。属于事件A的样本点出现，则称事件A发生。

例如，在试验E中，令A表示“出现奇数点”，A就是一个随机事件，A还可以用样本点的集合形式表示，即$A=\{1，3，5\}$，它是样本空间Ω的一个子集，在试验W中，令B表示“灯泡的寿命大于1000小时”，B也是一个随机事件，B也可用样本点的集合形式表示，即$B=\{t\mid t>1000\}$，B也是样本空间的一个子集。

因此在理论上，我们称试验E所对应的样本空间Ω的子集为E的一个随机事件，简称事件。在一次试验中，当这一子集中的一个样本点出现时，称这一事件发生。

样本空间Ω的仅包含一个样本点ω的单点子集$\{\omega\}$也是一种随机事件，这种事件称为基本事件。例如，在试验 A 中$\{H\}$表示“正面朝上”，这是基本事件；在试验B中{3}表示“掷得3点”，这也是基本事件；在试验C中{5}表示“测量的误差是0.5”，这还是一个基本事件。

样本空间Ω包含所有的样本点，它是Ω自身的子集，在每次的试验中它总是发生，称为必然事件，必然事件仍记为Ω，空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间Ω的子集。在每次试验中都不发生，称为不可能事件，必然事件和不可能事件在不同的试验中有不同的表达方式。

综上所述，随机事件可能有不同的表达方式：一种是直接用语言描述，同一事件可能有不同的描述；也可以用样本空间子集的形式表示，此时，需要理解它所表达的实际含义，有利于对事件的理解。

1.2.2　排列与组合

1. 加法原理与乘法原理

加法原理：完成一件事，只需 1 个步骤，但有 n 种方法，每一种方法有 m 种选择，则完成这件事共有 N 种方法。

$$N = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{1.2.1}$$

乘法原理：完成一件事，有 n 个步骤，每个步骤方法有 m 种方法，则完成这件事共有 N 种方法。

$$N = m_1 m_2 \cdots m_n \tag{1.2.2}$$

2. 排列

从 n 个不同元素按次序任取 m 个元素，不放回的取法共有

$$P_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.2.3}$$

从 n 个不同元素任取 m 个元素，放回的取法共有

$$P_n^m = n^m \tag{1.2.4}$$

存在部分相同元素的排列，如共有 n 个元素，其中有 m 种不同类的元素，每一类元素有 k 个相同的元素，则排列总数为

$$N = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!} \tag{1.2.5}$$

3. 组合

从 n 个不同元素无次序任取 m 个元素，不放回的取法共有

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.2.6}$$

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1} \tag{1.2.7}$$

1.2.3　频率与概率的定义

1. 频率

每个对象出现的次数与总次数的比值。统计定义为在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 $n(A)$ 称为事件 A 发生的频数。比值 $n(A)/n$ 称为事件 A 发生的频率，并记为 $f_{n(A)}$。