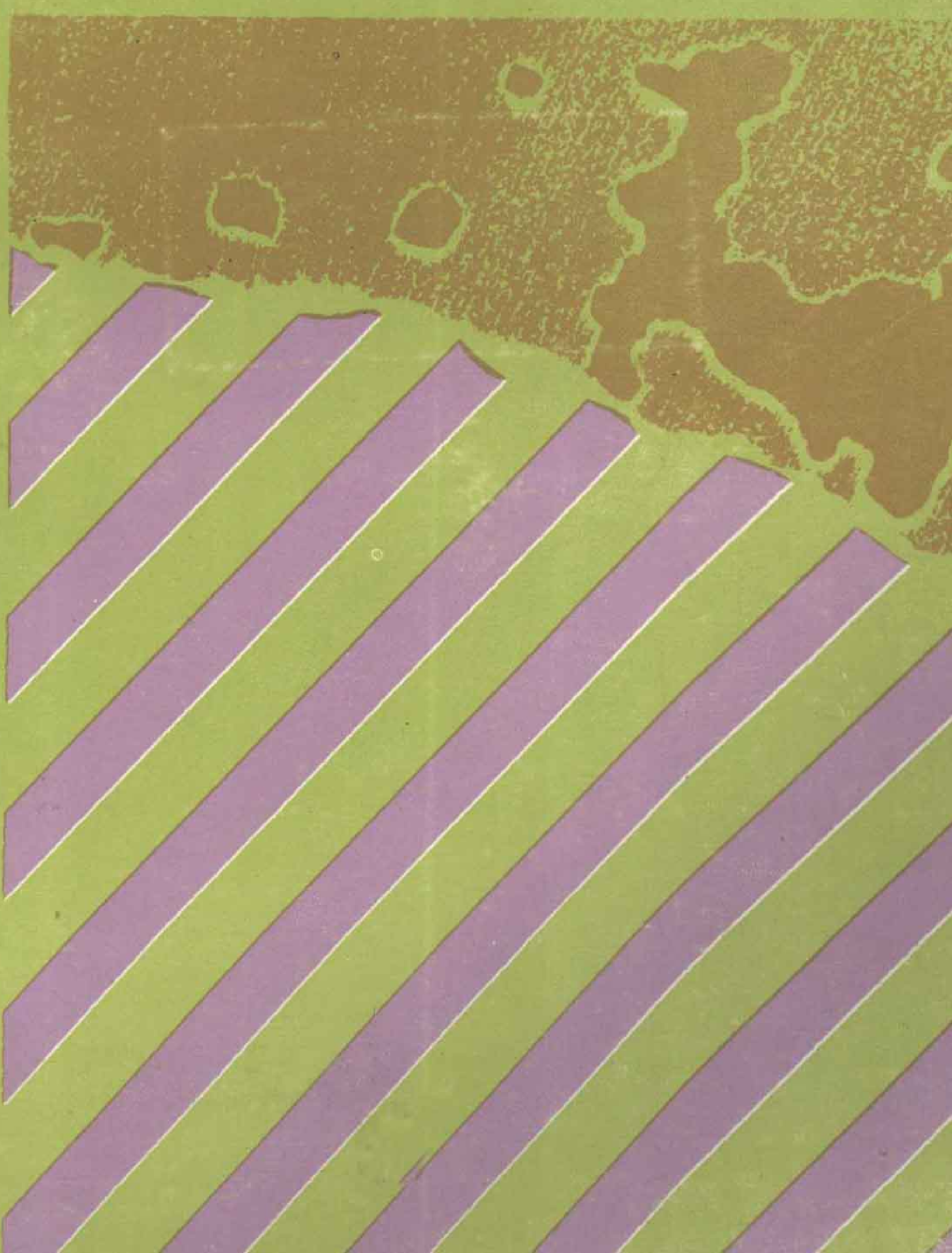
数学竞赛

MATHEMATICS OLYMPIAD

18



ISBN 7-5355-1854-0

9 787535 518545 >

ISBN 7－5355－1854－0／G·1849

定　价：2.70元

（湘）新登字005号

数学竞赛

湖南教育出版社 18

数 学 竞 赛(18)

本 社 编

责任编辑: 欧阳维诚

湖南教育出版社出版发行(东风路附1号)

湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷三厂印刷

850×1168毫米 32开 印张: 4.125 字数: 100000

1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷

ISBN7—5355—1854—0/G·1849

定价: 2.70元

目　录

初 数 论 丛

他 山 之 石

问 题 征 解

办好数学试验班

南京师范大学数学系　单　墫

1993年数学试验班最近开学.这届试验班由国家教委委托南京师范大学承办，地点设在南京外国语学校，在全国招收高二学生，学习时间为一年半.

今年下半年，受国家教委委托，清华大学暨附中、北京师范大学暨实验中学还将从初中招收学生，承办时间为三年的数学试验班.

办理科（数学、物理、化学）试验班，是为了向高等学校输送德智体全面发展、理科基础宽厚的优秀高中毕业生.

一方面搞好普及，实行义务教育，面向广大学生教学，另一方面，作为一个大国，必须培养一批水平较高的理工尖子，办好试验班.

国家教委从1988年开始办理科试验班，其中数学试验班已在1988、1989、1991年办过三届，取得很好的成绩，所有试验班的毕业生都升入重点高校，并在大学学习中名列前茅.

试验班的学生在数学竞赛中成绩突出，三届试验班共有11名学生分别参加89、90、92年国际数学竞赛，10名获得金牌，1名获得银牌，试验班保证了我国在国际数学竞赛中取得好成绩.

试验班与竞赛有密切关系，但应当指出试验班决不仅是为数学竞赛培养选手.竞赛的选手大多能成为优秀的理工人材（当然也需要自己的努力与适当的社会条件），但优秀的理工人材不一定是竞赛选手，后者不仅人数有很大限制，而且需要在限定时间内完成指定的题目，需要在心理上适应考试的环境与气氛，需要在考场上有较好的、甚至超水平的发挥.这些都不是优秀理工人

材必须具备的条件.

培养人材应当有各种途径，不能过分夸大竞赛的作用，使广大中学生拥挤在"华山一条路"上.河南的薛辉曾参加竞赛，只获得三等奖，但他高二就学完大学数学系课程，被上海华东师范大学直接录取为研究生.这是一个很好的例子.

举办三年制的数学试验班，在一定意义上，正是为了避免那种单纯追逐名次的竞赛，不是促进普及、促进广大同学学习的竞赛的"干扰"（一年半的试验班要准备十月份的全国高中竞赛与第二年初的冬令营，正常教学大受影响，进入高校后，所占优势不大）．学生可以集中精力学习，在数学、外语等方面达到大学二年级水平，并且采取学分制，经有关高校认可，能直接进入较高年级.

无论是"长班"（三年制)，还是"短班"（一年半)，都有助于探索优秀人材的成长与教育的规律，为准备成立中国理科学校奠定基础.

以往几届数学试验班有两点经验特别值得注意.

一是注意形成群体.同学们在一起交流，讨论，切磋，集思广益，共同提高.有了良好的"土壤"与环境，一定出人材."一支独秀"往往难以持久，封锁材料，不与他人交流，更难望有长足的进步.

二是注意培养科学道德.发挥民主，平等待人，坚持真理，决不固执错误，提倡争鸣，虚怀若谷.

今后我们将进一步发扬成绩，办好各种试验班.

下面是1993年数学试验班试题及解答.

试题（时间150分钟，每题20分，共五题)

1. 设 x、y 为正实数，并且 $x+2y=1$，求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的最小值.

2. 已知 α、β 为正数，并且 $\alpha+\beta\leqslant\pi$，求证

$$\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\sin^2\beta}\geqslant\frac{2}{\sin^2(\alpha+\beta)/2}$$

3．$\odot O$ 与 $\odot O_1$ 外切，等边三角形 ABC 内接于 $\odot O$，A_1、B_1、C_1 在 $\odot O_1$ 上，并且 AA_1、BB_1、CC_1 都与 $\odot O_1$ 相切．求证 AA_1、BB_1、CC_1 中有一个等于其他两个的和．

4．证明有无穷多对正整数 a、b，满足 $a\mid(b^2+1)$，$b\mid(a^2+1)$（$x\mid y$ 即 x 整除 y）．

5．(1) 9 块巧克力，每块至多分为两小块（不一定相等），能否均分给 4 名儿童？能否均分给 7 名儿童？

(2) m 块巧克力，每块至多分为两小块．如果能均分给 n 名儿童，求 m、n 应满足的充分必要条件．

解答:

1．本题是一道基础题，利用最简单的 Cauchy 不等式

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2 \tag{1}$$

得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=(x+2y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geqslant\left(\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}+\sqrt{2y\cdot\frac{1}{y}}\right)^2$$
$$=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}.$$

在 $x\div\frac{1}{x}=2y\div\frac{1}{y}$ 即 $x=\sqrt{2}y=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ 时，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 取得最小值 $3+2\sqrt{2}$．

注 Cauchy 不等式常起“去分母”的作用．

2．本题即证明 $1/\sin^2x$ 在 $(0,\pi)$ 内下凸，这可以用二阶导数证明，我们希望采用初等方法．不妨设 $\alpha\geqslant\beta$，原不等式即

$$\frac{1}{\sin^2\beta}-\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)/2}\geqslant\frac{1}{\sin^2(\alpha+\beta)/2}-\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

上式等价于

$$\frac{\sin(\alpha+3\beta)/2}{\sin^2\beta} \geqslant \frac{\sin(3\alpha+\beta)/2}{\sin^2\alpha} \tag{1}$$

因为 $\alpha+\beta\leqslant\pi$，所以 $\beta\leqslant\alpha\leqslant\pi-\beta$，$\sin\alpha>\sin\beta$. (1) 可由

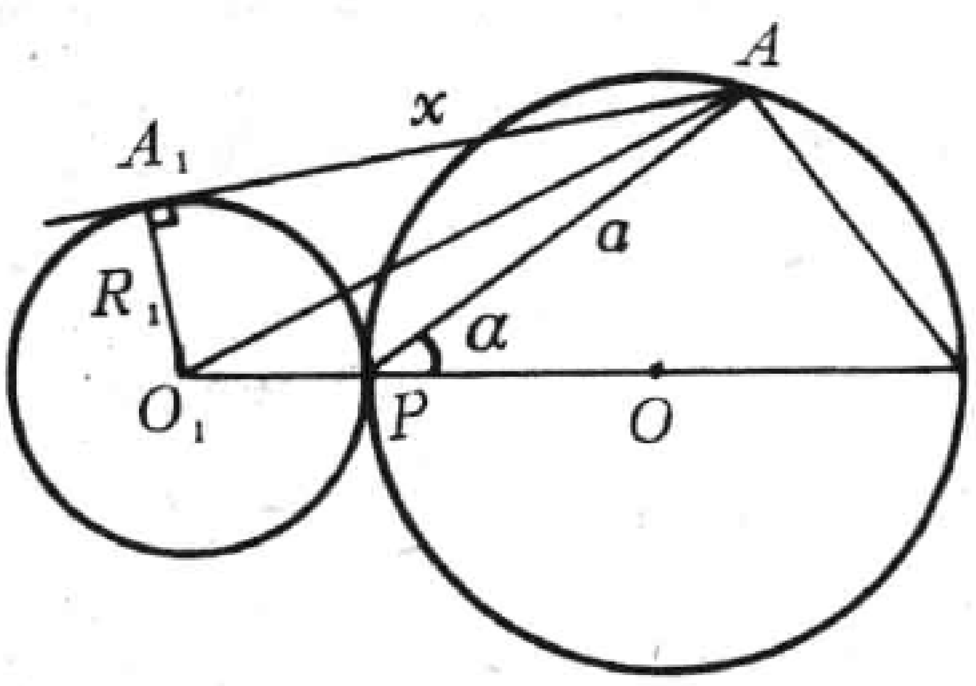
$$\sin(\alpha+3\beta)/2\cdot\sin\alpha\geqslant\sin(3\alpha+\beta)/2\cdot\sin\beta \tag{2}$$

推出，而 (2) 即 $\cos(3\beta-\alpha)/2\geqslant\cos(3\alpha-\beta)/2$. 由于

$\cos(3\beta-\alpha)/2-\cos(3\alpha-\beta)/2=2\sin(\alpha+\beta)/2\cdot\sin(\alpha-\beta)\geqslant0$,

所以 (2) 成立，从而原不等式成立.

3. 当 $\odot O_1$ 退化为 $\odot O$ 上一点 O_1 时，A_1、B_1、C_1 均与 O_1 重合，这是一个熟知的命题：设 O_1 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上，则 $O_1A=O_1B+O_1C$.



对于一般情形，设两圆的切点为 P，两圆半径分别为 R、R_1，$PA=a$，$AA_1=x$，则如图易知

$$x^2+R_1^2=O_1A^2=a^2+R_1^2+2aR_1\cos\alpha$$
$$=a^2+R_1^2+2aR_1(a/2R)$$

从而 $x=\sqrt{a^2+a^2\cdot(R_1/R)}=a\sqrt{1+(R_1/R)}$

类似地，BB_1、CC_1 分别为 PB、PC 的$\sqrt{1+(R_1/R)}$倍，于是由 $PA=PB+PC$ 即得结论.

4. 从最小的正整数开始，$1^2+1=2$，所以 1，2 就是一对 a、b.

由这对数再往前推，$2^2+1=5$，$5^2+1=2\times13$ 所以 2，5 也是一对 a、b.

继续下去，$13^2+1=5\times34$，所以 5，13 又是一对. 依此类推，可以看出求得的数

1，2，5，13，34，…

恰好是 Fibonacci 数列

$f_1=1$，$f_2=1$，$f_3=2$，$f_4=3$，$f_5=5$，$f_6=8$，$f_7=13$，…中的奇数项．于是猜测

$$f_{2n-1}\cdot f_{2n+3}=f_{2n+1}+1 \tag{3}$$

这不难用归纳法证明，于是 f_{2n-1}，f_{2n+1} 即为所求（$n=1, 2, \cdots$）．

注　本题的困难在于发现 a、b 是 Fibonacci 数列中的奇数项，而（3）的证明却是容易的．

5.（2）$n=1, 2, \cdots, m$ 或 $m+d$，其中 $d\mid m$.

充分性　先设 $n\leqslant m$. 将 m 块巧克力排成一列，可以看作 x 轴上的区间 $[0, 1]$，$[1, 2]$，…，$[m-1, m]$．用 $n-1$ 个分点（不包括 0 与 m）将 $[0, m]$ 分为 n 等份，每份为 $m/n\geqslant 1$，因此每个区间 $[0, 1]$，$[1, 2]$，…，$[m-1, m]$ 中至多一个分点，即每块巧克力至多被分为两小块．

在 $n=m+1$ 时，仍照上面的分法，每份 $m/n<1$，因此每个区间 $[0, 1]$，$[1, 2]$，…，$[m-1, m]$ 中至少有一个分点．由于分点共 $m(=n-1)$ 个，所以每个上述区间中恰有一个分点，即每块巧克力恰被分为两小块．

在 $n=m+d$，$d|m$ 而 $d>1$ 时，这时 $d|n$，故可考虑 d 组人，每一组 n/d 名儿童分 m/d 块巧克力，这就归结为刚刚讨论过的情况．

必要性　由于每块巧克力至多分为两小块，所以 $n\leqslant 2m$. 只需考虑 $m<n<2m$ 的情况，此时每份 $m/n\in(1/2, 1)$，于是每块巧克力必须分为两小块，一小块 $\geqslant 1/2$，另一小块 $<1/2$. 不妨设 $a_1=\cdots=a_1>a_2=\cdots>a_t=\cdots=a_t$ 为较大的块，$b_1=\cdots=b_1<b_2=\cdots<b_t=\cdots=b_t$ 为相应的小块．a_1 必须为 m/n，因为它不可能与其它的块组成小于 1 的 m/n；于是 $b_1=1-a_1=(n-m)/n=d/n(d=n-m)$.

a_2 必须与若干 b_1 搭配成一份，从而

$$b_2 = 1 - a_2 = 1 - (m/n - \text{若干 } b_1) \equiv 0 \pmod{d/n}$$

依此类推，a_i 必须与若干 b_1、b_2、…、b_{i-1} 搭配，从而 $b_i = 1 - a_i \equiv 0 \pmod{d/n}$. 直至 $b_t \equiv 0 \pmod{d/n}$. 并且若干 b_1、b_2、…、b_t 合成 m/n，所以

$$m/n \equiv 0 \pmod{d/n}$$

即 $d|m$，而 $n = m + d$

注 1 （1）不难，但想到一般的分法并不容易 . 这一般的分法，简单而自然 .（2）的充分性即由它得出 .

注 2 （2）的充分性似比必要性更难一些 .

第八届中国数学奥林匹克试题

湖南师范大学附中　冯跃峰

第一天（1993年1月7日　8:00—12:30）

1．设 n 是奇数，试证存在 $2n$ 个整数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n，使得对任意一个整数 k，$0<k<n$，下列 $3n$ 个数

$$a_i+a_{i+1},\ a_i+b_i,\ b_i+b_{i+k}$$

$$(1\leqslant i\leqslant n,\ a_{n+1}=a_1,\ b_{n+j}=b_j,\ 0<j<n)$$

被 $3n$ 除所得余数互不相同．

证　取 $a_i=3i+1$，$b_i=3i+2$．记整数 x 除以 $3n$ 所得的余数为 $\overline{x}$，我们证明：对 $1\leqslant i\leqslant n$，集合 $A=\{\overline{a_i+a_{i+1}}\}$，$B=\{\overline{a_i+b_i}\}$，$C=\{\overline{b_i+b_{i+k}}\}$ 包含 $3n$ 个不同的数．

$$\begin{aligned}a_i+a_{i+1}&=3i+1+3(i+1)+1\\&=6i+5\equiv 2\pmod 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_i+b_i&=(3i+1)+(3i+2)\\&=6i+3\equiv 0\pmod 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_i+b_{i+k}&=(3i+2)+3(i+k)+2\\&=6i+3k+4\equiv 1\pmod 3\end{aligned}$$

于是 $A\cap B=B\cap C=C\cap A=\phi$．

其次，如果存在 p、$q\in Z$，$(1\leqslant p<q\leqslant n)$，使 $6p+r\equiv 6q+r\pmod{3n}$ 对某个 $r\in Z$ 成立，那么 $2(p-q)\equiv 0\pmod n$．因 n 为奇数，$(2,n)=1$，所以 $p-q\equiv 0\pmod n$，矛盾．

于是，分别令 $r=3$，5，$3k+4$，即得$|A|=|B|=|C|=n$. 命题获证.

2. 给定 $k\in N$ 及实数 $a>0$，在下列条件下，$k_1+k_2+\cdots+k_r=k$，$k_i\in N$，$1\leqslant r\leqslant k$，

求 $a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}$ 的最大值.

解 令

$$f(r)=\max(a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r})$$

其中 $k_1+k_2+\cdots+k_r=k$，$k_i\in N$，$1\leqslant i\leqslant r$.

本题实际上是求 $f(r)$ 在 $1\leqslant r\leqslant k$ 时的最大值. 为此，注意到对任何 s、$t\in N$，有

$$a^{s+t-1}-a^s-a^t+a=a(a^{s-1}-1)(a^{t-1}-1)\geqslant 0$$

即

$$a^s+a^t\leqslant a^{s+t-1}+a.$$

于是，反复利用此不等式，有

$$\begin{aligned}&a^{k_1}+a^{k_2}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant a+a^{k_1+k_2-1}+a^{k_3}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant 2a+a^{k_1+k_2+k_3-2}+a^{k_4}+\cdots+a^{k_r}\\&\leqslant\cdots\cdots\\&\leqslant(r-1)a+a^{k-r+1}\end{aligned}$$

其中等号在 $k_1=k_2=\cdots=k_{r-1}=1$，$k_r=k-r+1$ 时成立. 所以

$$\max_{1\leqslant r\leqslant k}f(r)=\max_{1\leqslant r\leqslant k}[(r-1)a+a^{k-r+1}].$$

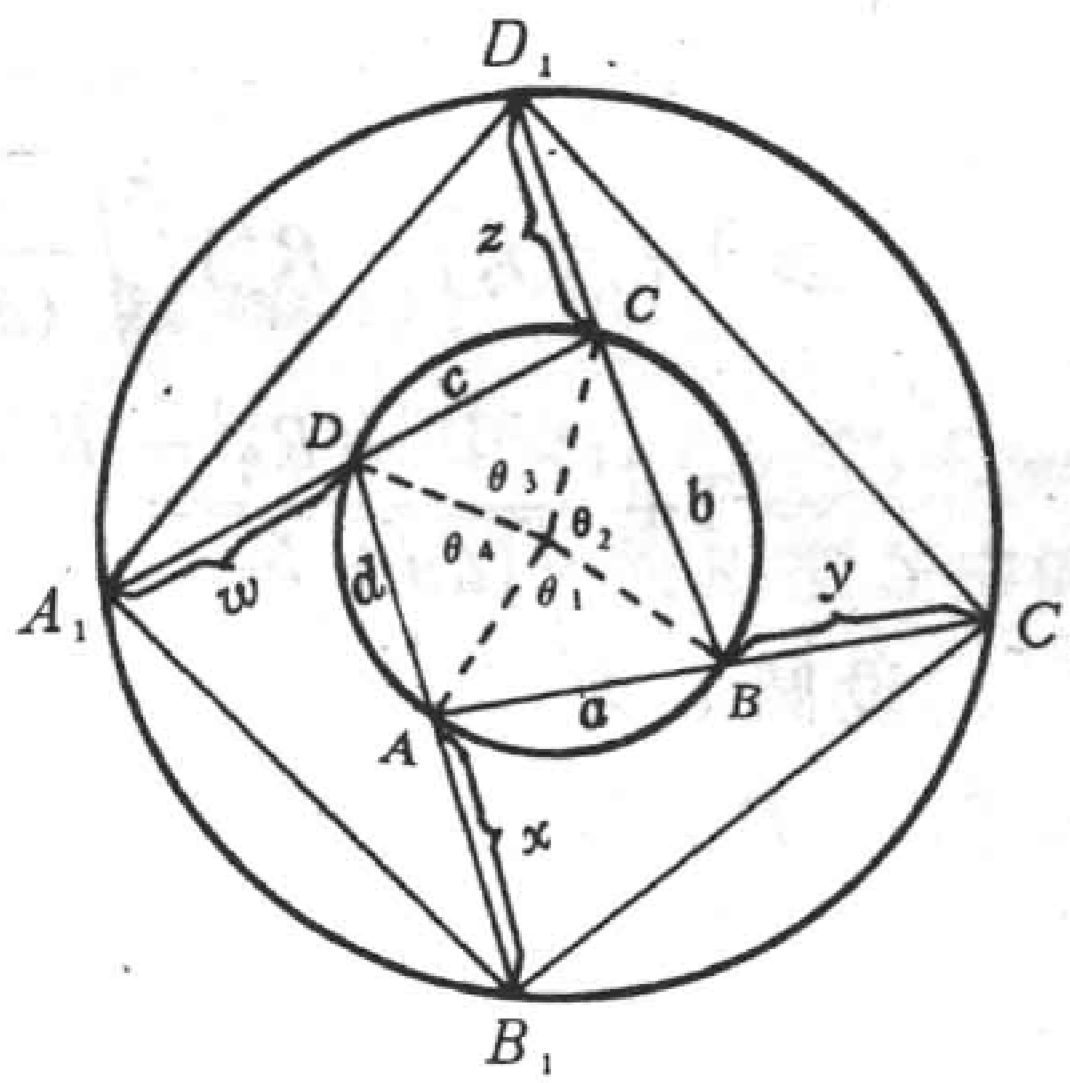
由于 $g(x)=a(x-1)+a^{k-x+1}$ 是凸函数，所以

$$\max_{1\leqslant r\leqslant k}f(r)=\max\{g(1),g(k)\}=\max\{a^k,\ ka\}.$$

3. 设圆 K 和 K_1 同心，它们的半径分别为 R 和 R_1，$R_1>R$. 四边形 $ABCD$ 内接于圆 K，四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 内接于圆 K_1. 点 A_1、B_1、C_1、D_1 分别在射线 CD，DA，AB，BC

上．求证：

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} \geqslant \frac{R_1^2}{R^2}$$



证 如右图，记 $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, $AB_1=x$, $BC_1=y$, $CD_1=z$, $DA_1=w$, $S_{A_1B_1C_1D_1}=S'$, $S_{ABCD}=S$, $S_{AB_1C_1}=S_1$ $S_{BC_1D_1}=S_2$, $S_{CD_1A_1}=S_3$, $S_{DA_1B_1}=S_4$ 那么

$$\frac{S'}{S}=1+\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{S}.$$

因为$\dfrac{S_1}{S}=\dfrac{2S_1}{2(S_{ABD}+S_{BCD})}$

$$=\frac{x(a+y)\sin\angle B_1AC_1}{ad\sin(\pi-\angle B_1AC_1)+bc\sin\angle B_1AC_1}$$

$$=\frac{x(a+y)}{ad+bc},$$

同理，得

$$\frac{S_2}{S}=\frac{y(b+z)}{ab+cd},\ \frac{S_3}{S}=\frac{z(c+w)}{bc+ad},\ \frac{S_4}{S}=\frac{w(d+x)}{ab+cd}$$

所以 $$\frac{S'}{S}=1+\frac{x(a+y)}{ad+bc}+\frac{y(b+z)}{ab+cd}+\frac{z(c+w)}{ad+bc}+\frac{w(d+x)}{ab+cd}$$

在圆 K 中利用圆幂定理，有

$$x(d+x)=(R_1+R)(R_1-R)=R_1^2-R^2.$$

同理，$y(a+y)=z(b+z)=w(c+w)=R_1^2-R^2$，将它们代入上式，得

$$\frac{S'}{S}=1+(R_1^2-R^2)\left[\frac{x}{y(ad+bc)}+\frac{y}{z(ab+cd)}\right.$$

$$\left.+\frac{z}{w(bc+ad)}+\frac{w}{x(ab+cd)}\right]$$

$$\geqslant 1+4(R_1^2-R^2)\sqrt[4]{\frac{1}{(ad+bc)^2\cdot(ab+cd)^2}}$$

$$=1+\frac{4(R_1^2-R^2)}{\sqrt{(ad+bc)(ab+Cd)}}.$$

设圆心为 O，令 $\angle AOB=\theta_1$，$\angle BOC=\theta_2$，$\angle COD=\theta_3$，$\angle DOA=\theta_4$，则

$$a=2R\sin\frac{\theta_1}{2},b=2R\sin\frac{\theta_2}{2},c=2R\sin\frac{\theta_3}{2},d=2R\sin\frac{\theta_4}{2}.$$

$$(ad+bc)(ab+cd)=16R^4\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\cdot\right.$$

$$\left.\sin\frac{\theta_3}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\right)$$

因为 $\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}=\pi-\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}$，

所以 $\cos\dfrac{\theta_1+\theta_4}{2}+\cos\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}=0$.

$$0<\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}+\sin\frac{\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_3}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_4}{2}-\cos\frac{\theta_1+\theta_4}{2}+\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\right.$$

$$\left.-\cos\frac{\theta_2+\theta_3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_4}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta_2-\theta_3}{2}\leqslant 1.$$

同理，$0<\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}+\sin\frac{\theta_3}{2}\sin\frac{\theta_4}{2}\leqslant 1$.

所以，$(ad+bc)(ab+cd)\leqslant 16R^4$.

故 $\frac{S'}{S}\geqslant 1+\frac{4(R_1^2-R^2)}{\sqrt{16R^4}}=\frac{R_1^2}{R^2}$.

第二天 （1993 年 1 月 8 日 8：00—12：30）

4．给定集合 $S=\{z_1, z_2, \cdots, z_{1993}\}$，其中 $z_1, z_2, \cdots, z_{1993}$ 是非零复数（可看作平面上的非零向量）．求证：可以把 S 中的元素分成若干组，使得

(i) S 中的每个元素属于且仅属于其中一组；

(ii) 每一组中任一复数与该组所有复数之和的夹角不超过 $90°$；

(iii) 将任意两组中的复数分别求和，所得和数之间的夹角大于 $90°$．

证 对 S 的任一非空子集 X，我们称 X 中各复数的和 $d(X)$ 为 X 的度．设 S 的子集中度的模最大的一个为 S_1.

(1) 若 $S_1=S$，则结论成立，实际上，(i)，(iii) 显然满足．其次，有 $d(S_1)\neq 0$. 否则，$|d(\{z_1\})|=|z_1|>0=|d(S_1)|$，矛盾．现令 $a_1=d(S_1)$，如果存在 $z\in S_1$，使 a_1 与 z 的夹角大于 $90°$，则 a_1 与 $-z$ 的夹角小于 $90°$．由平行四边形法则，有 $|a_1+(-z)|>|a_1|$，即 $|d(s_1\setminus\{z\})|>|d(s_1)|$，矛盾．

(2) 若 $S_1\subset S$，那么 $S\setminus S_1\neq\phi$. 设 $S\setminus S_1$ 的非空子集中度的模最大的一个为 S_2．由上可知，S_2 满足 (ii)．下证 S_1, S_2 满足 (iii)．即证：$d(S_1)\widehat{\ } d(S_2)>90°$．否则，$|d(S_1)|<|d(S_1)+d(S_2)|$（大边对大角）．注意到 $d(S_1\cup S_2)=d(S_1)+d(S_2)$，所以 $|d(S_1)|<|d(s_1\cup S_2)|$，与 S_1 的定义矛盾．