考试虫

2006年滚动修订版

洞穿考研数学（理工类

考试虫学习体系

主编：牟俊霖　李青吉　　审订：赵建中

这是最贴近考生需要的权威考研数学辅导书：

- 穷尽历年考研数学真题（1979～2005）的复杂变化，洞穿考研数学的命题规律，并建立与之相应的题型框架，将变幻莫测的脑力劳动转变成记忆性体力劳动。取代有限的、孤立的思维定势，实现无障碍解题。
- 全新地、更合理地安排章节，从而增强大纲各考点间的内在联系，便于同学们通过对比分析达到融会贯通。
- 精心归纳考研数学所需的重要公式与基本定理，帮助同学们全面系统地查阅、记忆、理解、掌握庞杂而零散的公式与定理。
- 总结多种实用、快捷的并具有普遍性的简便运算方法，大大提高解题速度和准确性，使同学们在考场上从容解题。

国内第一本主编与读者随时交流的专著！

本书主编郑重承诺：有题必答，有信必复！

www.sinoexam.com数学信箱

航空工业出版社

洞穿考研数学（理工类）

主编：牟俊霖　李青吉
审订：赵建中

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

洞穿考研数学.理工类/牟俊霖等主编. —北京:航空工业出版社,2003.9(2005.3重印)

ISBN 7-80183-142-X

Ⅰ.洞... Ⅱ.牟... Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第014751号

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

北京威远印刷厂 全国各地新华书店经售

2003年8月第1版 2005年3月第4次印刷

开本:787×1092 1/16 印张:36.75 字数:600千字

印数:13001~16000 定价:44.00元

2006 版修订说明

深谙历年考研真题以及在此基础上建立的题型框架，必然能够洞穿考研试题的命题规律，使同学们在备考过程中目标明确、思路清晰、信心十足，从而确保考研数学取得好成绩. 2005 年的试题，都能在本书中找到与之类似的题型和例题，甚至有的题完全一样. 我们在本书第四篇 2005 年考研试题的难点解析中，给出了详尽的评析比较. 请同学们参看本书第四篇的详细内容.

本书出版后，收到了许多同学的热忱来信，他们对本书提出了许多有益的修改意见和建议，在此深表谢意. 结合多方意见，本书 2006 版做了如下改进和完善：

1. 根据教育部考试中心公布的最新考研数学大纲的要求，对新增考点的内容予以充实，对大纲不再做要求的知识点予以删除.

2. 近年考研试题中的填空题、选择题加强了对基本概念和基本定理的考查，我们对本书的基础知识部分予以充实和完善，并重点讲解了同学们难于理解和掌握但又常考的概念、定理.

3. 删除了一些简单、非典型的习题与答案，使本书更为精炼、适用.

4. 在典型例题后，我们补充了对该类题的总体评注与求解难点，以利于同学们更好地理解和掌握解题的思路与方法.

5. 鉴于目前数学书，特别是考研数学书笔误多的现状，我们对文字和内容进行了逐字逐行的审校，力争做到无笔误出版.

对于您在使用本书时所遇到的任何困惑或不解之处，我们随时在 **www.sinoexam.com** 的数学信箱（或直接发邮件至：**eseng@126.com**）尽力为大家排忧解难. 同学们，从你使用这本书时起，你就是我们的朋友了.

同学们的问题常涉及数学公式与符号，大家可用 Word 软件里的公式编辑器，尽管使用有些复杂，但这样能使我们更好地交流. 同学们也可直接用文字来叙述，只要把意思表达清楚即可.

编　者

2005 年 3 月

前　言

当你决定购买本书的时候,你应当考虑:你从本书中得到的收益和你应当支付的成本.重要的是你的收益能否大于你的成本.一般而言,读书的时间成本远远地大于货币成本.特别是在准备考研的过程中,时间是最宝贵的,因此,既节省时间又能提高成绩是问题的关键.以下是对本书特点的分析,这将有助于你做出决策.

一、权威性

本书80%的题目选自20多年来(1979~2005)的考研真题.

这20多年的2000多道考题构成了一本最权威、最全面的考研复习资料.我们认真研究了历年考研试题的特点,发现两条重要规律.

第一:考研大纲上所有考点都已命制过考题,而且**考研试题总是不断重复出现**,有的试题几乎就是重复前几年的试题.

第二:**理工类和经济类试题总是交替出考题**,我们每年都能发现前几年经济类出过的考题稍作变换就出现在理工类试卷中.

其原因在于:数学考研大纲上规定的考点是有限的,经过近二十年的考研命题,出现过的考题已经涵盖了所有的考点,再出考题时重复是不可避免的.请同学们参看**“部分真题再现对应情况”**中所列举的典型的考题重复的情况.

二、系统性与独特性

对于数学来讲,巧力胜过蛮劲.我们苦心研究,**总结出这个时代的众多数学精英们的智慧,以弥补个体思维的局限**.其目的只有一个,就是让同学们轻松获取考研数学过关捷径,改变考生考试命运.本书独到之处在于建立了一个以大纲各考点内在联系为基础的活的题型框架.为了让考生掌握这个**全新的题型框架**,我们从以下四方面增强了它的内在联系:

1.**全新而合理的章节安排**.我们摒弃了按教材章节安排内容顺序的方法,而是把相关章节进行整合,让读者通过对比分析来达到对知识的融会贯通.例如,按教材顺序,在一元函数导数和二元函数偏导数中间夹着一章不定积分,同学们很难看出一元、二元函数微分的内在联系,其实二者不论从解题方法和思路上都很相似,所以我们把这两章归纳在一起.又如,线性代数中的证明题分散在行列式、矩阵、向量、线性方程组等章节当中,同学们很难从总体上把握,我们把它们综合归纳成一章——线性代数中的证明题.具体的章节安排及其理由,请同学们参照**“本书章节安排”**.

2.**在每一章每一节中,我们把解题方法类似的例题归为一种题型,把每一节归纳成几种或十几种题型**.这样做的优点在于:每一节题型数目较少,而且各题型之间有很强的内在联系,相对零散的几十个例题而言,更便于掌握.同时,由于每一种题型下设几个类似小题,同学们可以从不同的角度分析掌握这种题型,从而把握各种题型的实质.请同学们参见本书中“目录”各章节下具体题型的划分.

3.**解题方法的讲解,一般先讲基本方法,后讲特殊方法,同时归纳出一系列解题的基本步骤**,以便读者在解题的时候有一个清晰的思路.这些解题的基本步骤能帮助你尽快地找到解题思路,提高解题效率.例如,求极限时,应先把非标准题型转换为标准题型,这要用到对数恒等式,或用换元法、通分法,然后想办法用洛必达法则,同时要注意能求出极限的因子应首先求出等.

4.**在书的前面,我们总结了基本公式与重要定理、基本题型与解题方法两个重要附录,这是本书的精华之所在**.许多考生在临考前,三角函数公式都记不住,许多复杂的公式记不牢,但要找

一个公式却要翻看好几本书，极为不便；同时，对各种题型没有一个清晰的、全面的认识，想拿起书来复习又没有时间，不复习又不放心.为了解决考生这方面的困难，我们精心准备了这两个重要附录.这样学习数学在某种程度上就转化为记忆性的工作，每天只需花十分钟就可以把它们复习一遍，从而稳定心情，避免不必要的焦虑和担心，这是至关重要的！

最后，考生在练习和考试的时候，首先应判断题目属于哪一章哪一节的何种题型，然后确定这种题型的基本解题方法，按照这种循序渐进的思维方法解题，会减少解题过程中的盲目性，提高解题的效率.相反，如果只记住了几种缺乏内在联系的思维定势，一遇到难题就不知道选用何种方法，而且有限的几种思维定势是不足以应对灵活多变的考研试题.我们相信，**建立在考研大纲各知识点内在联系基础上的题型框架，可以确保考生取得好成绩**.

三、简捷性

1.基础知识的总结简明扼要，尽力避免深奥的数学定义.

对一些较难的概念用简单的例子加以说明，同时指出其实质.例如，在讲解随机变量、随机变量的分布函数与分布密度、随机变量的数学期望与方差这些抽象的概念时，我们用一些十分简单的例子来说明这些概念，并指出数学期望的实质就是平均数，随机变量的概率就是其权数等.

2.本书中归纳了许多适用、快捷的简便方法.

如果读者能较好地运用它们，将会提高你的解题速度和准确性，进而在考试中为你争取到更多的时间.这些方法十分简单，你在熟悉基础知识后就可熟练掌握(解题方法参见具体章节)，现举例如下：

(1)在求$(1+0)^{\infty}$型极限的时候，只须求“$0\cdot\infty$”的极限，于是利用观察法就可得到答案.

例如，(87.3)求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^{x})^{1/x}$，用观察法可得出答案 e.

(2)在二阶常系数微分方程特解的求解过程中，引入微分算子法，将大大节约解题时间和提高准确率.

例如，(92.2)求微分方程 $y''+2y'-3y=e^{-3x}$，用此方法很快就能得出其特解为 $-(\frac{x^2}{2}+x)e^{x}$.

(3)关于高等数学的存在性证明题，我们归纳出：凡是可分离变量的用凑微分的方法解；其余的全部用解微分方程的方法求解.

(4)在判定级数敛散性时，用等价无穷小代换法求解.

例如，(95.1)设 $u_n=(-1)^n\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$，判断级数$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n{}^2$ 的敛散性(本题原为选择题).

由于 $u_n{}^2=\ln^2(1+\frac{1}{\sqrt{n}})\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，所以可判断$\sum\limits_{n=1}^{n}u_n{}^2$ 发散.

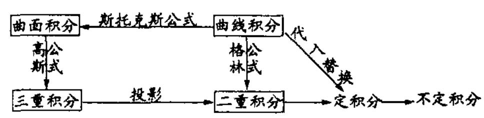
(5)**用观察法求解线性方程组的基础解系**.我们极力向你推荐这种快捷而准确的解题方法.参见线性代数第一章第四节的基础知识讲解.

四、鉴于同类辅导书没有给出解题的详尽过程，给同学们的学习带来不便，本书所有的习题都给出了清晰、详尽的答案.

请记住：答题的最高境界是再现！我只要拿几道过去考过的题考考你，请你给我讲讲其中蕴含的奥妙，我就能知道你数学能考多少分.

编者于北京

本书章节安排

第一篇 高等数学	第一章	**极限与级数**.极限与级数联系很紧密.例如:用幂级数展开式求极限是常用方法;求函数项级数收敛域就是求$\sqrt[n]{\mid u_n(x)\mid}$或$\left\|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right\|$的极限;极限中的等价无穷小代换还可以用于判定级数敛散性.
	第二章	**一元、二元函数的微分及其运用**.本章把一元函数的导数、二元函数的偏导数与全微分,以及用导数法作图,证明不等式,求函数最值等相关内容归纳在一起.
	第三章	**不定积分、定积分、二重积分**.二重积分通过累次积分化为定积分,而求解定积分首先要求出不定积分.
	第四章	**空间解析几何、三重积分、曲线与曲面积分**.没有空间解析几何的基本知识,如投影,向量等,很难求解三重积分、曲线与曲面积分;我们还可以从下图中看到各种积分之间的相互转换关系: 
	第五章	**积分的几何运用与物理运用**.这些知识点分散在各章节,读者难以全面的掌握,所以我们综合归纳为一章.
	第六章	**常微分方程及其应用**.
	第七章	**高等数学中的证明题**.本章归纳了高等数学中证明题的常用方法.例如:用泰勒公式展开式证明有关题型,用费尔马定理证明$f'(\xi)=0$,用作辅助函数法证明存在性问题等.
	第八章	**高等数学基本解题思想**.任何一道高等数学的难题,都可从以下四种思想方法中找到解答的途径,即导数与微分的转化、分析法、综合法、换元法
第二篇 线性代数	第一章	**基础知识与基本题型**.本章按行列式、矩阵、向量、线性方程组、相似矩阵与二次型分为五节,逐一讲解了线性代数中的基础知识与基本题型,这主要应对考研题中的选择和填空题.
	第二章	**线性代数中的解答题**.求向量组的线性表示、求解线性方程组以及矩阵相似对角化等问题的方法十分固定,要么对矩阵作初等变换,要么求行列式,然后讨论参数取值,即可求解.
	第三章	**线性代数中的证明题**.本章把线性代数中分散在各章节的证明题归纳在一起,总结出九种常用证明题题型.
第三篇 概率论与数理统计初步	第一章	**随机事件及其概率(古典概率)**.
	第二章	**随机变量的分布与数字特征**.求随机变量的分布与数字特征都要用到高等数学中微积分的知识.例如:二维随机变量的联合分布和数字特征要用二重积分求解;已知分布函数求分布密度要求导数.而且求解分布是求解数字特征的基础.
	第三章	**大数定律、中心极限定理与数理统计**.中心极限定理是数理统计中推断统计分布的基础,而推断统计分布又是数理统计中区间估计和假设性检验的基础,所以应把这三部分有机结合起来.

重要公式与基本定理

三角函数公式

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos2\alpha}{2}$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$ $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

一、重要极限与等价无穷小代换(未作特别说明,则 $x \to 0$)

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$; 2. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x = e$;

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{a^x} = \lim\limits_{x\to\infty}x^n a^{-x} = 0(a>1)$; 4. $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x = 0 \quad (\alpha>0)$.

5. $\sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim (e^x-1) \sim x$;

6. $1-\cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$; 7. $a^x - 1 \sim x\ln a$; 8. $(1+\alpha x)^\beta - 1 \sim \alpha\beta x$;

二、常用幂级数展开式

1. $\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots,(-1<x<1)$

2. $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n,(-1<x<1)$

3. $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} = 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

4. $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

5. $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!} = 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$

6. $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} = x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\cdots,(-1<x\leqslant1)$

7. $(1+x)^a = 1+ax+\dfrac{a(a-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}x^n+\cdots,(-1<x<1)$

8. $\tan x = x+\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{17}{315}x^7+\cdots,(-\dfrac{\pi}{2}<x<+\dfrac{\pi}{2})$

9. $\arcsin x = x+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1\times3}{2\times4}\dfrac{1}{5}x^5\cdots,(|x|<1)$

10. $\arctan x = x-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{5}x^5\cdots,(|x|<1)$

三、Fourier 级数

区间	展开式与和函数
$[a,b]$	$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x+b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x\right)=S(x)$,其中 $a_n=\dfrac{1}{l}\int_a^b f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,(n=0,1,2,\cdots)$ $b_n=\dfrac{1}{l}\int_a^b f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x,(n=1,2,\cdots),l=\dfrac{b-a}{2}$ $S(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b)\text{为}f(x)\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)], & x\in(a,b)\text{为}f(x)\text{的第一类间断点}\\ \dfrac{1}{2}[f(a^+)+f(b^-)], & x=a\text{或}b\end{cases}$
$[0,l]$ (正弦展开)	$f(x)\sim\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x=S(x)$ 其中 $b_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$ $S(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(1,l)\text{为}f\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)], & x\in(0,l)\text{为}f\text{的第一类间断点}\\ 0, & x=0\text{或}l\end{cases}$
$[0,l]$ (余弦展开)	$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x=S(x)$ 其中 $a_n=\dfrac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2\cdots)$ $S(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(0,l)\text{为}f\text{的连续点}\\ \dfrac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)], & x\in(0,l)\text{为}f\text{的第一类间断点}\\ f(0^+), & x=0\\ f(l^-), & x=l\end{cases}$

四、导数公式

$$(x^a)'=ax^{a-1};\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

$$(\sin x)'=\cos x;(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)'=-\sin x;(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x};(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x;(a^x)'=a^x\ln a(a>0)$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x};(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}(0<a\neq 1)$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-(\arccos x)'$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=-(\operatorname{arccot} x)'$$

五、高阶导数公式

1. $(e^{ax+b})^{(n)} = a^n e^{ax+b}$

2. $(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

3. $(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos(ax+b+\frac{n\pi}{2})$

4. $((ax+b)^{\beta})^{(n)} = a^n\beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)(ax+b)^{\beta-n}$

5. $(\frac{1}{ax+b})^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$

6. $(\ln(ax+b))^{(n)} = (-1)^{n-1}a^n(n-1)!\frac{1}{(ax+b)^n}$

7. $u(x),v(x)$ 均 n 阶可导,则 $(uv)^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}$,其中 $u^{(0)} = u, v^{(0)} = v$

六、积分公式

$\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C(a \neq -1)$ $\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $\quad \int \frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C(0 < a \neq 1)$ $\quad \int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\quad \int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$ $\quad \int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$

$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C$ $\quad \int \cot x dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$ $\quad \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln|\tan x + \sec x| + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\cot x - \csc x| + C$

$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$ $\quad \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$

$\int \ln x dx = x(\ln x - 1) + C$ $\quad \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ $\quad \int_0^{\pi/2} f(\sin x, \cos x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x, \sin x)dx$

$\int_0^{\pi} f(\sin x)dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ $\quad \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \begin{cases} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & n = 2m, m = 1,2,\cdots \\ \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n = 2m+1, m = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

七、向量运算

1. 方向余弦

$a = xi + yj + zk = (x, y, z)$ 的方向余弦：

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

2. 向量运算

设 $a = \{x_1, y_1, z_1\}, b = \{x_2, y_2, z_2\}$，则

$a + b = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2\}$； $\lambda a = \{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$；

$a \cdot b = |a||b|\cos(a, b) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$（数量积）；

$a \cdot b = b \cdot a; (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c;\quad (\lambda a) \cdot b = \lambda(a \cdot b)$

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \text{（向量积）}$$

$a \times b = -b \times a;\quad (\lambda a) \times b = \lambda(a \times b);\quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

$$[a\,b\,c] = (a \times b) \cdot c = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \text{（混合积）}$$

$[a\,b\,c] = [b\,c\,a] = [c\,a\,b];\quad [a\,a\,b] = 0;\quad [a\,b\,c] = -[b\,c\,a]$，

$[\lambda a\,b\,c] = \lambda[a\,b\,c];\quad [(a_1 + a_2)\,b\,c] = [a_1\,b\,c] + [a_2\,b\,c]$

八、空间解析几何

1. 空间直线方程

一般式：$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases}$	两点式：$\frac{x-x_0}{x_1-x_0} = \frac{y-y_0}{y_1-y_0} = \frac{z-z_0}{z_1-z_0}$
点向式：$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$；	参数式：$x = x_0 + tl, y = y_0 + tm, z = z_0 + tn$

2. 平面方程

一般式：$Ax + By + Cz + D = 0$；	点法式：$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$
三点式：$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix} = 0$；	截距式：$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

3. 距离公式

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 与点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离

$$d = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到直线 $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 的距离，$d = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \times \tau|}{|\tau|}, \tau = \{l, m, n\}$.

点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离，$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

4. 二次曲面

曲面名称	方　　程	曲面名称	方　　程
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	旋转抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z(p>0)$
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	双曲抛物面	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(q,p>0)$
单叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$
二次锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	抛物柱面	$\frac{x^2}{2p}=y(p>0)$

九、多元函数积分基本公式

1. 二重积分

若 $D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)\}$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$.

若 $D=\{(x,y):c\leqslant y\leqslant \mathrm{d},\varphi_1(y)\leqslant x\leqslant\varphi_2(y)\}$,则$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$;

$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

2. 三重积分

若 $\Omega=\{(x,y,z):\varphi_1(x,y)\leqslant z\leqslant\varphi_2(x,y),(x,y)\in D\}$,则

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

若 $\Omega=\{(x,y,z):a\leqslant z\leqslant b,(x,y)\in D_z\}$,则

$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D_z 为 Ω 的截面(平行于 xy 平面).

3. Green 公式.$\oint\limits_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D(Q_x-P_y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,($L$ 为 D 的正向边界).

4. Gauss 公式.$\oiint\limits_\Sigma P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_\Omega(P_x+Q_y+R_z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$($\sum$ 是 Ω 的外表面).

5. 斯托克斯公式.$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_\Sigma\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$,其中曲线 L 的方向与曲面 $\sum$ 所取侧的法线方向满足右手法则,即用右手四指表示 L 的方向,则拇指的指向就是曲面 $\sum$ 所取侧的法线方向.

6. 弧元.$\mathrm{d}S=\sqrt{\mathrm{d}^2x+\mathrm{d}^2y}=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\,\mathrm{d}t=\sqrt{1+y'^2_x}\,\mathrm{d}x=\sqrt{r^2+r'^2_\theta}\,\mathrm{d}\theta$.

面积元.$\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta,\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

体积元.$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$,$(r,\theta,z)$ 与 (ρ,φ,θ) 分别为柱面坐标与球面坐标.

十、行列式

1. 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

2. 与矩阵有关的公式(以下 A,B 为 n 阶方阵)

$|A^{-1}| = |A|^{-1}$; $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$, $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值.

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \begin{turn}{0}\iddots\end{turn} & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$$

$|kA| = k^n |A|$;　　$|A^*| = |A|^{n-1}$.

$|AB| = |A||B| = |BA|$,　　$|AB| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$ 或 $|B| = 0$.

设 C,D 分别为 m 阶, n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix} C & * \\ O & D \end{vmatrix} = |C||D|; \begin{vmatrix} C & O \\ * & D \end{vmatrix} = |C||D|; \begin{vmatrix} O & D \\ C & O \end{vmatrix} = (-1)^{m \cdot n} |C||D|.$$

十一、矩阵的运算公式

1. 几种特殊矩阵及其性质

(1) 正交矩阵. $A^TA = AA^T = E$,则

①$A^T = A^{-1}$;② $|A| = \pm 1$;③A,B 为正交矩阵 $\Rightarrow A^{-1}, B^{-1}, AB$ 为正交矩阵

(2) 两个矩阵相似($A \sim B$) 的性质

①$A^T \sim B^T$　　②$A^{-1} \sim B^{-1}$　　③$A^k \sim B^k$, k 为大于 0 的整数.

④ $|\lambda E - A| \sim |\lambda E - B|$,从而 A,B 有相同的特征值.

⑤ $|A| = |B|$　　⑥$R(A) = R(B)$

(3) 正定矩阵. A 为一 n 阶实对称矩阵,对任一 n 维非零向量 x 恒有 $x^TAx > 0$.

①A 为正定矩阵, $kA(k > 0)$, A^T, A^{-1}, A^* 也为正定矩阵.

②A 为正定矩阵,则 $|A| > 0$,从而 A 可逆.

③A 为正定矩阵, A 的主对角线上的元素 $a_{ii} > 0, i = 1,2,\cdots,n$.

(4) 等价矩阵. 矩阵 A 经过有限次初等变换化为矩阵 B,则 A 与 B 等价,记为 $A \cong B$. $A \cong B \Leftrightarrow R(A) = R(B) \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P,Q,使 $PAQ = B$.

(5) 合同矩阵. A,B 都是 n 阶矩阵,存在可逆矩阵 C,使 $C^TAC = B$,则 A 与 B 合同,记为 $A \simeq B$. 若 $A \simeq B$,则必有 $A \cong B$,从而 $R(A) = R(B)$.

2. 逆矩阵

$(A^{-1})^{-1} = A$; $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$; $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$; $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{ss}^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$$

3. 伴随矩阵(A,B 为 n 阶方阵)

$A^*A = AA^* = |A|I$; $\quad A^* = |A|A^{-1}$; $\quad (kA)^* = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$

$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$; $\quad (A^*)^{-1} = \frac{A}{|A|}$; $\quad (A^*)^* = |A|^{n-2}A(n \geqslant 2)$

$(A^T)^* = (A^*)^T$; $\quad (AB)^* = B^*A^*$

4. 矩阵的秩

$r(A) = r(A^T)$, $\quad r(A \pm B) \leqslant r(A) + r(B)$, $\quad r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$

若 $A_{m\times n}, B_{n\times s}$,则 $r(A) + r(B) - n \leqslant r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.

若 $AB = 0$,则 $r(A) + r(B) \leqslant n$.

十二、向量空间

1. $(\alpha,\alpha) \geqslant 0$; $\quad (\alpha,\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$; $\quad (\alpha,\beta) = (\beta,\alpha)$

$(k_1\alpha + k_2\beta, \gamma) = k_1(\alpha,\gamma) + k_2(\beta,\gamma)$

$|(\alpha,\beta)| \leqslant |\alpha||\beta|$,($|\alpha|$ 表示 α 的长度)

$(\alpha,\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha$ 与 β 正交

2. Schmidt 正交化方法.设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,令 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1, \cdots$,

$\beta_n = a_n - \frac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 - \cdots - \frac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}$,再令 $\xi_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|}, i = 1,2,\cdots,n$,

则 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为标准正交向量组.

十三、常用概率公式

1. 条件概率.$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$,其中 A,B 为随机事件,$P(A) > 0$.

2. 乘法公式.$P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$,其中 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为随机事件,$P(A_1\cdots A_n) \neq 0$.

3. 全概率公式.$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$,其中 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 为样本空间 Ω 的一个完全事件组,$A_iA_j = \varnothing, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, P(A_i) > 0, i = 0,1,2,\cdots,n$.

4. 贝叶斯公式.$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}, i = 1,2,\cdots,n$,其中,对 $A_i(i = 1,2,\cdots,n)$ 的要求同 3.

5. 广义加法公式.

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1\cdots A_n)$$

十四、常用分布

	分布	参数	分布律或概率强度	数学期望	方差
1.	(0 - 1) 分布	p $0 < p < 1$	$P(X = k) = p^k(1-p)^{1-k}$ $k = 0,1$	p	$p(1-p)$
2.	二项分布 $B(n,p)$	$n,p;n \geqslant 1$, $0 < p < 1$	$P(X = k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k = 0,1,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
3.	Poisson 分布 $P(\lambda)$	$\lambda, \lambda > 0$	$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k = 0,1,2,\cdots$	λ	λ

4.	几何分布	$0 < p < 1$	$P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ $k = 1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
5.	超几何分布	N,m,n $n \leqslant N$ $m \leqslant N$	$P(X = k) = \frac{C_m^k C_{N-m}^{n-k}}{C_N^n}$ $k = 0,1,\cdots,\min(n,m)$	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm}{N}(1-\frac{m}{N})$ $\cdot(\frac{N-n}{N-1})$
6.	均匀分布 $U(a,b)$	$a,b,$ $a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
7.	正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ,σ $0 < \mu < +\infty$ $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ $-\infty < x < +\infty$	μ	σ^2
8.	指数分布	λ $\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & x \leqslant 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

9. 二维均匀分布:如果二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S_D}, & (x,y) \in D \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

则称(x,y)服从区域D上的均匀分布,其中S_D是平面区域D的面积.

10. (1) 二维正态分布的概念

如果二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\cdot\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + (\frac{y-\mu_2}{\sigma_2})^2\right]}$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$的二维正态分布,其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$均为常数,且$\sigma_1 > 0,\sigma_2 > 0, |\rho| < 1$

(2) 二维正态分布的性质

① 二维正态分布(X,Y)的边缘分布X,Y是一维正态分布$N(\mu_i,\sigma_i^2), i = 1,2$

② 二维正态分布(X,Y)的条件分布也是一维正态分布,且在$Y = y$条件下,X的条件分布为$N(\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\rho(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$;在$X = x$条件下,$Y$的条件分布为$N(\mu_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\rho(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$

③ 两个正态分布随机变量X与Y的非零线性组合仍服从正态分布,且

当X与Y独立时,$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$

当X与Y不独立时,$aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\rho\sigma_1\sigma_2)$,其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$分别是$X$与$Y$的期望、方差与相关系数.

④ 两个正态分布随机变量X与Y相互独立的充分必要条件是它们的相关系数$\rho_{XY} = 0$.

十五、数学期望中常用求和公式

1. $a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{1-q}$, $(|q| < 1)$

2. $a + 2aq + 3aq^2 + \cdots + naq^{n-1} + \cdots = \frac{a}{(1-q)^2}$, $(|q| < 1)$

3. $a + 2^2aq + 3^2aq^2 + \cdots + n^2aq^{n-1} + \cdots = \frac{a(1+q)}{(1-q)^3}$, $(|q| < 1)$

4. Γ - 函数的性质:$\Gamma(\gamma + 1) = \gamma\Gamma(\gamma)$,其中$\Gamma(\gamma) = \int_0^{+\infty} x^{\gamma-1}e^{-x}dx$, $(\gamma > 0)$

5. $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$; $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$;

$\int_0^{+\infty} xe^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a}$; $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-ax^2}dx = \frac{1}{2a^2}$.

十六、期望、方差、协方差、相关系数

1. 期望

(1) $E(c) = c$; (2) $E(kX + b) = kE(X) + b$;

(3) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$; (4) 若 X 与 Y 相互独立,那么 $E(XY) = E(X)E(Y)$.

2. 方差 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

(1) $D(c) = 0$ (2) $D(kX + b) = k^2 D(X)$

(3) 若 X, Y 相互独立,那么 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

3. 协方差 $\mathrm{cov}(X,Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) = E(XY) - E(X)E(Y)$

(1) $\mathrm{cov}(X,c) = 0$, (2) $\mathrm{cov}(aX,bY) = ab\,\mathrm{cov}(X,Y)$,

(3) $\mathrm{cov}(X, Y \pm Z) = \mathrm{cov}(X,Y) \pm \mathrm{cov}(X,Z)$.

4. 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$

(1) $|\rho_{XY}| \leqslant 1$; (2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充分必要条件为 X 与 Y 之间存在线性关系的概率为 1.

5. 以下 4 个定理等价

(1) $\rho_{XY} = 0$; (2) $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$;

(3) $E(XY) = E(X)E(Y)$; (4) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$.

6. 独立必不相关,即独立 $\Rightarrow$ 不相关;但不相关 $\not\Rightarrow$ 独立.但在二维正态分布中不相关 $\Leftrightarrow$ 独立.

十七、切比雪夫不等式和中心极限定理

1. 切比雪夫不等式.设随机变量 ξ 具有数学期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$,则有

$P\{|\xi - E(\xi)| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$; $P\{|\xi - E(\xi)| < \varepsilon\} \geqslant 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}$,任意的 $\varepsilon > 0$.

2. 列维 – 林德伯格定理(独立同分布的中心极限定理).设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立同分布,方差存在,记 μ 与 $\sigma^2 (0 < \sigma < +\infty)$ 分别是它们共同的期望与方差,则对任意实数 x,恒有:

$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\right) \leqslant x\right\} = \Phi(x)$,其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

3. 棣莫弗 – 拉普拉斯定理(二项分布以正态分布为极限分布).假设随机变量 X 服从参数为 n,p 的二项分布,则对任何实数 x,有 $\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{X - np}{\sqrt{npq}} \leqslant x\right\} = \Phi(x)$.

十八、八个核心数理统计分布公式

1. $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$; $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$;

2. $\frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,($\sigma$ 未知,用 S);

3. $\sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$,($\sigma$ 已知);

4. $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,($\sigma^2$ 未知,用 S^2);

5. $\frac{S_1{}^2/\sigma_1{}^2}{S_2{}^2/\sigma_2{}^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$,($\sigma_1 \neq \sigma_2$);

6. $\frac{S_1{}^2}{S_2{}^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$,($\sigma_1 = \sigma_2$);

7. $\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1{}^2}{n_1} + \frac{\sigma_2{}^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$,($\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2$ 已知);

8. $\frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$

$\left(\sigma_1{}^2, \sigma_2{}^2 \text{ 未知,但 } \sigma_1{}^2 = \sigma_2{}^2 = \sigma^2, S_w{}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1{}^2 + (n_2 - 1)S_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}\right)$.

基本题型与解题方法

极　限

一、求解极限的基本思想.先把极限转化为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型,然后用洛必达法则求解,必须注意以下技巧.

1. 1^{∞}、0^{∞}、∞^{0}、0^{0},作对数恒等式变换;$\infty - \infty$ 通分或倒代换;分子、分母中出现了根号的式子,应分子、分母有理化.
2. 在计算过程中应注意等价无穷小的代换,既可为洛必达法则创造条件,又可简化计算.
3. 对于能求解出极限的乘积或商因子,应先求出极限,简化计算.

二、求解极限的四种特殊方法

1. 运用幂级数展开式求解.注意须熟练运用"重要公式""二"中的常用展开式.
2. 用夹逼定理求解数列极限,对分子分母进行适当放缩是关键!
3. 运用定积分定义.$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\frac{i}{n}) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,关键是构造好$\frac{1}{n}$和$f(\frac{i}{n})$.
4. 用单调有界准则求证数列极限$\{a_n\}$的存在,并求 a_n.注意:在求解 a_n 的极限时,我们令$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = l$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1} = l$,即可得到一个关于 l 的方程,求解出 l 即可.

极限的运用

一、运用极限比较$f(x)$,$g(x)$两个无穷小量阶的高低.即$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$,若极限值等于0、1、$c(c\neq0)$、$\infty$,则 $f(x)$ 分别为 $g(x)$ 的高阶、等价、同阶、低阶无穷小量.

二、极限在函数连续性、可导性的判定中的运用(出题的频率极高)

1. 若$\lim\limits_{x\to a^+}f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}f(x) = f(a)$,则$f(x)$在 $x = a$ 点连续.
2. 若$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$,则$f(x)$在 $x = a$ 处可导.

三、在导数定义中的运用.$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

四、在二元函数连续性、可微性的判定中的运用(该知识点较难掌握)

1. 取两条不同的路径,求$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)$两个极限,不相等则极限不存在.
2. $f = f(x,y)$在(x_0,y_0)处可微的充分条件.

$\frac{\Delta f - f'_x(x_0,y_0)\Delta x - f'_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}}$,当$\sqrt{\Delta^2 x + \Delta^2 y}\to 0$时为无穷小量.

五、极限在广义积分中的运用.

1.广义积分的计算既可用定义法也可用广义的牛顿 - 莱布尼兹公式.首先应区别广义积分为无穷积分还是