JINGPIN KECHENG
高等财经院校精品课程系列教材

微积分
Weijifen

主 编 刘贵基 姜庆华 李 勇

经济科学出版社

高等财经院校精品课程系列教材

微积分

主　编　刘贵基　姜庆华　李　勇
副主编　孙　杰　宋春燕　李秀红　王淑勤

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

微积分/刘贵基，姜庆华，李勇主编．—北京：经济科学出版社，2011.6
（高等财经院校精品课程系列教材）
ISBN 978－7－5141－0569－8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①刘…②姜…③李… Ⅲ.①微积分－高等学校－教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 058848 号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：杨晓莹
版式设计：代小卫
技术编辑：邱　天

微积分

主　编　刘贵基　姜庆华　李　勇
副主编　孙　杰　宋春燕　李秀红　王淑勤
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：88191217　发行部电话：88191540
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
汉德鼎印刷厂印刷
永胜装订厂装订
710×1000　16 开　27.5 印张　500000 字
2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷
印数：0001—5000 册
ISBN 978－7－5141－0569－8　定价：42.00 元
（图书出现印装问题，本社负责调换）

出版说明

为了进一步深化山东经济学院课程改革，充分发挥教学中的“精品示范效应”，根据《教育部关于启动高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作的通知》（教高［2003］1号）和《国家精品课程建设工作实施办法》（教高［2003］3号）文件精神，按照精品课程的立项程序和标准要求，经过反复论证，多门课程获校级立项，这是山东经济学院课程建设的一件大事。

精品课程是具有一流教师队伍、一流教学内容、一流教学方法、一流教材、一流教学管理等特点的示范性课程，包括六个方面内容：一是教学队伍建设。要逐步形成一支以主讲教授负责、结构合理、人员稳定、教学水平高、教学效果好的教师梯队，要按一定比例配备辅导教师和实验教师。二是教学内容建设。教学内容要具有先进性、科学性，要及时反映本学科领域的最新科技成果。三是要使用先进的教学方法和手段。相关的教学大纲、教案、习题、实验指导、参考文献目录等要上网并免费开放，实现优质教学资源共享。四是教材建设。五是实验建设。要大力改革实验教学的形式和内容，鼓励开设综合性、创新性实验和研究型课程，鼓励本科生参与科研活动。六是机制建设。要有相应的激励和评价机制，鼓励教授承担精品课程建设，要有新的用人机制保证精品课程建设等。

从以上表述可以看出，教材建设是精品课程建设的重要组成部分，系列化的优秀教材与精品课程相呼应非常有必要。

教材是教学之本，它规范着某一课程的基本内容，保证教学内容的规范化和科学化，以实现教学目的。因此，教材建设是实现教学计划和达到教学目的的基本建设工程。教材建设包括教材的编写、出版和发行

等环节。其中，教材编写是关键，出版是保证，教材建设是否规范化和科学化，决定了教材质量的高低，关系到教学和教学目的能否实现。为此，山东经济学院组织精品课程负责人编写了这套精品课程系列教材，以适应精品课程建设的需要。

《高等财经院校精品课程系列教材》编写组

2006年1月

前　言

微积分是高等学校经济类、管理类各本科专业的学科基础课。它是一门研究变化的科学，其发展与应用几乎影响了现代生活的所有领域。微积分与大部分科学分支关系密切，几乎所有现代技术，如建筑、航空等都以微积分学作为基本数学工具。微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧氏几何后，全部数学中的最大的一个创造。正如恩格斯曾指出的："在一切理论成就中，未必再有什么像17世纪下半叶微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了。"通过本课程的学习，使学生获得微积分、级数和常微分方程的基本知识，基本理论和基本运算技能，为学习后续课程奠定必要的数学基础，并在逻辑思维能力、空间想象能力以及实际计算能力方面得到显著的提高。由于微积分是一种数学思想，它的发展历史曲折跌宕，撼人心灵，因此该课程又是培养大学生的正确人生观、科学的方法论以及对大学生进行文化熏陶的极好素材。

本教材是根据教育部颁布的财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲的内容和要求、教学改革的需要以及教学实际情况编写而成的，在教材体系、内容的安排和例题、习题的选择等方面汲取了国内外优秀教材的优点，也汇集了编者多年的教学经验。

本教材具有以下特点：

1. 本教材结构严谨，语言准确，解析详细，易于学生阅读。在引入概念时，注意了概念产生的实际背景，尽量以提出问题、讨论问题、解决问题的方式来展开教材，使读者也知其所以然。

2. 教材内容的深度和广度合理。既注意了适应目前的教学实际和本课程的基本要求，又兼顾到报考硕士研究生学生的需求，例题、习题

的配置注意层次，以满足不同读者的要求。

3. 针对高素质创新性应用型人才培养的需要，教材中增加了数学在经济分析中的应用以及经济数学模型等相关内容，以便培养学生具有初步的数学建模思想以及将数学应用于经济的能力。

4. 教材中适量融入数学史与数学文化的教育，介绍了有关概念和理论的发展历史及有关数学家的学术成就，以激发学生去思考，去发现，去创新。

本教材适合作为高等学校经济类、管理类各专业该课程的教材，也适合报考经济学和管理学门类硕士研究生的读者参考。讲授全书共需118课时，还可根据专业需要和不同的教学要求删减部分内容，分别供90课时、72课时讲授使用。

本教材由刘贵基、姜庆华、李勇主编，参加编写的人员还有孙杰、宋春燕、李秀红、王淑勤、黄秋灵、周玉珠、董新梅、孙向勇、宋浩。在编写过程中，参考和借鉴了国内外有关资料，并得到了许多同行专家的帮助指导和经济科学出版社的大力支持，在此谨致以诚挚的谢意。

限于编者水平，本书难免有错误和不足之处，殷切希望广大读者批评指正。

编 者

2011年3月

目　录

第1章
函数与极限

函数是微积分学的研究对象，极限方法是研究函数的基本方法，而连续是函数变化的一个重要性态，它们是微积分的基础．本章介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

§1.1 集 合

1.1.1 集合的概念

集合①是现代数学中一个重要的概念，可以说几乎全部现代数学就是建立在集合这一概念的基础之上的．所谓**集合**(set)就是按照某些规定能够识别的一些确定对象或事物的全体．构成集合的每一个对象或事物称为集合的**元素**．例如，一间教室里的学生构成一个集合，方程 $x^3-2x^2-5x+6=0$ 根的全体为一个集合，一直线上所有点的全体为一个集合．

通常用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\overline{\in}A$ 或 $a\notin A$. 一个集合，若它只含有限个元素，则称为**有限集**，否则称为**无限集**．

① 集合论的创始人德国数学家乔治·康托(Georg Cantor，1845～1918)1897 年指出：把一定的并且彼此可以明确识别的事物——这种事物可以是直观的对象，也可以是思维的对象——放在一起，称为一个集合．

集合一般有两种表示法：列举法和描述法．所谓列举法就是把集合的元素都列举出来，并写在括号{ }中．例如，A 是由 1,3,5,7,9 这五个数组成的集合，可表示成

$$A=\{1,3,5,7,9\}.$$

所谓描述法就是给出集合元素的特征，一般用

$$A=\{a \mid a \text{ 具有的特征}\}$$

来表示具有某种特征的全体元素 a 构成的集合．例如，由 1,3,5,7,9 这五个数构成的集合 A，也可表示成

$$A=\{2n-1 \mid n<6, n \text{ 为自然数}\}.$$

以后用到的集合主要是数集，即元素都是数的集合．如果没有特别声明，以后提到的数都是实数．

习惯上，全体自然数的集合记作 N. 全体整数的集合记作 Z. 全体有理数的集合记作 Q. 全体实数集合记作 R，R^+、R^-、R^* 分别为全体正实数、负实数、除 0 以外的实数的集合．

设 A 和 B 是两个集合，若集合 A 的元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的**子集**(subset)，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A.

若集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 例如，集合

$$\{x \mid x\in R, x^2+1=0\}$$

就是一个空集，因为适合条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的．规定空集是任何集合的子集．

1.1.2 集合的运算

设 A 和 B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并**，记作 $A\cup B$；由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交**，记作 $A\cap B$；由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差**，记作 $A-B$. 有时，我们研究某个问题限定在一个大的集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 中进行，所研究的其他集合 A 都是 $\boldsymbol{\Omega}$ 的子集．此时，我们称集合 $\boldsymbol{\Omega}$ 为**全集**，并把差 $\boldsymbol{\Omega}-A$ 特别称为 A 的**余集**或**补集**，记作$\overline{A}$. 例如，在实数集 R 中，集合 $A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$的余集

$$\overline{A}=\{x \mid x<0 \text{ 或 } x>1\}.$$

集合的并、交、余运算满足如下运算律：

交换律　$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$；

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；

对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证．

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡尔①乘积．设 A、B 是任意两个集合，则 A 与 B 的**直积**，记作 $A\times B$，定义为如下的由有序对 (a,b) 组成的集合：

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

例如，$R\times R=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合，$R\times R$ 常记作 R^2.

1.1.3　区间

区间是在微积分中最常用的一类数集．设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为以 a、b 为端点的**开区间**(open interval)，记作 (a,b). 即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的**闭区间**(closed interval)，记作 $[a,b]$. 即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

数集 $\{x\mid a\leqslant x<b\}$、$\{x\mid a<x\leqslant b\}$ 称为以 a、b 为端点的**半开区间**，分别记作 $[a,b)$、$(a,b]$. 即

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}.$$

以上这些区间都称为**有限区间**．数 $b-a$ 称为这些区间的长度．此外还有所谓**无限区间**．例如，

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},$$

$$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}.$$

注意，这里的 $+\infty$(读作正无穷大)、$-\infty$(读作负无穷大)以及 ∞(读作无穷大)只是一种记号，既不能把它们视为实数，也不能对它们进行运算．

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间．

邻域也是一个经常用到的集合，以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**

① 笛卡尔(Descartes，1596～1650)近代数学的奠基人，法国数学家、哲学家、物理学家、生理学家．笛卡尔在数学上的杰出贡献是将代数和几何巧妙地联系在一起，从而创造了解析几何这门数学学科．

(neighborhood),记作 $U(a)$.

设 $\delta \in R^+$,则开区间 $(a-\delta, a+\delta)$ 就是点 a 的一个邻域,这个邻域称为点 a 的 **δ 邻域**,记作 $U(a,\delta)$. 即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径(图 1—1).

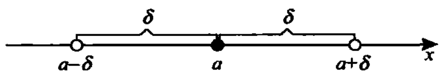

图 1—1

由于 $\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\}$,因此

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

在微积分中还常常用到集合

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这是在点 a 的 δ 邻域内去掉中心 a 所得到的集合,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $U(\hat{a},\delta)$. 即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便,我们把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

§1.2 函　数

1.2.1 常量与变量

在人们观察研究自然现象和社会现象的过程中,经常会涉及一些量,其中一些量在观察过程中始终保持一固定数值,称为**常量**,通常用字母 $a,b,c,\cdots$ 表示;另一些量在观察过程中会不断变化,也就是可以取不同的数值,称为**变量**,通常用字母 $x,y,z,\cdots$ 表示. 变量 x 可取的值之集合 X 称为变量的变化范围或取值范围,记作 $x\in X$.

如果将变量看成是可以在一非空数集内任意取值的量,则常量可看成是在单元素集合中取值的变量,因而常量可看成是变量的特例.

1.2.2　函数的概念

在同一个问题中，往往同时有几个变量，这些变量的变化也不是孤立的，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．下面的例子就属于这种情形．

例 1　温度自动仪所记录的某地某天 24 小时气温变化曲线（图 1－2）描述了当天气温 T 随时间 t 的变化情形．

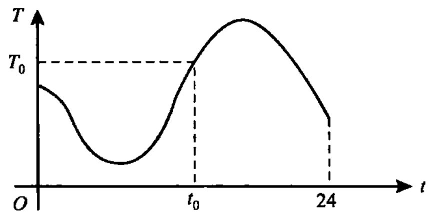

图 1—2

对任何时刻 $t_0\in[0,24]$，可按图 1－2 上的曲线确定出一个对应的气温 T_0.

例 2　某商品的单位成本为 8 元，P 为销售单价，若公司已售出该商品 50 件，问公司可获得多少利润？此问题中，单位成本和销售量为常量，而销售价与利润为变量，销售价高则利润多，销售价低则利润少．利润 L 与销售价 P 之间有关系：

$$L=50(P-8)\qquad(P>0)$$

当销售价 P 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，由上式就可以唯一确定利润 L 的相应数值．

我们抽去上面例子中所考虑量的实际意义，它表达了两个变量之间的相依关系，这种相依关系给出了一种对应法则，根据这一法则，当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量就有确定的值与之对应．两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质．

定义 1.2.1①　设 x,y 是两个变量，D 是一个给定的非空实数集，$x\in D$，f 是变量 x 与 y 之间的对应关系．如果对于 D 内的变量 x 的每一个值，按照 f 在 R 内能确定唯一的变量 y 的值与之对应，则称 f 是定义在 D 上的**函数**(function)，也称变量 y 是变量 x 的函数，记作

① 函数(function)一词，起用于 1692 年，最早见自莱布尼兹(Leibniz)的著作．记号 $f(x)$ 则是由瑞士数学家欧拉(Euler)于 1724 年首次使用的．

$$y=f(x),x\in D$$

其中变量 x 称为**自变量**,变量 y 称为**因变量**,数集 D 称为函数的**定义域**(domain).当定义域是区间时,则将该区间称为定义区间.因变量 y 与自变量 x 之间的这种对应关系,通常称为**函数关系**.

如果 $x_0\in D$,则称函数在 x_0 点有定义;如果 $x_0\overline{\in}D$,则称函数在 x_0 点没有定义.对于 $x_0\in D$,按照 f 与之相应的因变量 y 的值,称为函数在 x_0 点的函数值,记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$.当自变量 x 取遍 D 内的各个数值时,对应的函数值全体构成的集合,称为函数的**值域**(range),记作 R_f.即

$$R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

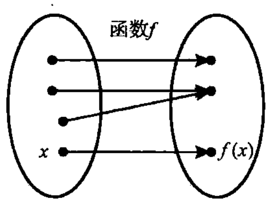

图 1—3

图 1—3 简明地标注了函数的定义域、值域及对应关系等.

函数 $y=f(x),x\in D$ 中表示对应关系的记号 f 也可用其他字母.例如,用"F"、"φ"、"h"、"g"等,甚至有时用 $y=y(x),x\in D$ 表示函数,此时等号右边的 y 表示对应关系.如果在同一个问题中讨论到几个不同的函数,则必须用不同的记号分别表示这些函数,以示区别.

关于函数的定义域,在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定,而在纯数学问题中,常常是只给出函数变量间的对应关系,而没有指明定义域,这时我们认为其定义域就是按对应关系有唯一确定实数与之对应的自变量 x 所能取的一切实数值构成的集合.例如,函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$,函数 $y=\dfrac{1}{\ln(x-5)}$ 的定义域是 $(5,6)\cup(6,+\infty)$.

设函数 $y=f(x),x\in D$,以 D 内的每一点 x 为横坐标及相应函数值 $f(x)$ 为纵坐标就在 xOy 平面上确定一点 $P(x,f(x))$,当 x 在 D 内变动时,点 P 便在坐标面上移动,所有这些点集合 $\{P(x,y)|x\in D,y=f(x)\}$,称为函数 $y=f(x),x\in D$ 的**图形**(图 1—4).

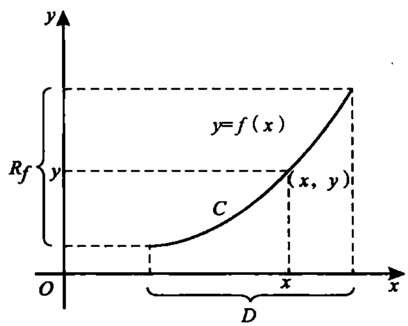

图 1—4

需要指出，函数的实质是指定义域 D 上的对应关系 f，即确定函数的要素是定义域 D 与对应关系 f. 因此，常用记号“$f(x), x\in D$”，或“$f(x)$”、“$y=f(x)$”等来表示定义在 D 上的函数，同时可得出对于两个函数，若它们的定义域和对应关系分别相同，则这两个函数相同，否则就是不同的.

例如，函数 $f(x)\equiv 1$ 与函数 $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$，它们的定义域都是 $R=(-\infty,+\infty)$，且对 R 中的任一点 x，两者都对应着相同的实数 1，即有相同的对应关系，因此，它们是相同的函数. 但对于函数 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$，由于定义域不同，所以它们是不同的函数.

注　在函数 $y=f(x), x\in D$ 中 $f(x)$ 表示将对应关系 f 作用于 x. 这里 x 可指 D 中的一个点，也可指与 D 中某个点相当的数学表达式.

例 3　设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，求 $f(2)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f[f(x)]$.

解　由 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，得

$$f(2)=\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{1}{1+x},$$

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{1+f(x)}=\frac{\frac{x}{1+x}}{1+\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{1+2x}.$$

例 4　设 $f(x+1)=x^2-x$，求 $f(x)$.