表 6.2

时间段	考试科目	监考教授
1（红）	127，132，154	Agnesi（132），Bernoulli（127），Cauchy（132），Descartes（127），Frobenius（132），Euler（154），Gauss（127），Hamilton（154）
2（蓝）	131，136	Agnesi（136），Bernoulli（131），Cauchy（131），Descartes（131），Frobenius（136），Euler（131），Gauss（131）
3（黄）	138，201，205	Descartes（205），Euler（138），Frobenius（201），Gauss（138），Hamilton（205）
4（绿）	153，211	Agnesi（211），Bernoulli（153），Cauchy（211），Hamilton（153）

下面是另外一个关于化学品存储的例子。

例 6.6　（化学品存储）一名建筑师受命为某实验室设计化学药品存储仓库，由于受预算限制，实验室希望建造尽量少的存储间。已知某些药品会和另一些起反应，因而不能放在一起。作为简化，我们用字母 a 到 n 代表 14 种化学品；两种化学品之间的边代表它们可能的化学反应，如图 6.20 所示。求所需的最少存储间，并指出每种化学品放入哪个存储间。

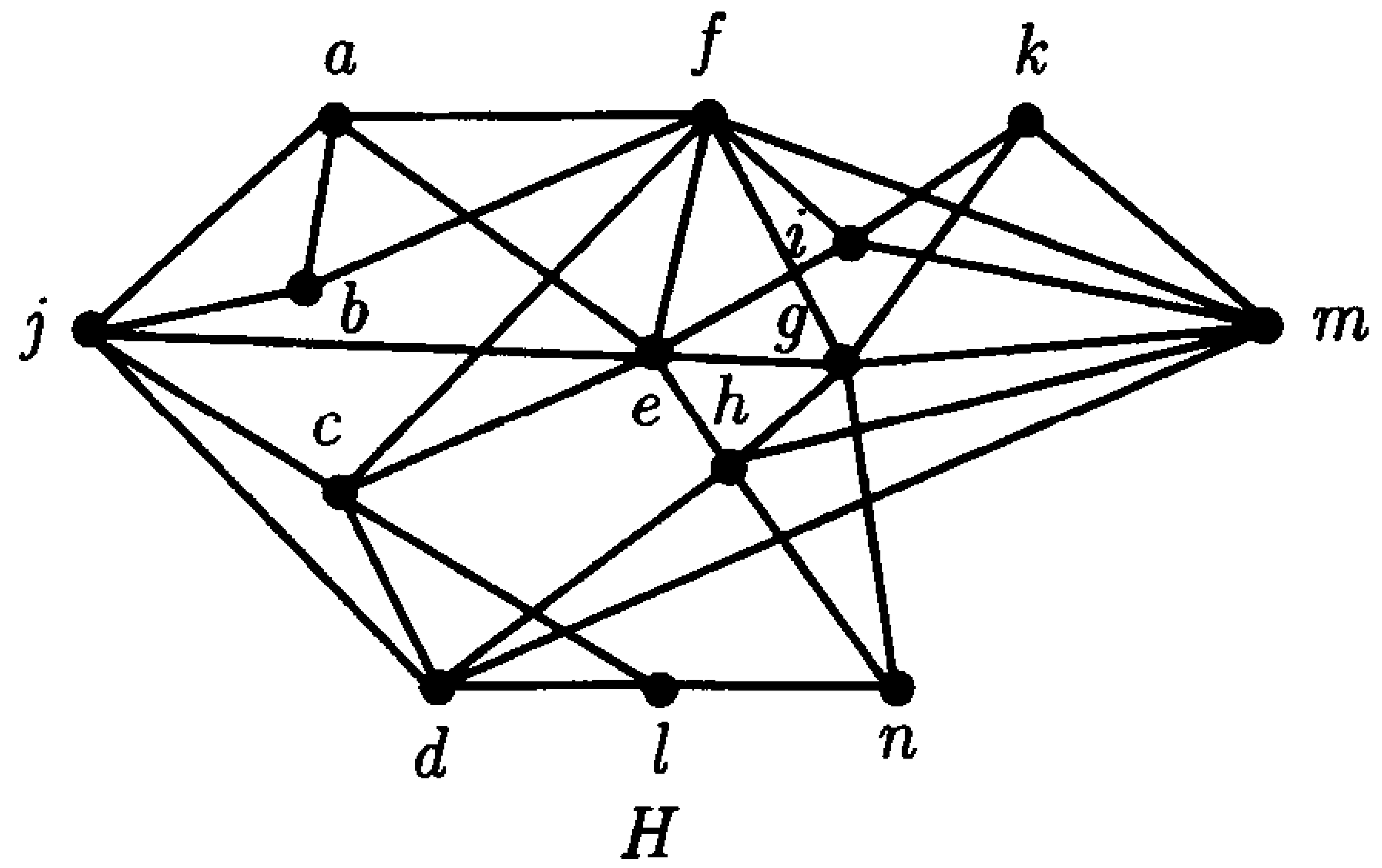

图 6.20　可能的化学反应

【解】

虽然图看起来很复杂，似乎色数会有爆炸性增长，但实际上很容易就可以验证 $\chi(H)=3$，而且图 H 是可惟一 3 着色的，这简直就是一个惊喜。在将图中的一个 K_3 用 3 种不同颜色着色之后，我们可以继续移动到与该 K_3 相邻的结点，如果这个结点的颜色已经惟一确定，我们就能继续处理直到完成整个过程。图 H 的惟一 3 着色如图 6.21 所示，其中使用了粉红（p）、褐色（t）和白色（w）。所以可以得知，总共需要 3 间存储间，化学品将按如下方案存储：在粉红存储间中，我们存储 f、h、j、k 和 l；在褐色存储间中，我们放置 b、d、e、m 和 n；在白色存储间中安排 a、c、g 和 i。

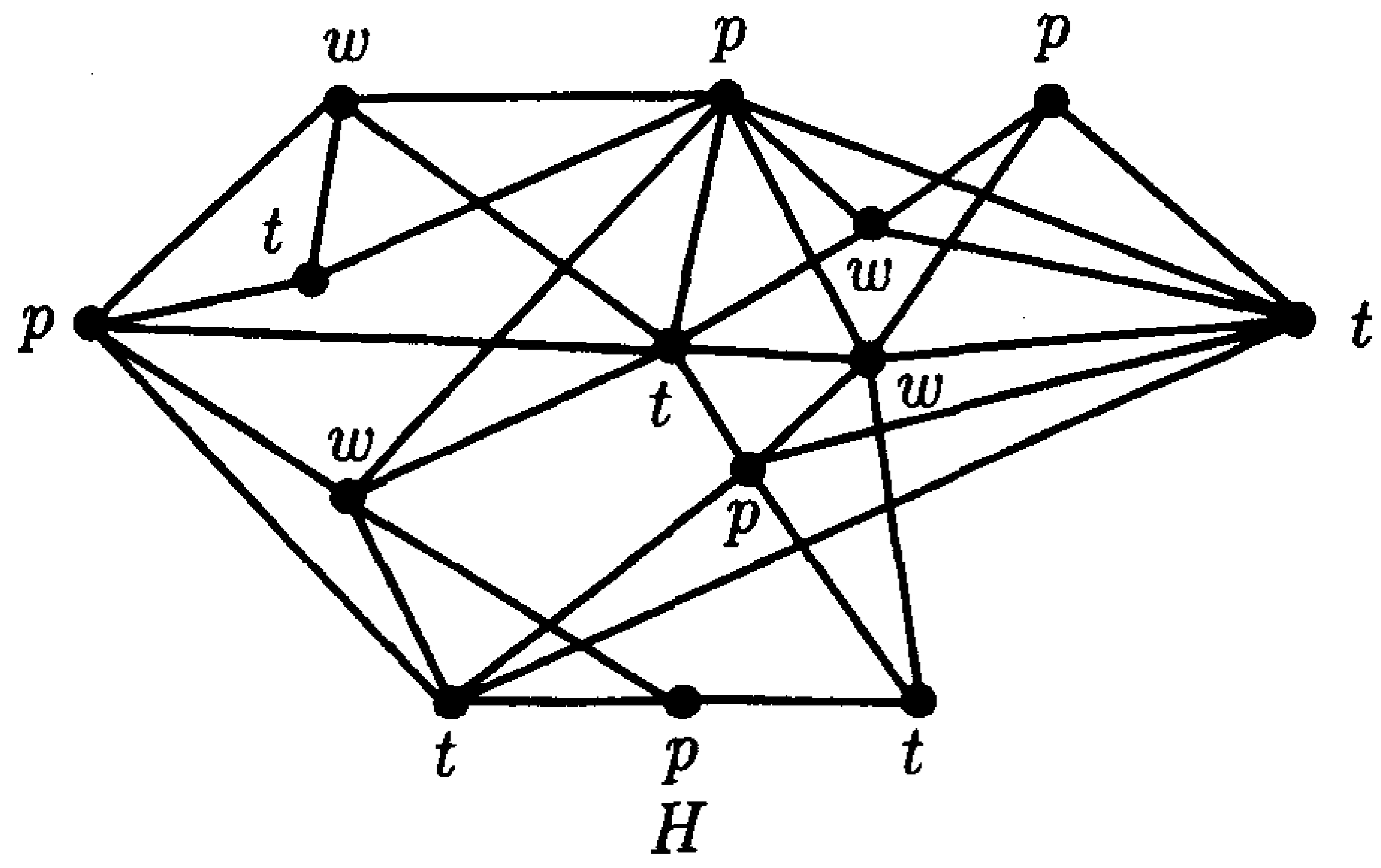

图 6.21 图 H 的惟一 3 着色

作为最后一则应用实例，我们来看看时间表问题。同样也属于安排问题，但它和例 6.5 的情形有些许不同。一个典型的时间表问题是这样的：给定一些老师，每位老师开设一些课程，一门课程每周会上几次课。任何学生都应该对这个很清楚。要解决的问题就是为所有的老师安排课程表，使总共的上课时间段最少。起初这个问题可能看起来很像安排问题，但实际上它们之间有很大不同。首先，在这个问题中我们要处理的不是图而是多重图；此外，该多重图是二分图，而且我们用边着色来解决这个时间表问题，而不是用结点着色。

例 6.7 假设 5 名教师 t_1、t_2、t_3、t_4、t_5 给 7 个班 c_1、c_2、c_3、c_4、c_5、c_6、c_7 上课，且每周 t_i 必须给 c_j 上 w_{ij} 节课。注意班 c_j 是指全天在同一个班上学习的固定数目的学生。我们用一个加权二分图表示这个情形，给定边上的权 w_{ij} 表示在相关的二分多重图上连接 t_i 和 c_j 的边的数目。假设所需的开课情况如图 6.22 所示，求每周在时间表格中至少需要出现多少节课，然后再给出一个适当的课程表。

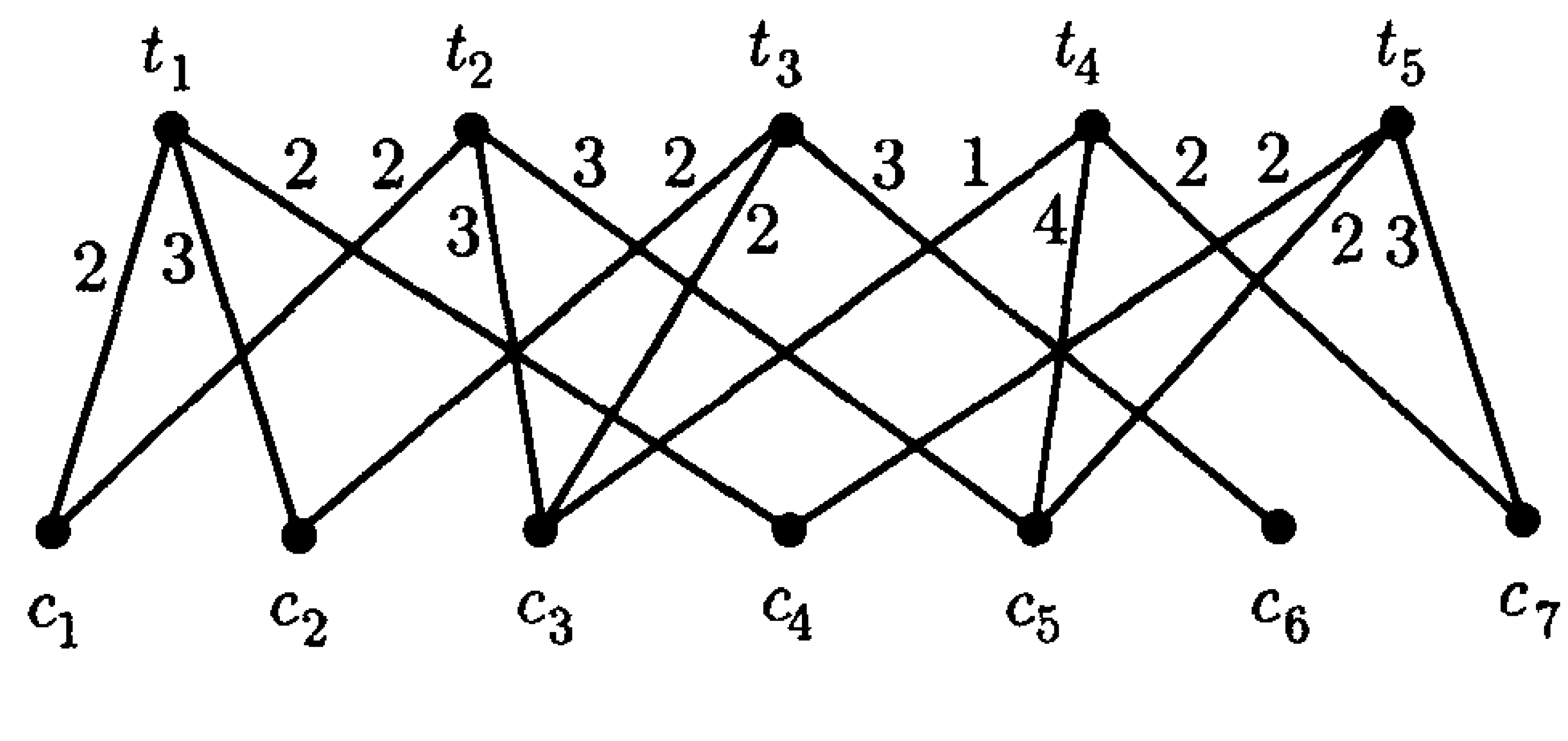

图 6.22 时间表问题中的加权二分图

【解】

由于每位老师在同一时间只能给一个班上课，且每个班在同一时间只能有一名老师上课，所以我们必须求正常边着色。每类颜色都在一个时间段内将老师和班相匹配，由于结点度不都相同，所以可能在一些时候某个班没有老师。由于最大结点度（最大权和）是 9，所以至少需要 9 节课。根据定理 6.9 可得出 $\chi_1(G)=\Delta(G)$，所以 9 节课是足够的。一个课程

表如表 6.3 所示。表中的每一项给出了在某一段时间内哪位老师在哪个班上课。注意，每一段时间对应边着色中的一种颜色，课程 c_j 在每一行最多出现一次，因为同一时间只能有一名老师上这门课；c_j 在 t_i 列出现的次数对应于 t_ic_j 边上的权 w_{ij}。

表 6.3

节次\教师	t_1	t_2	t_4	t_4	t_5
1	c_1	c_3	c_2	c_5	c_7
2	c_2	c_5	c_3	c_7	c_4
3	c_4	c_5	c_6	c_3	c_7
4	c_1	c_3	c_2	c_5	c_4
5	c_2	c_1	c_3	c_7	c_5
6	c_4	c_3	c_6	c_5	c_7
7	c_2	c_1	c_6	-	c_5
8	-	c_5	-	-	-
9	-	-	-	c_5	-

习题 6.3

1. 在习题 6.4 中，如果 Zambula 公司要引入袋熊，它只吃植物，那么哪个围栏对它们是最安全的？
2. 在图 6.17 中，求一条不在 G 中的边 e，将它加入 G 后会增加色数。然后再求一条边，将它加入 G 不改变色数。
3. 重复习题 2，但这次使用图 6.20 中的图 H。
4. 求图 6.20 中图 H 的边 xy，满足 $H-xy$ 不是可惟一 3 着色的。
5. 假设例 6.6 中的化学实验室决定不再存储药品 e、h、j 和 m。
   （a）画出新图表示化学品的相互作用。
   （b）所得的图是可惟一 k 着色的吗？
   （c）怎样安排余下的化学药品，使得只需要最少的存储间？
6. 对于例 6.7 中的问题，假设原本需要一个老师每周上 3 次课的班现在每周需要上 4 次；而且老师 t_4 将给 c_3 每周上 3 次课而不是 1 次，给 c_7 每周上 3 次而不是 2 次。
   （a）画出这个新时间表问题的加权二分图。
   （b）求每周在时间表格中至少需要出现多少节课.
   （c）给出一个适当的课程表。
7. 对于例 6.7 中的问题，假设原本需要一个老师每周上 2 次课的班现在每周需要上 3 次；假设原本需要一个老师每周上 3 次课的班现在每周只需要上 2 次。
   （a）画出这个新时间表问题的加权二分图。
   （b）求每周在时间表格中至少需要出现多少节课.
   （c）给出一个适当的课程表。

参考文献

1. Brooks, R. L., On colouring the nodes of a network. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 37 (1941) 194–197.

2. Erdős, P., Graph theory and probability II. *Canadian Journal of Mathematics* 13 (1961) 346–352.

3. König, D., Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Menenlehre. *Math. Annalen* 77 (1916) 453–465.

4. Vizing, V. G., On an estimate of the chromatic class of a p-graph. *Diskrete Analiz.* 3 (1964) 25–30.

推荐读物

5. Chung, F., and R. Graham, *Erdős on Graphs: His Legacy of Unsolved Problems.* A. K. Peters, Wellesley, MA (1998).

6. Coulson, D., An 18-coloring of 3-space omitting distance one. *Discrete Mathematics* 170 (1997) 241–247.

7. Donini, D., A 4-regular, 3-chromatic, self-complementary graph. (Problem #632, proposed by F. Schmidt) *College Mathematics Journal* 30 (1990) 320–321.

8. Hoffman, P., *The Man Who Loved Only Numbers: The Story of Paul Erdős and the Search for Mathematical Truth.* Hyperion Press, New York (1998).

9. Schechter, B., *My Brain Is Open: The Mathematical Journeys of Paul Erdős.* Simon & Schuster, New York (1998).

10. Temple, D. W., Colored polygon triangulations. *College Mathematics Journal* 29 (1998) 43–47.

第 7 章　矩　　阵

矩阵是一些数的矩形表格，经常用大写字母来表示。矩阵内的数称为**元素**，这些数的水平列表称为矩阵的**行**，竖直列表称为矩阵的**列**。一个 m 行 n 列的矩阵的**维数**记作 $m \times n$（读作“m 乘 n”）。若 $m=n$，矩阵称为方阵。在第 i 行第 j 列的元素称为**(i,j)-元素**，其**地址**记为(i,j)。若矩阵用 A 表示，则我们就用 a_{ij} 表示其(i,j)-元素。

一个 $m \times n$ 的矩阵 A 的抽象表示如下所示：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

矩阵在图论中应用广泛。我们首先来复习一下矩阵的一些基本性质，然后再来讨论矩阵在图论中的应用。

7.1　矩阵的基本概念

在本节中，我们来学习一下矩阵的一些基本操作。我们从现实世界的一个简单例子开始。

例 1　Alice 和 Bob 在一家汽车代销店工作。他们从第 1 个季度到第 4 个季度的小汽车销售额在矩阵 C 中给出，其中第 1 行是 Alice 的销售额，第 2 行是 Bob 的销售额。

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

a．C 的(2,3)-元素有何意义？

b．Alice 在第 4 季度卖了多少辆小汽车？

c．Bob 在全年卖了多少辆小汽车？

d．Alice 和 Bob 在第 2 季度共卖了多少辆小汽车？

【解】

a．矩阵 C 的(2,3)-元素表示 Bob 在第 3 季度卖了 8 辆小汽车；

b．5；

c．将第 2 行的元素加起来，得到 15；

d．将第 2 列的元素加起来，得到 6。

7.1.1 矩阵运算

我们用例 1 中矩阵 C 和另一个矩阵 T 来说明矩阵最简单的操作。

例 2 在例 1 中提到的汽车代销店也销售小卡车。矩阵 T 表示 Alice 和 Bob 每个季度的卡车销售额。

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

a．构造一个矩阵将 Alice 和 Bob 每个季度的机动车（小汽车和小卡车）销售额列出。

b．基于刚上市的小卡车的新模型，销售经理对其明年的销售额很乐观，他想让 Alice 和 Bob 明年的销售额加倍。若 Alice 和 Bob 能达到此目标，写出明年小卡车的销售矩阵。

c．主管部门发出新的指示，他们想要的销售矩阵应满足：列对应销售代表，行对应顺序排好的季度，第 1 列对应第 1 季度。根据主管部门的指示，将矩阵 T 重写为一个新的矩阵 D。

【解】

a．因为我们想要 Alice 和 Bob 按季度的小汽车和小卡车总的销售额，所以，我们必须将对应元素相加，即将矩阵 C 和 T 中具有相同地址的元素相加，如此得到两个矩阵的和：

$$C+T=\begin{bmatrix}3 & 2 & 7 & 5\\ 1 & 4 & 8 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+1 & 2+0 & 7+3 & 5+1\\ 1+2 & 4+1 & 8+4 & 2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 10 & 6\\ 3 & 5 & 12 & 2\end{bmatrix}$$

b．为了得到新的销售矩阵，我们必须将矩阵 T 的每个元素乘以 2，得到下面的矩阵：

$$2T=2\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 6 & 2\\ 4 & 2 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

c．新的矩阵称为 T 的转置，记作 T^t，得到下面的矩阵：

$$D=T^t=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ 3 & 4\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

下面我们对到现在为止已遇到的操作给出规范的定义。首先，**矩阵 A 和 B 相等**，即 $A=B$ 是指它们有相同的维数，设为 $m\times n$，且对 $1\le i\le m$ 和 $1\le j\le n$ 都有 $a_{ij}=b_{ij}$，换句话说，它们的对应元素相等。

为了将两个矩阵相加，它们的维数必须相等，即它们必须都是 $m\times n$ 矩阵。在上面的情况下，**矩阵 A 与 B 的和矩阵 C** 的元素满足 $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$，即 A 与 B 的和是通过它们对应元素相加得到的。类似地，可以得到它们的**差**。若我们将矩阵 A 减去矩阵 B，那么得到新

矩阵 D 满足其元素 $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$。因为实数的加法是可交换的，所以，根据定义，矩阵的加显然是可交换的，即 $A+B=B+A$。另一方面，$A-B\neq B-A$ 也是显然的。

因为乘法可以通过重复做加法得到（$3\times17=17+17+17$），那么，定义数 r 和矩阵 M 的乘积是合情合理的。**数乘**是指一个向量（数）与矩阵的乘积，得到一个新的矩阵 rM，其 (i,j)-元素为 $r\cdot m_{ij}$，换句话说，我们将 r 分配给 M 的每个元素。数乘在例 2(b) 中给出示例。

$m\times n$ 矩阵 A 的**转置**是一个 $n\times m$ 的矩阵，记作 A^t，通过将 A 的行列相交换得到。即 A 的第 1 行变为 A^t 的第 1 列，A 的第 2 行变为 A^t 的第 2 列，依此类推。类似地，A 的第 1 列变为 A^t 的第 1 行，依此类推。A^t 的另一等价定义：其 (i,j)-元素为 A 的 (j,i)-元素。转置运算在例 2(c) 中给出示例。

$n\times n$ 的对角矩阵 A 是由元素 a_{ii}（$1\le i\le n$）组成的，其行和列的元素相同。若一 $n\times n$ 的对角矩阵的对角元素都为 1，其他元素都为 0，那么此矩阵称为**单位矩阵**，记作 I。在讨论矩阵乘法时，我们就可以得出其名字的缘由。

例如，考察矩阵

$$A=\begin{bmatrix}5&8&6\\7&2&4\\9&0&3\end{bmatrix}$$

其对角线元素为 5, 2 和 3。注意，当我们将矩阵转置后其对角线元素不变。如对矩阵 A，其转置

$$A^t=\begin{bmatrix}5&7&9\\8&2&0\\6&4&3\end{bmatrix}。$$

$1\times n$ 维矩阵称为**行矩阵**，而 $n\times1$ 维矩阵称为**列矩阵**，在此两种情况中，经常用“**向量**”来替代“矩阵”。**向量**是指仅具有一行或一列的矩阵。矩阵是数的矩形数组，而向量则是数的线性数组。向量有时可以看作是 n-元有序数，它与数的顺序有关。当然，向量的元素仅需要一维坐标作为地址。向量也经常用小写字母表示。因此，一个 $n\times1$ 的向量 v 为 $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$，我们称 v_i 为 v 的第 i 个元素或者是第 i 个坐标

矩阵用途广泛。设想有 3 个国家 #1、#2 和 #3，相互两者间有贸易往来，那么，一个 3×3 矩阵的 (i,j)-元素表示国家 i 向国家 j 的出口量。显然，对角线元素都为 0。第 i 行元素的和表示国家 i 的总出口量，而第 j 列元素的和表示国家 j 的总进口量。

下面是另一个很好的实例。设一个粒子有 4 种可能的能量级别。每秒它将改变级别（或者保持不变）。令 p_{ij}（$1\le i\le4, 1\le j\le4$）为粒子能量级别在 i 的概率，并且下一秒它的能量级别将变为 j。那么，矩阵 P 的 (i,j)-元素给出了粒子随时间推移所发生的变化。注意，矩阵任何一行的元素和都为 1，因为粒子在一个时间点一定处于某个能量级别。同时，可以考虑一下每列元素的和不必是 1 的原因。

各城市间的距离图表又是一例。此矩阵（有时仅仅称为图表）的 (i,j)-元素表示城市 i

与 j 的距离。注意，(i, j) 与 (j, i)-元素相同，由此可以推出该矩阵与其转置矩阵是相同的。当方阵 A 满足 $A=A^t$ 时，我们称方阵 A 为**对称矩阵**。

如下所示的是一个 3×3 的对称矩阵：

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ 6 & 5 & 13 \end{bmatrix}$$

注意观察矩阵的元素是如何关于对角线相互对称的，此时的对角线可以看作矩阵的对称轴。一个距离图表是对称的，且其对角元素都为 0，可以考虑一下其中的原因。

7.1.2 矩阵的乘法

就像一位著名的作家所说，“两个矩阵的乘法起初很痛苦，在做了一段时间的练习之后，会发现那将是一件令人讨厌的事情”。矩阵乘法要比我们前面学习的矩阵运算复杂得多。下面先通过一个例子来说明它的运算过程。

例 3 Harvey 的健康食品中有两种不同的葡萄干-果仁混合包，每包 10 盎斯。诱人的杏仁包内含 5 盎斯杏仁、4 盎斯葡萄干和 1 盎斯核桃仁；可口的核桃包内含 2 盎斯杏仁、3 盎斯葡萄干和 5 盎斯核桃仁。Harvey 从两个不同的商店购买这些配料。The Nut House 商店的这些配料的价格分别为：每盎斯杏仁要 12¢，每盎斯葡萄干要 10¢，每盎斯核桃仁要 15¢；We Are Nut 商店的这些配料的价格分别为：每盎斯杏仁要 13¢，每盎斯葡萄干要 9¢，每盎斯核桃仁要 14¢。我们把这些信息反映在矩阵 N 和 P 内，如下所示：

$$N=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 10 & 9 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

注意，第 1 个矩阵的行对应不同的混合包，列对应不同的配料；第 2 个矩阵的行对应不同的配料，第 1 列表示 The Nut House 商店的价格，第 2 列表示 We Are House 商店的价格。现在我们要构造一个矩阵，列出分别从每家商店购买这些配料的总开销。例如，我们若从第 1 家商店购买配料来配第 1 种混合物，那么应将 N 的第 1 行的元素与 P 的第 1 列对应元素分别相乘（即指第 1 个×第 1 个、第 2 个×第 2 个，等等）再相加。对其他的行列进行同样的处理。得到：

$$NP=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 & 13 \\ 10 & 9 \\ 15 & 14 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5(12)+4(10)+1(15) & 5(13)+4(9)+1(14) \\ 2(12)+3(10)+5(15) & 2(13)+3(9)+5(14) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}60+40+15 & 65+36+14\\24+30+75 & 26+27+70\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}115 & 115\\129 & 123\end{bmatrix}$$

若 Harvey 从一个商店购买所有的配料，那么他最好从 We Are Nut 商店购买，上面矩阵的第 2 列给出开销。从得到的矩阵可以看出，对于诱人的杏仁包 Harvey 要花费$1. 15（注意矩阵内的价格单位为分），而可口的核桃包他要花费$1. 23。

下面我们对上过程进行规范化地描述。给定的 $m\times r$ 矩阵 A 和 $r\times n$ 矩阵 B，**乘积 $C=AB$** 是 $m\times n$ 矩阵，而且 C 的 (i,j)-元素由下式给出：

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+\cdots+a_{ir}b_{rj} \tag{7.1}$$

上式用一个更简洁的式子表达为：

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{r}a_{ik}b_{kj}$$

我们可以用语言描述为：A 的 i 行与 B 的 j 列对应元素两两相乘再相加。这里的“对应元素两两相乘”表示：A 的第 i 行的第 1 个元素与 B 的第 j 列的第 1 个元素相乘，A 的第 i 行的第 2 个元素与 B 的第 j 列的第 2 个元素相乘，其他依此类推。

注意，若将 $m\times r$ 的矩阵 A 与 $r\times n$ 的矩阵 B 相乘时，要特别小心它们的维数，A 的列数（为 r）要与 B 的行数（也为 r）相等，如此才能得到 A 的 i 行元素与 B 的 j 列对应元素的 r 个乘积式，然后将这些乘积相加得到矩阵 C 的 (i,j)-元素 c_{ij}。

例 4 将表 7.1 中的空格填充。

表 7.1

A	B	AB
3×4	4×7	
4×2		4×3
2×4	2×2	
	1×5	6×5

【解】

表的第 1 行，AB 的维数应为 3×7；在第 2 行，B 的维数必须是 2×3；在第 3 行，乘积 AB 没定义，因为 A 的列数与 B 的行数不相等；在第 4 行，A 的维数必须是 6×1。

令人感到惊讶的是，矩阵的乘法是不可交换的。首先，我们从矩阵的维数来分析。有时对于矩阵乘积 AB，A 和 B 是可相乘的，而对于矩阵乘积 BA 未必就有定义。例如，表 7. 1 中第 1 行，虽然 AB 是有定义的，其维数已给出，但是乘积 BA 是没定义的。其实，即使 AB 和 BA 都有定义，仍然存在问题。例如，若 A 是 2×3 矩阵，B 是 3×2 矩阵，那么 AB 就是 2×2 矩阵，而 BA 却是 3×3 矩阵，显然 $AB\neq BA$。若 A 和 B 是维数相同的方阵，那么 AB 和 BA 也都是此维数的方阵，但 $AB\neq BA$ 仍然可能成立。

例 5 对于 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\8 & -5\end{bmatrix}$ 和 $B=\begin{bmatrix}4 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}$ 计算 AB 和 BA。

【解】

$$AB=\begin{bmatrix}1 & 2\\8 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1(4)+2(-2) & 1(3)+2(0)\\8(4)+(-5)(-2) & 8(3)+(-5)(0)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4-4 & 3+0\\32+10 & 24+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\42 & 24\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}4 & 3\\-2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\8 & -5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4(1)+3(8) & 4(2)+3(-5)\\-2(1)+0(8) & -2(2)+0(-5)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+24 & 8-15\\-2+0 & -4+0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}28 & -7\\-2 & -4\end{bmatrix}$$

从上面的例子可以看出最普遍的运算规律——交换律（$ab=ba$）在矩阵运算中却不成立。一般情况下，我们有 $AB\neq BA$。

因为矩阵乘法相当复杂，若是有一种简单的计算方式该有多好啊！幸运地是，现在已有了图运算器。例如，用 Texas 设备 TI-89 运算器，计算例 5 中的乘积 AB 可以输入 [1, 2; 8, (-) 5]*[4, 3; (-) 2, 0] 回车。一定要注意两个式子中的减号都用附加的负号键 (-)，而非减号键-。一些前期的 TI 模型也可以做矩阵乘法，但它们的行分离方式略有不同，其中的每一行要用中括号括起来，因此应输入 [[1, 2], [8, (-) 5]]*[[4, 3], [(-) 2, 0]] 回车。若你有一个图运算器，学着用它来做矩阵乘法。试着用运算器来计算例 5 中的 AB 和 BA。

下面是关于矩阵乘法的一些其他运算性质。矩阵乘法是可结合的。假设对于矩阵乘法其中的矩阵是可相乘的，那么 $(AB)C=A(BC)$。

正如你所期望的，我们也可以定义方阵的**幂运算**：$A^2=AA, A^3=AAA$，等等。你可以很容易验证下面的法则。

> **注记 7.1**
> 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，I 为 $n\times n$ 单位矩阵，那么：
> 1. $A^rA^s=A^{r+s}$
> 2. $(A^r)^s=A^{rs}$
> 3. $IA=AI=A$

单位矩阵名字的来源应该清楚了吧！正如实数中的数 1 一样，$n\times n$ 的单位矩阵在 $n\times n$ 的矩阵中是乘法单位式。根据前面的定义，定义 $A^0=I$ 是合情合理的。注意，注记 7.1 中的第 1 个法则可以推出 $A^rA^s=A^sA^r$，即 A 的幂运算可交换。

习题 7.1

对于习题 1-10，令

$$A=\begin{bmatrix}2&1&5\\1&0&2\\5&1&4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}4&1&0\\0&3&3\\1&2&2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}2&0&4\\1&1&0\\0&5&2\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3&6\\1&4\\0&6\end{bmatrix}\text{和 }v=\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix}$$

1. 求 AB, AC 和 BC。
2. 证明 $AB\neq BA$。
3. 求$(AB)^t$，并证明$(AB)^t=B^tA^t$。
4. 验证$(AB)C=A(BC)$。
5. 求 Av，并说明无法求 Dv。
6. 证明$(A+B)v=Av+Bv$。
7. 求 v^t。
8. 求 $A+B$, $3C-2B$ 和 $I+A+10B$。
9. 下面哪一个是没定义的：DA, $C+D$, CD, $A+v$, D^2 和 ID。
10. 求$(A+B)^2$，它是否等于 $A^2+2AB+B^2$？若不是，请给出原因。
11. 对任意给定的两个 $n\times n$ 矩阵 M 和 N，证明$(MN)^t=N^tM^t$。
12. **对角矩阵**是一个方阵，它的所有非对角线上的元素都是 0。证明若 D 为对角矩阵，那么 D^k 还是对角矩阵，并且起对角元素都是 D 的对应元素的 k 次幂。
13. 证明若 A 是对称矩阵，即 $A=A^t$，那么 A^k 也是对称矩阵，即证 $A^k=(A^k)^t$。提示：利用习题 11 和对 k 的数学归纳法。
14. 证明$(A+B)^t=A^t+B^t$。

7.2 邻接矩阵

在计算机科学领域，很多算法都涉及到图。为了使用这些算法，我们需要一种方便的方法利用计算机存储和操作图。图的存储方法有很多，其中的一些也比较有效。我们下面要考察的是一种最简单的图存储方法：矩阵存储。

7.2.1 一个简单的实例

Take-a-Chance 航空公司的航线图如图 7.1 所示。若两个城市间存在直达航线，那么它们在图中对应结点就邻接，否则，两个城市非邻接。

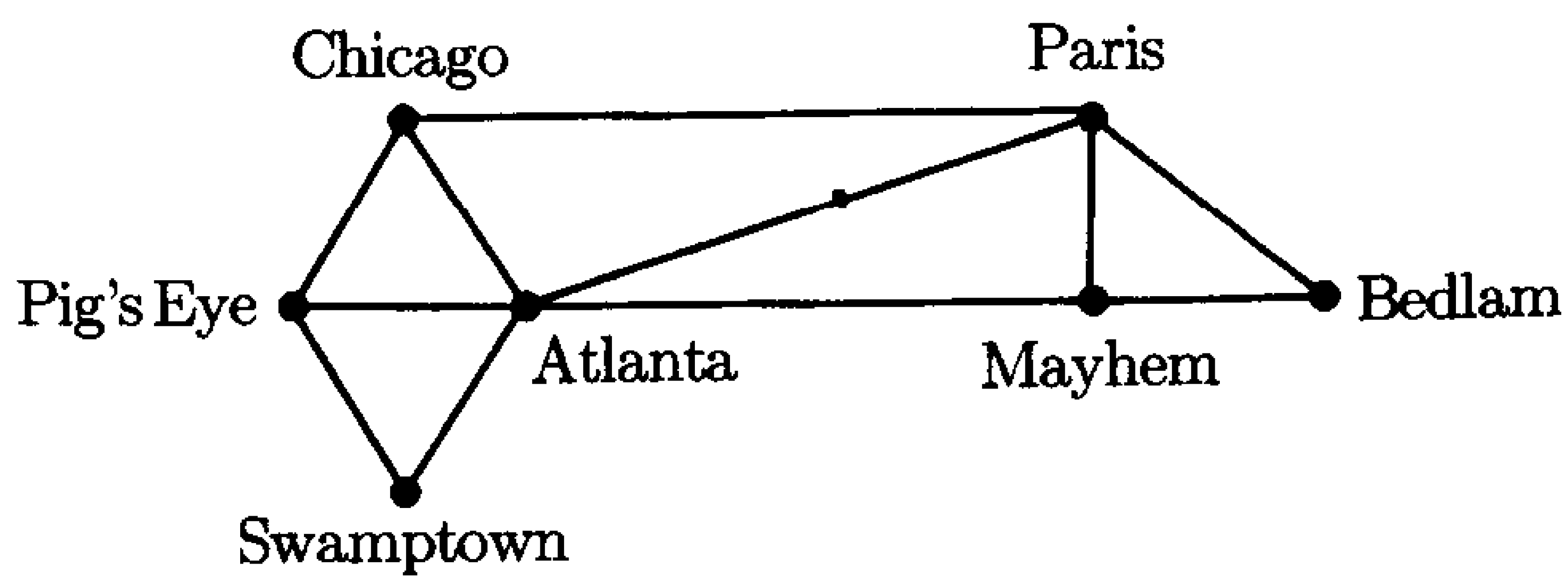

图 7.1　一幅航线图

我们用数字按照字母顺序对城市进行标记，因此城市 Atlanta, Bedlam, Chicago, Mayhem, Paris, Pig's Eye 和 Swamptown 分别对应的数字为 1, 2, 3, 4, 5, 6 和 7。下面我们来构造一个 7×7 的矩阵，它的元素定义如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若i与j邻接\\ 0 & 若i与j非邻接\end{cases}$$

根据定义我们得到：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&1&1&1&1\\0&0&0&1&1&0&0\\1&0&0&0&1&1&0\\1&1&0&0&1&0&0\\1&1&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&0&1\\1&0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

矩阵 A 为**二进制矩阵**的一个实例，因为它的每个元素都属于集合{0, 1}。给出了航线图中城市的邻接关系的重要矩阵 A 又可称为**邻接矩阵**。注意，其对角线上的元素都为 0，表

明航线都是建立在不同城市间的。另外，一个邻接矩阵是对称的，即 $a_{ij}=a_{ji}$，或者说 $A=A^t$，这是假设在两个给定城市间的航空服务是双向的情况下，否则，就要用有向图对航线进行建模，我们将在第 10 章对之进行讨论。

若我们将邻接矩阵 A 平方，就会得到下面的矩阵：

$$A^2=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

不再是二进制矩阵。

那么，A^2 的 (i,j)-元素有何意义呢？让我们来回忆一下它是如何得到的。它是将 A 的第 i 行与第 j 列对应元素两两相乘再相加得到的。因为 A 是对称的，所以第 j 列与第 j 行的对应元素相等。则 A^2 的 (i,j)-元素表示 i、j 两行的对应 1（两行对应元素同时为 1）的数目，这就意味着若两行的第 3 个位置都是 1，那么在乘积的和中就加上 1，若两行的第 3 个元素有一个(或者两个)是 0，那么第 3 个位置对和就没有任何影响。

从另一个方面说，第 i 行和第 j 行的乘积给出了与城市 i 和城市 j 都邻接的城市数目。则 A^2 的 (i,j)-元素（记作 $(A^2)_{ij}$）表示从城市 i 到城市 j 要经过两条航线的航行方式种数，其中“两条航线”是指从城市 i 到 j 的过程中要在它们共同的邻接城市处停留。

考察对角线元素 $(A^2)_{ii}$ 的特点是一件很有趣的事情，从逻辑的角度，它表示与城市 i 邻接的城市数目，与 A 的第 i 行元素的和相等；也表示从一个城市到与它邻接的城市（作为一个停站点）再回到它自身的旅行方式数，即环形旅行方式数。例如，对于 Take-a-Chance 航空公司的航线图 A^2 的 (1, 1)-元素是 5，表明从 Atalanta 可以到达 5 个城市：Chicago, Mayhem, Paris, Pig's Eye 和 Swamptown，这也恰是 A 的第 1 行（对应城市 Atalanta 的行）元素的和。

证明 A^3 的 (i,j)-元素 $(A^3)_{ij}$ 为从城市 i 到 j 有两个停站点（3 条航线）旅行方式数是很困难的。更一般地，A^k 的 (i,j)-元素表示从城市 i 到 j 要经过 k 条航线的旅行方式数。

这类概念可以扩展到其他领域，例如，公共汽车交通图、工业间的业务关系、朋友关系和贸易关系，等等。想象一幅国家联盟图，连接两个结点（代表两个国家）的边代表它们是盟国，两个国家可能没有结盟，但是它们可能有一个共同的盟国，若没有，即它们每个都有各自的盟国，而这些盟国可能又结盟。

7.2.2 图的邻接矩阵

对一给定的 n 阶图 G，结点集 $V(G)=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，其 $n\times n$ 邻接矩阵 A 定义如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 若v_iv_j\in E(G)\\ 0 & 若v_iv_j\notin E(G)\end{cases}$$

注意 $a_{ii}=0$，其中 $i=1,2,\ldots,n$；而且由 $a_{ij}=a_{ji}$，得到 $A^t=A$，即 A 为对角线元素都是 0 的对称二进制矩阵。

我们把所有元素都是 1 的矩阵记作 J。那么，$\overline{G}$ 对应的邻接矩阵可以写作 $J–A–I$。从 J 中减去 A，即将 A 中的每个 0 变为 1、每个 1 变为 0，这恰恰对应于图 G 变为 $\overline{G}$ 时邻接与非邻接之间的转变。那么，对角线上的元素又如何？我们需要从 $J–A$ 中减去 I 以使得 $\overline{G}$ 的邻接矩阵中对角线上的元素为 0。

由我们在航线问题中讨论的 A^k 的 (i,j)-元素 $(A^k)_{ij}$，可以推出 G 中长度为 k 的 v_i-v_j 通道的数目。而且，在计算出从 v_i 到其自身的长度为 2 的通道数 $(A^2)_{ii}$ 时，同时得到了副产品 v_i 的度，因为从 v_i 到其自身的长度为 2 的通道要求访问其邻接点再返回。用符号表示为 $(A^2)_{ii}=\deg(v_i)$。

$(A^3)_{ii}$ 表示什么呢？一条从 v_i 到其自身长度为 3 的通道需要两个邻接点 v_j 和 v_k，这意味着对 v_i 所在的三角形（通常称为 K_3）存在两条通道：一条是沿着三角形的顺时针方向的通道；另一条是沿着三角形的逆时针方向的通道。结点为 v_i、v_j 和 v_k 的三角形在 A^3 对角线上对应此 3 个结点的每个元素中将被计算两次，则此三角形共计算 6 次。如此得到一个很好的定理，其中的迹表示对角线上元素的和。

定理 7.1 图 G 中三角形的数目为 A^3 的迹除以 6。

注意不是图的多重图对应的邻接矩阵不是二进制的，即其元素不仅仅是 0 和 1。这是因为多重图对应的邻接矩阵中的 a_{ij} 等于连接结点 i 和 j 的边的数目。若 G 是多重图而不是图，那么 a_{ij} 至少为 2。

7.2.3 关联矩阵

设 G 有 n 个结点和 m 条边，满足 $V(G)=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ 和 $E(G)=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$，那么，$G$ 的**关联矩阵**为 $n\times m$ 的二进制矩阵 M，定义为：若 v_i 与 e_j 关联，那么 $m_{ij}=1$；否则，$m_{ij}=0$。

例 6 求如图 7.2 所示的标记图的关联矩阵。

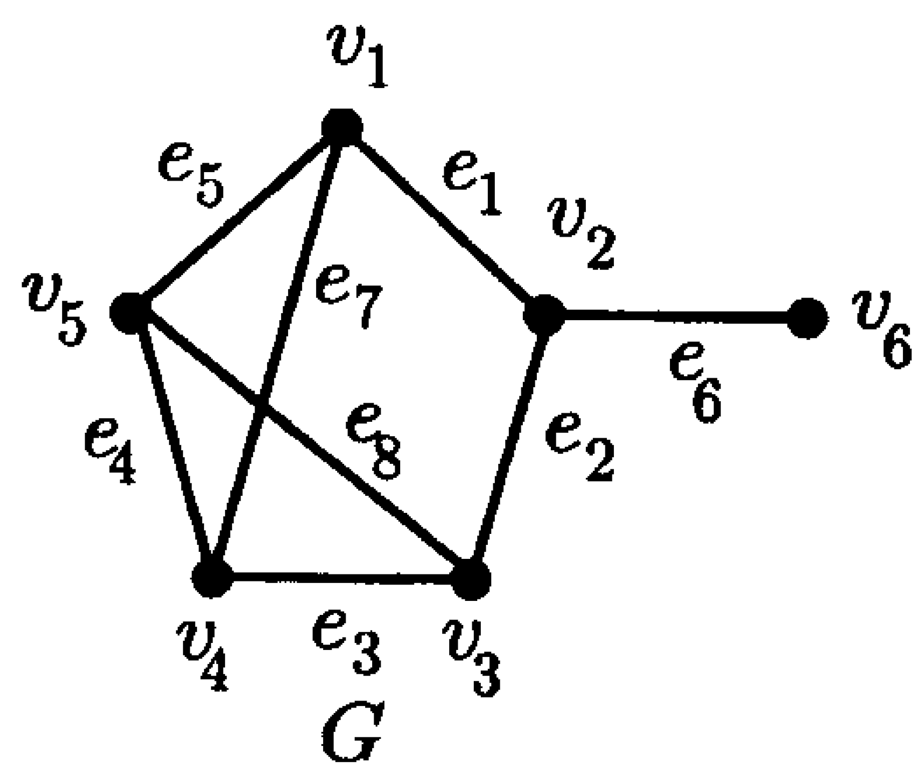

图 7.2

【解】

G 有 6 条边和 8 个结点，其对应的 6×8 的关联矩阵 M 如下所示：

$$M=\begin{bmatrix}1&0&0&0&1&0&1&0\\1&1&0&0&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&1&1&0&0&1\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{bmatrix}$$

注意 M 的第 i 行元素的和为 $\deg(v_i)$，这对邻接矩阵显然也是成立的。而且，M 的每一行的和是 2，因为每条边恰关联于两个结点。M 与 A 之间存在很有趣的关系。令 D 为 $n\times n$ 的对角矩阵（所有的非对角线元素都为 0），满足 $d_{ii}=\deg(v_i)$。

定理 7.2　设 G 满足 $V(G)=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$和 $E(G)=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$，那么，对于邻接矩阵 A、关联矩阵 M 和对角矩阵 D，其中 $d_{ii}=\deg(vi)$，我们有 $MM^t=A+D$。

【证明】

令 v_i 和 v_j 为 G 中的邻接结点，那么 $i\neq j$，令边 $e_k=v_iv_j$，则通过将 M 的第 i 行和第 j 行相乘得到的 MM^t 的 (i,j)-元素为 1，因为两行的第 k 个元素都是 1，而且这仅发生在第 k 个元素，因为结点 v_i 和 v_j 仅共享一条边 e_k。因为结点 v_i 和 v_j（$i\neq j$）邻接，所以等式右端 $A+D$ 的 (i,j)-元素也为 1。

另一方面，若 v_i 和 v_j 不邻接，等式两端的 (i,j)-元素都为 0。在左端，M 的 i 行和 j 行对应元素没有同时为 1 的，因为 v_i 和 v_j 没有共享的边。最后，两端的对角元素一定相等，因为 M 的第 i 行与其自身相乘得到 $\deg(v_i)$。

显然，M 和 A 都能确定图。换句话说，若我们知道 M 或者 A，都能把图画出。不幸的是，逆命题不成立。一个图 G 可以有多个邻接矩阵，因为我们可以改变结点标记序列。对于 M，我们还可以改变边的标记序列。

7.2.4 不同类型图的邻接矩阵

某些类型图若以某种特殊的方式进行标记（这是必须的），那么，这些图的类型可以从它们对应的邻接矩阵中识别出来。若对路 P_5 的结点按序顺次标记，我们来考察一下其邻接矩阵 A。

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{7.2}$$

注意，紧挨着对角线的上方和下方元素都是 1，其余元素都是 0。用数学语言表达为：当且仅当 $|i-j|=1$ 时，$a_{ij}=1$。因此，按序顺次标记路可以很容易地从其邻接矩阵中识别出来。

圈又如何呢？对 C_5 的结点也按序顺次标记，其对应的邻接矩阵 B 应该能保证圈很容易被识别出来（如果沿着圈的结点进行按序顺次标记）。

$$B=\begin{bmatrix}0&1&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\1&0&0&1&0\end{bmatrix} \tag{7.3}$$

观察矩阵(7.2)和(7.3)，你会发现二者存在着一定的联系。后者多出了两个 1：(1, 5)-元素和(5, 1)-元素。当然，圈可以通过将路的第 1 个结点和最后一个结点邻接得到。

另一类可以通过邻接矩阵识别出的图是 K_n。无论 K_n 的结点如何标记，其邻接矩阵 $A(K_n)=J-I$，即对角线上的元素为 0，其余元素全为 1。

7.2.5 子阵和矩阵的块

对一给定的 $m\times n$ 的矩阵 M，其**子阵** B 是一个 $r\times s$（$r\le m,s\le n$）矩阵，它可以通过保留 M 的 r 行（部分行）和 s 列（部分列）得到。这保留下来的行和列其元素数目都分别减少为 s 和 r。子阵 B 可以看作是由 M 特定的 r 行与选出的 s 列的交叉元素组成。当 r 行和 s 列连续时，称子阵为原矩阵的**块**。若块中所有元素都为 0，我们可以写一个大的 0（对 1 也一样）来表示，如图 7.3 所示的 8×6 矩阵，其中的 0 块和 1 块都是 4×3 子阵。

$$\left[\begin{array}{cc} \text{\Huge 0} & \begin{matrix}1&2&5\\8&2&1\\5&4&8\\3&7&4\end{matrix} \\ \begin{matrix}3&2&9\\5&8&8\\0&0&1\\3&8&2\end{matrix} & \text{\Huge 1}\end{array}\right]$$

图 7.3 一个含 4×3 块的 8×6 矩阵

对一含 m 个红色结点和 n 个蓝色结点的二分图 G，其中红色结点从 v_1 到 v_m 进行标记，蓝色结点从 v_{m+1} 到 v_{m+n} 进行标记，则邻接矩阵 A 由 4 个块组成，其左上角和右下角分别为 $m\times m$ 和 $n\times n$ 的 0 块。这是因为二分图中具有相同颜色的结点不邻接。右上角的块记为 B，它是一个 $m\times n$ 的子阵，通过其包含的信息可以画出整个图，因为 A 是对称的，其左下角的块为 B^t。

C_8 是二分的。若我们把红色结点标记为 1, 2, 3, 4，蓝色结点标记为 5, 6, 7, 8。那么其邻接矩阵 A 如(7.4)所示。

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0&0&1\\0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1\\1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0\\1&0&0&1&0&0&0&0\end{bmatrix} \tag{7.4}$$

正如我们所预料的，A 是由左上角和右下角的 0 块、右上角的 4×4 的子阵 B 和左下角的 B^t 组成。当然，我们不再像识别矩阵(7.3)为 C_5 那样，很容易地将圈识别出来。

对于很重要的完全二分图 $K_{n,n}$ 和 $K_{1,n}$，若对结点进行合适的标记，则其邻接矩阵如(7.5)所示，其中子阵 J 为所有元素都为 1 的 $n\times n$ 矩阵。在 $A(K_{1,n})$ 中，右上角的块为 $1\times n$ 的 0 矩阵，左下角为 $n\times 1$ 的 0 块。

$$A(K_{n,n})=\begin{bmatrix}J&0\\0&J\end{bmatrix},\ A(K_{1,n})=\begin{bmatrix}1&0\\0&J\end{bmatrix} \tag{7.5}$$

若 G 为非连通图，其两个连通分量 H 和 K 的阶分别为 r 和 s，对第 1 个连通分量的结点用从 v_1 到 v_r 进行标记，第 2 个连通分量的用从 v_{r+1} 到 v_{r+s} 进行标记。令 H 和 K 的邻接矩阵分别为 B 和 C，那么图 G 的邻接矩阵应为 $\begin{bmatrix}B&0\\0&C\end{bmatrix}$，其中 B 为 $r\times r$ 矩阵，C 为 $s\times s$ 矩