线性算子与微分从属和微分超从属

汤　获　李书海　周海燕　著

科学出版社

线性算子与微分从属和微分超从属

汤 获 李书海 周海燕 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是著者近年来在单复变几何函数论方面所作的最新研究成果. 全书共10章, 主要内容包括: 相关记号与基本定义, 如优化、卷积(Hadamard乘积)、微分从属和微分超从属、一些线性算子等; 由 Liu-Srivastava 算子定义的亚纯多叶函数类的优化问题; 亚纯近于凸函数新子类的一些性质; Ma-Minda 型双向单叶函数新子类的系数估计; 由广义分数阶微积分算子定义的多叶螺旋函数类的包含关系; 与 Srivastava-Khairnar-More 算子有关的包含关系和幅角性质; 上半平面中解析函数类的微分从属和微分超从属; 与广义 Bessel 函数有关的三阶微分从属和微分超从属; 与条形区域有关的解析函数新子类; 与 Noor 积分算子有关的微分从属和微分超从属保持性质.

本书可作为高等学校数学系教师和几何函数论方向研究生的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

线性算子与微分从属和微分超从属/汤获, 李书海, 周海燕著. —北京: 科学出版社, 2016.4

ISBN 978-7-03-048048-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①汤… ②李… ③周… Ⅲ. ①线性算子—研究 ②微分—研究 Ⅳ. ①O177.1 ②O172.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 079492 号

责任编辑: 胡庆家 / 责任校对: 钟 洋
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 铭轩堂

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 4 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2016 年 4 月第一次印刷 印张: 10 1/8
字数: 220 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

几何函数论亦称复变函数几何理论, 是古老而富有生命力的数学分支之一. 早在 19 世纪黎曼 (Riemann) 等就奠定了这方面的理论基础. 几何函数论本身的发展与相关学科的联系十分广泛, 而且这种联系也促进了几何函数论在 20 世纪的迅猛发展, 它的理论和方法不但可以用来解决代数学、计算数学、概率统计、微分方程、解析数论、微分几何、拓扑学等许多数学分支提出的问题, 而且更为普遍地应用于自然科学的诸多领域, 如理论物理、空气动力学、流体力学、弹性力学、天体力学、自动控制等方面.

本书主要介绍线性算子与微分从属和微分超从属的某些性质和应用, 也是著者近年来在单复变几何函数论方面的最新研究成果的积累. 全书共 10 章. 第 1 章主要介绍本书中的有关记号、基本定义和相关概念; 第 2 章介绍由 Liu-Srivastava 算子定义的亚纯多叶函数类的优化问题; 第 3 章介绍亚纯近于凸函数新子类的一些性质; 第 4 章介绍 Ma-Minda 型双向单叶函数新子类的系数估计; 第 5 章介绍由广义分数阶微积分算子定义的多叶螺旋函数类的包含关系; 第 6 章介绍与 Srivastava-Khairnar-More 算子有关的包含关系和幅角性质; 第 7 章介绍上半平面中解析函数类的微分从属和微分超从属; 第 8 章介绍与广义 Bessel 函数有关的三阶微分从属和微分超从属; 第 9 章介绍与条形区域有关的解析函数新子类; 第 10 章介绍与 Noor 积分算子有关的微分从属和微分超从属保持性质. 本书具体分工如下: 第 2, 5, 6, 7, 8, 10 章由汤获负责撰写, 第 9 章由李书海负责撰写, 第 1, 3, 4 章由周海燕负责撰写. 全书由汤获负责统稿校对.

本书写作过程中得到了北京师范大学数学科学学院邓冠铁教授的指导和帮助, 也得到了赤峰学院数学与统计学院各位领导和同事的大力支持, 在此一并表示衷心感谢. 同时, 也十分感谢科学出版社编辑为本书的出版所做的大量工作.

本书的出版得到了赤峰学院学术专著出版基金、国家自然科学基金 (11561001, 11271045)、内蒙古自然科学基金 (2014MS0101) 和内蒙古高等学校科研项目 (NJZY240, NJZY16251) 的资助.

限于著者的学识水平, 书中错误或不妥之处在所难免, 恳请各位专家和读者不吝赐教指正.

著　者①

2016 年 1 月

① thth2009@163. com, lishms66@sina. com, zhouhaiyan. 1983@163. com.

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　记号与基本定义

为了后面叙述方便, 我们先给出本书中的一些常用记号和基本定义. 我们用 $\mathbb{C}$ 表示复平面, $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的单位开圆盘, $\mathbb{U}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} = \mathbb{U} \setminus \{0\}$ 表示复平面 $\mathbb{C}$ 中的去心开圆盘. 另外, 我们用 $\mathbb{R}$ 表示实数集, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ 为正整数集, 且记 $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}_0^- = \{0, -1, -2, \cdots\}$ 和 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

设 $\mathcal{H}(\mathbb{U})$ 表示在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内解析的函数类. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $a \in \mathbb{C}$, 令

$$\mathcal{H}[a, n] = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{U}) : f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\},$$

且记 $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}[0, 1]$ 和 $\mathcal{H} = \mathcal{H}[1, 1]$.

设 $\mathcal{A}$ 表示在 $\mathbb{U}$ 内解析且具有如下标准形式:

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \tag{1.1.1}$$

的规范化的函数类 (这里规范化是指 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$). 若函数 $f(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内是一一对应的, 则称函数 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶, 也即对 z_1, $z_2 \in \mathbb{U}$, 当 $z_1 = z_2$ 时, 有 $f(z_1) = f(z_2)$ 成立. 此时, 我们用 $\mathcal{S}$ 表示 $\mathbb{U}$ 内所有单叶函数类. 例如, Koebe 函数

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n,$$

即为函数类 $\mathcal{S}$ 中的一个重要函数. 事实上, 上式可写为

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

从上式我们不难看出, Koebe 函数将 $\mathbb{U}$ 单叶映射到除去从 $\frac{1}{4}$ 到 ∞ 的一条射线的整个复平面. 关于函数类 $\mathcal{S}$ 的更多子类和性质, 读者可参见文献 [9].

由于单叶函数是一对一且可逆的, 其逆函数在整个单位圆盘内不一定有定义. 但是, 由著名的 Koebe-$\frac{1}{4}$ 定理[49] 可知, 半径小于 1/4 的圆盘内的所有像点必包含

在 $f(\mathbb{U})$ 内. 因此, 对每一个单叶函数 $f \in \mathcal{S}$, 其逆函数 f^{-1} 存在, 且满足

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{U})$$

和

$$f(f^{-1}(w)) = w \quad \left(|w| < r_0(f),\ r_0(f) \geqslant \frac{1}{4}\right),$$

其中

$$f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)w^4 + \cdots .$$

如果函数 f 及其逆函数 f^{-1} 在 $\mathbb{U}$ 内单叶, 则称函数 $f \in \mathcal{A}$ 在 $\mathbb{U}$ 内是双向单叶的, 我们用 σ 表示定义在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内的双向单叶函数类.

解析函数之间的从属概念可以追溯到 1925 年, 它是将两个解析函数通过一个特殊的解析函数有机地联系起来, 其定义为

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆盘 $\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\}$ 内解析, 若存在一个 Schwarz 函数 ω, 在 $\mathbb{U}$ 内解析且

$$\omega(0) = 0 \quad 和 \quad |\omega(z)| < 1 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

满足

$$f(z) = g(\omega(z)) \quad (z \in \mathbb{U}),$$

则称函数 $f(z)$ 从属于 $g(z)$, 或称 $g(z)$ 超从属于 $f(z)$, 记作

$$f(z) \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{1.1.2}$$

特别地, 如果函数 $g(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶, 则有 (细节可参见文献 [129])

$$f(z) \prec g(z) \ \ (z \in \mathbb{U}) \Leftrightarrow f(0) = g(0) \quad 和 \quad f(\mathbb{U}) \subset g(\mathbb{U}).$$

我们用 $\mathcal{P}$ 表示满足 $\mathrm{Re}p(z) > 0 \ \ (z \in \mathbb{U})$ 的函数

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \in \mathcal{H}(\mathbb{U})$$

的全体. 此时, $\mathcal{P}$ 中的任一函数称为正实部函数. 值得注意的是, $\mathcal{P}$ 中函数不必是单叶的, 例如, 对任意的 $n \in \mathbb{N}_0$, 有 $p(z) = 1 + z^n \in \mathcal{P}$, 但是, 当 $n \geqslant 2$ 时, 该函数不是单叶的.

由于 $p(z) \in \mathcal{P}$ 可以等价地写成

$$p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \quad (z \in \mathbb{U}),$$

故存在一个 Schwarz 函数 $\omega(z)$, 使得

$$p(z)=\frac{1+w(z)}{1-w(z)} \quad \text{或者} \quad \omega(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}.$$

由此我们即可得到

定理 1.1.1(正实部函数的偏差定理)[9,138] 若 $p(z)\in\mathcal{P}$, 则对 $|z|=r<1$, 有

$$\frac{1-r}{1+r}\leqslant|p(z)|\leqslant\frac{1+r}{1-r}$$

和

$$|p'(z)|\leqslant\frac{2}{(1-r)^2},$$

并且这些不等式都是精确的. 当且仅当 $p(z)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z}$ $(t\in[0,2\pi])$ 时等号成立.

定理 1.1.2[9,138] 若 $p(z)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_nz^n\in\mathcal{P}$, 则有 $|p_n|\leqslant 2$. 当且仅当 $p(z)=\dfrac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}z}$ $(t\in[0,2\pi])$ 时等号成立.

记满足 $\mathrm{Re}p(z)>\gamma$ $(0\leqslant\gamma<1;\ z\in\mathbb{U})$ 的函数类为 $\mathcal{P}(\gamma)$. 对任意的 $A,B\in\mathbb{R}$, $-1\leqslant B<A\leqslant 1$, 我们用 $\mathcal{P}[A,B]$ 表示满足如下从属关系

$$p(z)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\quad(z\in\mathbb{U})$$

的函数类 (参见文献 [124]). 特别地, 我们有 $\mathcal{P}[1,-1]=\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{P}[1-2\gamma,-1]=\mathcal{P}(\gamma)$ $(0\leqslant\gamma<1)$.

下面, 我们介绍一些常用的解析函数类.

设 $D\subset\mathbb{C}$ 为一个区域, $z_0\in D$, 如果连接点 z_0 到 D 中任一点 z 的直线段都在 D 内, 则称 D 是关于点 z_0 的星象域; 如果连接 D 中任意两点的直线段都在 D 内, 则称 D 是凸象域.

若函数 $f\in\mathcal{A}$ 映射 $\mathbb{U}$ 到一个关于点 $z_0=0$ 的星象域, 则称函数 f 是一个关于原点的星象函数 (或简称星象函数). 我们记 $\mathcal{A}$ 中所有星象函数的全体为 $\mathcal{S}^*$, 其解析描述为

$$\mathcal{S}^*=\left\{f\in\mathcal{A}:\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>0,z\in\mathbb{U}\right\}.\tag{1.1.3}$$

若函数 $f\in\mathcal{A}$ 映射 $\mathbb{U}$ 到一个凸象域, 则称函数 f 是一个凸象函数. 我们记 $\mathcal{A}$ 中所有凸象函数的全体为 $\mathcal{K}$, 其解析描述为

$$\mathcal{K}=\left\{f\in\mathcal{A}:\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0,z\in\mathbb{U}\right\}.\tag{1.1.4}$$

在文献 [125] 中, Roberston 分别引进了 α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ 阶星象函数类和 α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ 阶凸象函数类, 其定义如下:

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, 0 \leqslant \alpha < 1,\ z \in \mathbb{U} \right\} \tag{1.1.5}$$

和

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, 0 \leqslant \alpha < 1,\ z \in \mathbb{U} \right\}. \tag{1.1.6}$$

由 (1.1.3)–(1.1.6) 式, 我们容易看出

$$f \in \mathcal{K} \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*, \quad f \in \mathcal{K}(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}^*(\alpha),$$

$$\mathcal{S}^*(\alpha) \subseteq \mathcal{S}^*(0) = \mathcal{S}^*, \quad \mathcal{K}(\alpha) \subseteq \mathcal{K}(0) = \mathcal{K}$$

和

$$f \in \mathcal{K} \Rightarrow f \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right).$$

在文献 [126] 中, Spacek 给出了星象函数类 $\mathcal{S}^*$ 的一种推广形式, 即 β-螺旋函数类, 其定义为

设 $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, 若函数 $f \in \mathcal{A}$ 满足

$$\mathrm{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

则称函数 f 为 $\mathbb{U}$ 内的 β-螺旋函数. 我们把 $\mathbb{U}$ 内所有 β-螺旋函数的全体记为 $\mathcal{S}^*_\beta$.

在此基础上, Libera[127] 引入并研究了 α 阶 β-螺旋函数类, 其定义为

设 $0 \leqslant \alpha < 1$ 和 $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$, 若函数 $f \in \mathcal{A}$ 满足

$$\mathrm{Re}\left\{ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta} \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha \cos\beta \quad (z \in \mathbb{U}),$$

则称函数 f 为 $\mathbb{U}$ 内的 α 阶 β-螺旋函数.

我们把 $\mathbb{U}$ 内所有 α 阶 β-螺旋函数的全体记为 $\mathcal{S}^*_\beta(\alpha)$. 特别地, 我们有 $\mathcal{S}^*_0(\alpha) = \mathcal{S}^*(\alpha)$ 和 $\mathcal{S}^*_0(0) = \mathcal{S}^*$.

在文献 [128] 中, Kaplan 给出了星象函数类 $\mathcal{S}^*$ 的另一种推广形式, 即近于凸函数类, 其定义如下:

设函数 $f \in \mathcal{A}$, 若存在一个函数 $g \in \mathcal{S}^*$, 使得

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{zf'(z)}{g(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

或者存在一个函数 $g \in \mathcal{K}$, 使得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

则称函数 f 为 $\mathbb{U}$ 内的近于凸函数. 我们把 $\mathbb{U}$ 内所有近于凸函数的全体记为 $\mathcal{C}$.

在文献 [9] 中, Goodman 引入了 α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ 阶近于凸函数类 $\mathcal{C}(\alpha)$: 若存在一个函数 $g \in \mathcal{S}^*$, 使得

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} > \alpha \quad (z \in \mathbb{U}).$$

特别地, 有 $\mathcal{C}(0) = \mathcal{C}$. 而且, 我们注意到函数类 $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}^*$, $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{C}$ 之间有如下的关系:

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{S}.$$

设 $\mathcal{A}_p$ 表示在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内解析且具有如下标准形式

$$f(z) = z^p + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+p} z^{n+p} \quad (p \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{U}) \tag{1.1.7}$$

的函数类. 特别地, 当 $p = 1$ 时, 我们有 $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$.

注 1.1.1 单叶函数类中的星象函数、凸象函数、近于凸函数以及螺旋函数的概念和相关性质都可以推广到多叶解析函数类和亚纯函数类中. 对于这些函数类的定义和基本性质, 我们将在本书后面相关章节中给出.

1.2 相关概念

1.2.1 优化

1970 年, Roberston 在文献 [130] 中给出了较从属关系稍弱的一个提法, 即拟从属的概念.

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内解析, 若存在一个解析函数 $\varphi(z)$, 使得 $\dfrac{f(z)}{\varphi(z)}$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析且

$$|\varphi(z)| \leqslant 1 \quad \text{和} \quad |\omega(z)| \leqslant |z| < 1 \quad (z \in \mathbb{U}),$$

满足

$$f(z) = \varphi(z) g(\omega(z)) \quad (z \in \mathbb{U}), \tag{1.2.1}$$

则称函数 $f(z)$ 拟从属于 $g(z)$, 记作

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} \prec g(z) \quad (z \in \mathbb{U}). \tag{1.2.2}$$

注意到, 当 $\varphi(z)=1$ 时, 拟从属关系 (1.2.2) 式即为从属关系 (1.1.2) 式, 也即说明从属关系是拟从属关系的特殊情形.

1967 年, MacGregor 在文献 [22] 中给出了优化的定义.

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在单位圆盘 $\mathbb{U}$ 内解析, 如果存在一个函数 φ 在 $\mathbb{U}$ 内解析且满足

$$|\varphi(z)| \leqslant 1 \quad \text{和} \quad f(z)=\varphi(z)g(z) \quad (z\in\mathbb{U}),$$

则称函数 $f(z)$ 优于 $g(z)$, 记作

$$f(z) \ll g(z) \quad (z\in\mathbb{U}). \tag{1.2.3}$$

注意到, 若在 (1.2.1) 式中取 $\omega(z)=z$, 则拟从属关系 (1.2.2) 式即为优化关系 (1.2.3) 式. 因此, 优化的概念与解析函数间拟从属的概念非常相似.

关于解析函数间各种优化问题的研究, 可参见 Altintas 等[1,2], Goyal 等[13−15], Goswami 等[10−12], Li, Tang 和 Ao[16], Tang 等[29,30,145] 以及 Prajapat 和 Aouf[26] 的工作.

1.2.2 卷积 (Hadamard 乘积)

卷积是几何函数论中一个非常重要的概念和研究工具, 它对线性算子的构造和解析函数的性质研究起到关键性的作用.

1982 年, Ruscheweyh 在文献 [131] 中系统地阐述了卷积的基本理论及其应用.

设函数 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$ 在圆盘 $|z|<r_1$ 内解析, 函数 $g(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$ 在圆盘 $|z|<r_2$ 内解析, 我们称 $f*g=(f*g)(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kb_kz^k$ 为函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的 Hadamard 乘积. 显然, $(f*g)(z)$ 在 $|z|<r_1r_2$ 内解析. 对于上述 Hadamard 乘积, 有如下的积分公式:

$$(f*g)(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_{|\xi|=\rho}\frac{f(z/\xi)g(\xi)}{\xi}\mathrm{d}\xi \quad \left(\frac{|z|}{r_1}<\rho<r_2\right).$$

在此意义下, 我们又称 $f*g$ 为函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的卷积. 从卷积的定义不难看出, 卷积满足交换律、结合律以及对加法的分配律等性质.

特别地, 若函数 $f, g\in\mathcal{A}$, 其中函数 f 由 (1.1.1) 式给出, 函数 g 由下式

$$g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$$

给出, 则函数 f 和 g 的 Hadamard 乘积 (或卷积) $f*g$ 为

$$(f*g)(z):=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n=(g*f)(z).$$

关于各类解析函数的卷积性质及其应用研究, 读者可参见文献 [152], [155], [158].

注 1.2.1 单叶函数类中的卷积概念和性质都可以直接推广到多叶解析函数类和亚纯函数类中.

1.2.3 微分从属和微分超从属

微分从属是与微分不等式和微分方程有关的一种从属关系. 20 世纪 80 年代, Miller 和 Mocanu[73,132] 利用从属的方法将实函数中微分不等式的一些性质拓展到复函数中, 从而奠定了微分从属问题研究的基础. 下面, 我们简单介绍关于微分从属理论的一些相关定义和主要结论, 细节可参见文献 [43], [73], [139].

定义 1.2.1 设 ψ 为 $\mathbb{C}^3\times\mathbb{U}\Rightarrow\mathbb{C}$ 的映射, 函数 $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶. 如果 $p(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析且满足二阶微分从属

$$\psi(p(z),zp'(z),z^2p''(z);z)\prec h(z), \tag{1.2.4}$$

则称 $p(z)$ 为上述微分从属的一个解. 若对所有的解 $p(z)$, 有 $p(z)\prec q(z)$, 则称 $q(z)$ 为微分从属解的一个控制. 进一步, 若存在一个控制 $\widetilde{q}(z)$ 对所有适合 (1.2.4) 式的控制 $q(z)$, 均有 $\widetilde{q}(z)\prec q(z)$, 则称 $\widetilde{q}(z)$ 为最佳控制.

定义 1.2.2 设 $\mathcal{Q}$ 表示在 $\overline{\mathbb{U}}\backslash E(q)$ 上单叶解析且满足当 $\xi\in\partial\mathbb{U}\backslash E(q)$ 时 $q'(\xi)\neq 0$ 的函数集合, 其中

$$E(q)=\left\{\xi\in\partial\mathbb{U}:\lim_{z\to\xi}q(z)=\infty\right\}$$

为闭集. 特别地, 若 $q(0)=a$, 则记 $\mathcal{Q}$ 为 $\mathcal{Q}(a)$.

定义 1.2.3 设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的子集, 函数 $q\in\mathcal{Q}$ 和 $n\in\mathbb{N}$. 又设函数 $\psi:\mathbb{C}^3\times\mathbb{U}\to\mathbb{C}$ 满足: 当

$$r=q(\xi),\quad s=k\xi q'(\xi)\quad 和\quad \mathrm{Re}\left\{\frac{t}{s}+1\right\}\geqslant k\mathrm{Re}\left\{\frac{\xi q''(\xi)}{q'(\xi)}+1\right\}$$

时, 有

$$\psi(r,s,t;z)\notin\Omega$$

成立, 其中 $z\in\mathbb{U}$, $\xi\in\partial\mathbb{U}\backslash E(q)$ 和 $k\geqslant n$. 我们则称上述函数 ψ 的集合为允许函数类, 记作 $\Psi_n[\Omega,q]$. 特别地, 记 $\Psi_1[\Omega,q]=\Psi[\Omega,q]$.

设 Δ 为 $\mathbb{C}$ 的任一子集, Miller 和 Mocanu[73] 借助上述允许函数的概念研究了如下蕴含关系

$$\left\{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in \mathbb{U}\right\} \subset \Omega \Rightarrow p(\mathbb{U}) \subset \Delta$$

成立的条件, 从而获得了著名的二阶微分从属定理.

定理 1.2.1[73]　设 $\psi \in \Psi_n[\Omega, q]$ 且 $q(0) = a$. 若函数 $p \in \mathcal{H}[a, n]$ 且满足

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \in \Omega,$$

则有

$$p(z) \prec q(z) \quad (z \in \mathbb{U})$$

成立.

特别地, 若 Ω 为单连通区域, $h(z)$ 为 $\mathbb{U}$ 到 Ω 的一个共形映射, 则上述定理等价于

$$\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \prec h(z) \Rightarrow p(z) \prec q(z).$$

接着, 在文献 [102] 中, Miller 和 Mocanu 研究了二阶微分从属的对偶问题 (即二阶微分超从属问题), 提出了二阶微分超从属和最佳从属子的概念.

定义 1.2.4　设 ψ 为 $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ 的映射, 函数 $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析. 如果 $p(z)$ 和 $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶且满足二阶微分超从属

$$h(z) \prec \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z), \tag{1.2.5}$$

则称 $p(z)$ 为上述微分超从属的一个解. 若对所有的解 $p(z)$, 有 $q(z) \prec p(z)$, 则称 $q(z)$ 为微分超从属解的一个从属子. 进一步, 若存在一个单叶从属子 $\widetilde{q}(z)$ 对所有适合 (1.2.5) 式的从属子 $q(z)$, 均有 $q(z) \prec \widetilde{q}(z)$, 则称 $\widetilde{q}(z)$ 为最佳从属子.

定义 1.2.5　设 Ω 为 $\mathbb{C}$ 的子集, 函数 $q \in \mathcal{H}[a, n]$ 且 $q'(z) \neq 0$. 又设函数 $\psi : \mathbb{C}^3 \times \bar{\mathbb{U}} \to \mathbb{C}$ 满足: 当

$$r = q(z), \quad s = \frac{zq'(z)}{m} \quad 和 \quad \mathrm{Re}\left\{\frac{t}{s} + 1\right\} \leqslant \frac{1}{m}\mathrm{Re}\left\{\frac{zq''(z)}{q'(z)} + 1\right\}$$

时, 有

$$\psi(r, s, t; \xi) \in \Omega$$

成立, 其中 $z \in \mathbb{U}$, $\xi \in \partial\mathbb{U}$ 和 $m \geqslant n \geqslant 1$. 我们则称上述函数 ψ 的集合为允许函数类, 记作 $\Psi'_n[\Omega, q]$. 特别地, 记 $\Psi'_1[\Omega, q] = \Psi'[\Omega, q]$.

在定义 1.2.4 和定义 1.2.5 的基础上, Miller 和 Mocanu 讨论了如下关于二阶微分超从属的蕴含关系

$$\Omega \subset \{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in \mathbb{U}\} \Rightarrow \Delta \subset p(\mathbb{U})$$

成立的条件, 获得了与二阶微分从属相对应的结果, 即二阶微分超从属定理.

定理 1.2.2[102] 设 $\psi \in \Psi'_n[\Omega, q]$ 且 $q(0) = a$. 若函数 $p \in \mathcal{Q}(a)$, 且 $\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内单叶, 则

$$\Omega \subset \{\psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) : z \in \mathbb{U}\}$$

蕴含

$$q(z) \prec p(z) \quad (z \in \mathbb{U}).$$

特别地, 若 Ω 为单连通区域, $h(z)$ 在 $\mathbb{U}$ 内解析且为 $\mathbb{U}$ 到 Ω 的一个共形映射, 则上述定理等价于

$$h(z) \prec \psi(p(z), zp'(z), z^2p''(z); z) \Rightarrow q(z) \prec p(z).$$

关于二阶微分从属和微分超从属的其他性质和应用研究, 读者可参见文献 [93–97, 99, 100, 105, 109, 133, 156–157, 164].

最近, Antonino 和 Miller[111] 将二阶微分从属概念和基本理论推广到三阶, 得到了三阶微分从属理论. 在此基础上, Tang 和 Deniz[134] 结合解析函数空间上与广义 Bessel 函数有关的一类算子研究了三阶微分从属理论的一些应用. 随后, Tang, Srivastava, Deniz 和 Li[135] 又将二阶微分超从属理论推广到三阶, 研究了三阶微分从属的对偶问题 (即三阶微分超从属问题), 建立了三阶微分超从属理论, 并结合文献 [134] 中的算子讨论了三阶微分超从属理论的一些应用 (具体细节见本书第 8 章). 紧接着, Tang, Srivastava, Li 和 Ma 在文献 [161] 中讨论了由 Liu-Srivastava 算子刻画的多叶亚纯函数的三阶微分从属和三阶微分超从属问题.

而对于上半平面中的微分从属和微分超从属的概念和基本理论, 我们将在本书的第 7 章中作详细介绍, 这里不再赘述.

1.2.4 一些线性算子

线性算子在几何函数论中的应用最早源于 Alexander[136] 的工作, 他利用 Alexander 积分算子给出了星象函数和凸象函数之间的一个等价关系. 近年来, 几何函数论中的线性算子层出不穷, 但其构造方法基本相似. 下面, 我们简要介绍几何函数论中常用的几类线性算子.

1975 年, Ruscheweyh[86] 利用卷积定义了一类线性算子 $\mathcal{D}^\lambda : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 其定义为

$$\mathcal{D}^\lambda f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}} * f(z) \quad (\lambda > -1,\ z \in \mathbb{U}),$$

我们称算子 $\mathcal{D}^\lambda$ 为 Ruscheweyh 算子, 这里函数 $f \in \mathcal{A}$ 由 (1.1.1) 式给出. 由上式我们容易得到

$$\mathcal{D}^n f(z) = \frac{z(z^{n-1}f(z))^{(n)}}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0),$$

且有 $\mathcal{D}^0 f(z) = f(z)$ 和 $\mathcal{D}^1 f(z) = zf'(z)$.

1984 年, Carlson 和 Shaffer 在文献 [137] 中利用卷积定义了一类线性算子 $\mathcal{L}(a,c) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 其定义为

$$\mathcal{L}(a,c)f(z) = \varphi(a,c;z) * f(z) \quad (f \in \mathcal{A}),$$

我们称算子 $\mathcal{L}(a,c)$ 为 Carlson-Shaffer 算子, 其中

$$\varphi(a,c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+1} \quad (c \notin \mathbb{Z}_0^- = \{0,-1,-2,\cdots\},\ z \in \mathbb{U}),$$

而 $(\nu)_k$ 为 Pochhammer 记号, 且有

$$(\nu)_k = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)} = \begin{cases} 1, & k=0,\ \nu \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}; \\ \nu(\nu+1)\cdots(\nu+k-1), & k \in \mathbb{N},\ \nu \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

设 $f_n(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{n+1}}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$, 定义函数 $f_n^{(-1)}(z)$ 满足条件

$$f_n(z) * f_n^{(-1)}(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \quad (z \in \mathbb{U}).$$

1999 年, Noor 在文献 [74] 中利用卷积逆定义了一类线性积分算子 $\mathcal{I}_n : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 其定义为

$$\mathcal{I}_n f(z) = f_n^{(-1)}(z) * f(z) = \left[\frac{z}{(1-z)^{n+1}}\right]^{(-1)} * f(z),$$

我们称算子 $\mathcal{I}_n$ 为 Noor 积分算子. 特别地, 我们有 $\mathcal{I}_0 f(z) = zf'(z)$ 和 $\mathcal{I}_1 f(z) = f(z)$.

在此基础上, Choi, Saigo 和 Srivastava[67] 定义了一类线性积分算子 $\mathcal{I}_{\lambda,\mu} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 其定义如下:

$$\mathcal{I}_{\lambda,\mu} f(z) = f_{\lambda,\mu}(z) * f(z) \quad (f \in \mathcal{A},\ \lambda > -1,\ \mu > 0),$$

我们称算子 $\mathcal{I}_{\lambda,\mu}$ 为 Choi-Saigo-Srivastava 算子, 其中

$$f_\lambda(z) = \frac{z}{(1-z)^{\lambda+1}}, \quad f_\lambda(z) * f_{\lambda,\mu}(z) = \frac{z}{(1-z)^\mu} \quad (\lambda > -1,\ \mu > 0).$$

特别地, 我们有 $\mathcal{I}_{n,2} = \mathcal{I}_n$, 所以 Choi-Saigo-Srivastava 算子是 Noor 积分算子的一种推广形式.

设参数 $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, 2, \cdots, q)$ 和 $\beta_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_0^-$ ($\mathbb{Z}_0^- = 0, -1, -2, \cdots,$ $j = 1, 2, \cdots, s$), 定义广义超几何函数 ${}_qF_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s; z)$ 如下[24, 28]:

$$
{}_qF_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_q)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_s)_k} \frac{z^k}{k!}
$$

$$
(q \leqslant s + 1,\ q, s \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},\ z \in \mathbb{U}).
$$

特别地, 若取 $q = 2, s = 1, \alpha_1 = a, \alpha_2 = b$ 和 $\beta_1 = c$, 则广义超几何函数 ${}_qF_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s; z)$ 退化为 Gauss 超几何函数 ${}_2F_1(a, b; c; z)$, 即有

$$
{}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}.
$$

1999 年, Dziok 和 Srivastava[6] 利用卷积与广义超几何函数定义了一类线性算子 $\mathcal{H}(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, 其定义为

$$
\mathcal{H}(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s) f(z) = [z\, {}_qF_s(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s; z)] * f(z),
$$

我们称算子 $\mathcal{H}(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s)$ 为 Dziok-Srivastava 算子. 若函数 $f \in \mathcal{A}$ 由 (1.1.1) 式给出, 则有

$$
\mathcal{H}(\alpha_1, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \cdots, \beta_s) f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_k \cdots (\alpha_q)_k}{(\beta_1)_k \cdots (\beta_s)_k} a_{k+1} \frac{z^{k+1}}{k!}.
$$

2004 年, Cho, Kwon 和 Srivastava[81] 借助广义 Carlson-Shaffer 算子

$$
\varphi_p(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} z^{k+p},
$$

定义了一类线性算子 $\mathcal{I}_p^\lambda(a, c) : \mathcal{A}_p \to \mathcal{A}_p$, 其定义如下:

$$
\mathcal{I}_p^\lambda(a, c) f(z) = [\varphi_p(a, c; z)]^{(-1)} * f(z) \quad (\lambda > -p),
$$

我们称算子 $\mathcal{I}_p^\lambda(a, c)$ 为 Cho-Kwon-Srivastava 算子, 其中函数 $f \in \mathcal{A}_p$ 由 (1.1.7) 式给出, $[\varphi_p(a, c; z)]^{(-1)}$ 满足等式

$$
[\varphi_p(a, c; z)]^{(-1)} * \varphi_p(a, c; z) = \frac{z^p}{(1 - z)^{\lambda + p}}.
$$

需要说明的是, 几何函数论中的线性算子非常丰富, 上述提到的仅是其中的部分算子. 对于本书中用到的 Liu-Srivastava 算子、广义分数阶微积分算子、广义 Libera 积分算子和 Srivastava-Khairnar-More 算子等, 我们将在后面相关章节中作详细介绍.