

联考综合能力
MBA

MPA

MPAcc

2017版

大纲解析人

数学顿悟精练

• [主编] 陈剑 •

高分指南姊妹书

> 100余种核心题型, 近1200道经典习题
8套全真模拟试题, 考点、题型全面覆盖

适用专业: 管理类联考(199科目)

MBA/MPA/MPAcc/审计/工程管理/旅游管理/图书情报

联考综合能力
MBA

MPA

MPAcc

大纲解析人 数学顿悟精练

编委

主任: 陈剑

委员: 陈剑 曹其军 杨武金 陈君华 饶思中 何敬 齐辙
薛冰 韩健 王诚 刘玉芳 李屹 魏祥 杨晶

图书在版编目(CIP)数据

MBA MPA MPAcc 联考综合能力大纲解析人数学顿悟精练/陈剑主编. —北京:北京理工大学出版社, 2016. 4

ISBN 978-7-5682-2061-3

I. ①M… II. ①陈… III. ①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 059373 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

(010) 82562903 (教材售后服务热线)

(010) 68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 北京长阳汇文印刷厂

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 23

字 数 / 574 千字

版 次 / 2016 年 4 月第 1 版 2016 年 4 月第 1 次印刷

定 价 / 52.00 元

责任编辑 / 陈莉华

文案编辑 / 陈莉华

责任校对 / 周瑞红

责任印制 / 边心超

本书特色

- 深度** 针对联考题型，深入分析探究，适应考试最新难度标准。
- 高度** 逐题深度剖析，洞察命题新动向，指导考生把握命题脉搏，赢取高分。
- 精度** 提升实战技巧，便于考生有的放矢，查漏补缺，以求做到触类旁通，从容应考。
- 速度** 考试中取胜的关键是速度，提高速度依赖于技巧，通过举一反三阐明解题思路，全面展现题型变化，使考生掌握考试做题技巧。
- 角度** 针对考试题型，多角度把握命题思路、方法和原则，为考生提供准确领航和理性分析。

内容简介

本书紧扣考试大纲，强调解题技能和归纳分析能力。全书按照考试内容分为6章和1个附录。每章先将考点公式进行总结，再将考纲知识点归纳成100余种考试核心题型，精心挑选题目，逐题深度剖析，指导考生把握命题脉络，接着进行技能扩展，最后附上顿悟模块练习。附录部分是8套全真模拟试题，以帮助考生进行全真模拟练习。本书以提升实战能力为宗旨，将历年试题解题中用到的技巧系统总结，汇总了固定解题思维模式，又灵活演变成做题模板和解题套路，无论基础怎样，都能收到“水到渠成”和“润物细无声”之功效，让考生在临考前有限的时间内抓住重要考点，考场上从容应考，轻取高分。

本书以实用性和技巧性为基础，强调考试方法和做题技巧，立竿见影、快速突破，迅速提高读者的数学解题能力，适合参加管理类专业学位联考的考生在强化与冲刺阶段复习使用。

使用指南

1. 本书与《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》的区别

《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》（简称《数学高分指南》）是教材，配合讲课使用，其例题和题型丰富，但练习题数量较少。

《MBA MPA MPAcc 联考综合能力大纲解析人数学顿悟精练》是习题，配合《数学高分指南》使用，本书题目都是精心挑选的，而且分模块练习，提高效果很快。教材+习题=高分！

2. 本书的难度

本书的难度介于《数学高分指南》的基础篇和提高篇之间，适合做完《数学高分指南》的基础篇后，再看本书。对于第一轮复习的同学，不适合直接看本书，应先通过《数学高分指南》巩固好基础再来学习本书。

3. 本书的适用对象

本书适用于：想多练习勤刷题的考生；《数学高分指南》做过两遍的“二战生”；做过《数学高分指南》基础篇的“一战生”；想在数学部分拿高分的考生。

4. 本书何时使用

如果《数学高分指南》的基础篇已经差不多看完，就可以同步看此书了。尤其是报考 MPAcc 和 MAud 的考生。具体每本书的使用步骤如下：

数学高分指南



数学顿悟精练



数学历年真题^①



数学模拟冲刺^②

5. 时间安排

建议每章用两周的时间，前 6 章用 12 周，即 3 个月的时间完成。第二遍重点看错题和不会做的题目。后面附的 8 套全真模拟试题可以在《数学高分指南》和本书 6 章内容都完成后，自我检测使用，每周模拟 2~3 套，大致 1 个月的时间完成 8 套全真模拟试题。

6. 增值服务

针对本书，如果读者有任何疑问，可以在 www.chenjian.cc 的留言板上留言，我们会有专业的团队进行答疑，百分之百回复。此外，博客还会有很多配套学习视频供大家学习使用。

① 《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学历年真题名家详解》

② 《MBA MPA MPAcc 联考 6 年真题 4 套模拟（综合能力+英语）》（2016 年 6 月出版），《MBA MPA MPAcc 联考最后 4 套卷（综合能力+英语）》（2016 年 11 月出版）

前 言

为了帮助报考管理类专业学位联考的考生更好地提升做题技能，我们按照最新考试大纲精心编写了本书。

习题的作用不言而喻，一套内容完整、编排合理、分析透彻、解答规范、总结到位的精选习题，是广大考生的重要复习素材，是了解试题信息、分析命题动态、总结命题规律最直接、最宝贵的第一手资料。通过认真分析研究练习，可以发现命题的特点和趋势，找到知识点之间的有机联系，总结每部分内容的考查重点、难点，凝练解题思路、方法和技巧。在研究完本书后，考生可以很清楚历年考试出题的重点和难点，明确考试方向，使备考阶段的总结性复习更有针对性和目的性，真正做到有的放矢和事半功倍。

重点题型和拓展题型的演练能反映考生对数学知识、能力和水平的掌握情况，展示数学考试的全貌，使考生能明确考试的重点、难点及常考点，让考生弄清各知识点之间的相互联系，以便对考试有一个全局性的认识 and 把握。编者结合多年的教学经验与考生的疑难困惑，精心创新设计出很好的练习题，以期提高考生识别题型变异的能力。本部分总结了不同题型的解题方法，注重一题多解，开阔解题思路，使所学知识融会贯通，并能快速找到解题突破口。

顿悟精练是让广大考生能够找到身临其境的感觉，在有限的时间内抓住重点，有的放矢，查漏补缺。对命题思路进行深入细致的解析，相信有助于考生把握解题规律、拓展分析思路、提炼答题技巧，从而大大提高应试水平。通过全真演练，掌握考试的技巧和方法，考生在考场上就能从容应考，轻取高分。

本书是《MBA、MPA、MPAcc 联考综合能力数学高分指南》（简称《数学高分指南》）的姊妹书，是以提高实战能力为基点，以强调考试方法和做题技巧为宗旨，以实战性强和考前冲刺为核心，以快速提高和立竿见影为目的，对典型考题从多侧面、多视角进行讲解，注重对多解法、多类型题目的训练，培养发散思维和技巧应用能力，因而本书是数学成功的必备辅导书。

复习前期建议考生按《数学高分指南》的章节内容逐章逐节精读一遍，夯实基础，然后再看本书。尽管本书每题均有详尽的解析，但希望考生不要轻易去查看详解，应先培养自己独立思考的能力，做完题目后，再去看详解，仔细回顾、研究一下自己的解答过程与书中有什么异同，如果存在疑问，应尽早查清原因。看看自己是在基本知识点方面有欠缺，还是在做题技巧、考点的综合与灵活应用等方面掌握不够。注意，这样的归纳总结过程是必不可少的，是提

好成绩的必经途径，其重要性远远超过做题本身。成功来源于自信，考生只要充满信心，通过脚踏实地地学习和领悟，就一定会有质的提高。

在本书的编写过程中，编者参阅了众多有关的教材和复习指导书，引用了一些例子，恕不一一提及，谨对所有相关的作者表示真诚的谢意。由于编者水平有限，兼之时间仓促，错误和疏漏之处难免，恳请读者批评指正。

陈 剑

目 录

第1章 算术与代数	001
1.1 考点梳理	001
1.2 重点题型	003
1.3 拓展题型	011
1.4 顿悟精练	017
第2章 应用题	041
2.1 考点梳理	041
2.2 重点题型	045
2.3 拓展题型	065
2.4 顿悟精练	076
第3章 方程和不等式	099
3.1 考点梳理	099
3.2 重点题型	103
3.3 拓展题型	122
3.4 顿悟精练	138
第4章 数 列	155
4.1 考点梳理	155
4.2 重点题型	157
4.3 拓展题型	170
4.4 顿悟精练	179
第5章 几 何	189
5.1 考点梳理	189
5.2 重点题型	193
5.3 拓展题型	211
5.4 顿悟精练	226
第6章 数据分析	245
6.1 考点梳理	245
6.2 重点题型	248
6.3 拓展题型	277
6.4 顿悟精练	281
附录 全真模拟检测	315
全真模拟检测题(一)	315
全真模拟检测题(二)	318
全真模拟检测题(三)	321



全真模拟检测题(四).....	324
全真模拟检测题(五).....	327
全真模拟检测题(六).....	330
全真模拟检测题(七).....	333
全真模拟检测题(八).....	336
全真模拟检测题(一)参考答案与解析.....	339
全真模拟检测题(二)参考答案与解析.....	342
全真模拟检测题(三)参考答案与解析.....	345
全真模拟检测题(四)参考答案与解析.....	347
全真模拟检测题(五)参考答案与解析.....	350
全真模拟检测题(六)参考答案与解析.....	352
全真模拟检测题(七)参考答案与解析.....	355
全真模拟检测题(八)参考答案与解析.....	358

第1章 算术与代数

1.1 考点梳理

1.1.1 重要的概念和性质

- (1) 最小的自然数为0,最小的质数为2,最小的合数为4,1既不是质数也不是合数.
- (2) 常用20以内的质数:2,3,5,7,11,13,17,19.(2为质数中唯一的偶数)
- (3) 整除的特点:
 - 能被2整除的数:个位为0,2,4,6,8;
 - 能被3整除的数:各数位数字之和必能被3整除;
 - 能被5整除的数:个位为0或5;
 - 能被9整除的数:各数位数字之和必能被9整除.
- (4) 公倍数与公约数:对于两个正整数,两数之积等于最小公倍数乘以最大公约数.
- (5) 奇数与偶数:相邻两整数必有一奇一偶.在一个加(减)算式中,判断其结果的奇偶性,只取决于奇数的个数(奇数个奇数为奇,其余均为偶).

1.1.2 重要的运算公式

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$.

【扩展】 $\left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} \pm 2$ 或 $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a \pm \frac{1}{a}\right)^2 \mp 2$.

(2) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$.

【注意】 $a^2 + b^2 + c^2 \pm ab \pm bc \pm ac = \frac{1}{2}(a \pm b)^2 + \frac{1}{2}(b \pm c)^2 + \frac{1}{2}(a \pm c)^2$.

(3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

(4) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

【扩展】 $\frac{1}{\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}}{(\sqrt{n} \pm \sqrt{n-1})(\sqrt{n} \mp \sqrt{n-1})} = \sqrt{n} \mp \sqrt{n-1}$.

(5) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

(6) $a^0 = 1(a \neq 0)$, $1^x = 1(x \in \mathbf{R})$, $0^x = 0(x > 0)$.

(7) $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

1.1.3 绝对值

- (1) 定义:正数和零的绝对值还是其本身,负数的绝对值为其相反数.

(2) 本质:绝对值起着控制一个数符号的作用. 绝对值对于正数和零没有影响;绝对值只对于负数起着改变符号的作用.

(3) 几何意义:实数 a 的绝对值 $|a|$ 表示数轴上坐标为 a 的点 A 到坐标原点的距离,如图 1-1(a)所示. $|a-b|$ 的几何意义表示它们在数轴上对应的点之间的距离,如图 1-1(b)所示.



图 1-1

1.1.4 平均值

(1) n 个数的算术平均值为 $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

(2) n 个正数的几何平均值为 $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$.

(3) 平均值定理:

当 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 n 个正数时,算术平均值不小于几何平均值,即

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n} \quad (x_1, x_2, \cdots, x_n > 0).$$

当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,等号成立.

【注意】对于两个数,有 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ($a, b > 0$) 和 $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ($a > 0$).

① $4ab \leq (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, $a, b \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b$ 时等号成立).

② $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立).

③ $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}(a+b+c)^2 \geq ab + bc + ca$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ (当且仅当 $a = b = c$ 时等号成立).

④ $\left| \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right| \geq 2$ (当且仅当 $|a| = |b|$ 时取“=”号).

⑤ $a > 0, b > 0, a + b = 1$, 则 $ab \leq \frac{1}{4}$.

1.1.5 除法及因式定理

1. 除法

设 $F(x)$ 除以 $f(x)$, 商为 $g(x)$, 余式为 $r(x)$, 则有 $F(x) = f(x)g(x) + r(x)$, 且 $r(x)$ 的最高次方数小于 $f(x)$ 的最高次方数. 若 $r(x) = 0$, 则 $F(x)$ 可以被 $f(x)$ 整除.

2. 因式定理

多项式 $f(x)$ 含有因式 $(ax-b) \Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(ax-b)$ 整除 $\Leftrightarrow f\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

【注意】多项式 $f(x)$ 含有因式 $(x-a) \Leftrightarrow f(x)$ 能被 $(x-a)$ 整除 $\Leftrightarrow f(a) = 0$.

1.2 重点题型

【重点1】整除

【解题思路】首先要记住被常见数字(如2,3,5,9)整除的特点;另外,整除经常与约数联合命题,尤其寻找多个数的约数.

1. 设 a 为正整数,且 $\frac{48}{a}, \frac{72}{a}$ 也为正整数,则符合条件的 a 值有()个.

A. 4 B. 6 C. 8 D. 10 E. 12

【答案】C

【解析】48与72的最大公约数为24,所以24是它们的一个因子,故24可以整除它们;又24的所有因子都可以整除48和72,所以可以整除它们的数为1,2,3,4,6,8,12,24,共8个.

【点拨】如果一个分数为整数,则分母是分子的约数.

2. 介于300到400之间,恰有三个因数的整数,共有()个.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 4 E. 7

【答案】B

【解析】每一个数都至少有两个因子(1与它本身).如果有三个因数的数,则另外一个因数一定不能再分解,所以应该是质数.为了保证只有三个因数,此数一定可以分解为某一个质数平方的形式.在300~400间可以分解为某质数平方形式的数只有 $19^2=361$,故只有1个数.

【点拨】本题结合因数来分析整除,主要考查一个数的约数的个数.若不是平方数,比如 17×19 ,那么就会有4个约数,如1,17,19, 17×19 .所以必须是平方数.

【重点2】公倍数与公约数

【解题思路】在处理涉及两数的最大公约数或者最小公倍数的很多问题中,经常用到的基本关系是:若两数为 a 和 b ,那么 $a=a_1d, b=b_1d$. 其中, $d=(a, b)$, $(a_1, b_1)=1$, 因此, $[a, b]=da_1b_1$. 有时为了确定起见,可设 $a \leq b$. 对于很多情形,可以排除 $a=b$ 的情形,而只假设 $a < b$, 其中 (a_1, b_1) 表示两数的最大公约数, $[a, b]$ 表示两数的最小公倍数.

1. 有一个三角形的公园,各边的长分别是150 m,180 m,300 m. 今在周围种树,相邻两棵树之间的距离相等,且在三角形的顶点各种一棵,最少要种()棵树.

A. 21 B. 22 C. 20 D. 19 E. 23

【答案】A

【解析】首先求出(150,180,300)的最大公约数,为30,则每个边种树之和为 $5+6+10=21$.

【点拨】本题主要考查最大公约数的应用,若出现等距离问题,可采用最大公约数求解.

2. 老师将100名学生分别抽签编号,依序分别是1,2,...,100,已知编号为5或7的倍数者可以获得免费的图书礼券一张,老师共应送出()张图书礼券.

A. 30 B. 31 C. 32 D. 33 E. 34

【答案】C

【解析】 $\frac{100}{5}=20$,故编号为5的倍数有20个, $\frac{100}{7} \approx 14.3$,编号为7的倍数有14个;共有

$20+14=34$, 又 5 和 7 共同的倍数有 35 和 70, 所以总共发出的礼券数为 $34-2=32$.

【点拨】分别求出 5 的倍数和 7 的倍数, 再减去 5 和 7 的共同倍数.

3. 甲数是 36, 甲、乙两数的最大公约数是 4, 最小公倍数是 288, 乙数的各个数位和为 ().

- A. 9 B. 8 C. 7 D. 6 E. 5

【答案】E

【解析】方法一 由“甲数 $\times$ 乙数=甲、乙两数的最大公约数 $\times$ 两数的最小公倍数”可得 $36 \times \text{乙数} = 4 \times 288$, 乙数 $= 4 \times 288 \div 36$, 解出: 乙数 $= 32$.

方法二 因为甲、乙两数的最大公约数为 4, 所以甲数 $= 4 \times 9$. 设乙数 $= 4 \times b_1$, 且 $(b_1, 9) = 1$.

因为甲、乙两数的最小公倍数是 288, 所以 $288 = 4 \times 9 \times b_1$, $b_1 = 288 \div 36$, 解出 $b_1 = 8$. 所以, 乙数 $= 4 \times 8 = 32$.

【点拨】本题方法一采用定理求解, 方法二根据定义求解.

4. 已知两数的最大公约数是 21, 最小公倍数是 126, 这两个数的和有 () 种取值情况.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

【答案】B

【解析】要求这两个数的和, 可以先求出这两个数各是多少. 设这两个数为 a 和 b , 且 $a < b$.

因为这两个数的最大公约数是 21, 故设 $a = 21a_1$, $b = 21b_1$, 且 $(a_1, b_1) = 1$.

因为这两个数的最小公倍数是 126, 所以 $126 = 21 \times a_1 \times b_1$, 于是 $a_1 \times b_1 = 6$.

解得 $\begin{cases} a_1=1, \\ b_1=6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=2, \\ b_1=3 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} a=21 \times 1=21, \\ b=21 \times 6=126 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=21 \times 2=42, \\ b=21 \times 3=63 \end{cases}$.

因此, 这两个数的和为 $21+126=147$ 或 $42+63=105$, 有两种情况.

【点拨】本题主要考查已知最大公约数和最小公倍数, 反求两个数.

5. 已知两个自然数的和是 50, 它们的最大公约数是 5, 这两个自然数的乘积一定是 ().

- A. 9 的倍数 B. 7 的倍数 C. 45 的倍数 D. 75 的倍数 E. 18 的倍数

【答案】D

【解析】设这两个自然数分别为 a 与 b , $a < b$.

因为这两个自然数的最大公约数是 5, 故设 $a = 5a_1$, $b = 5b_1$, 且 $(a_1, b_1) = 1$, $a_1 < b_1$.

因为 $a+b=50$, 所以有 $5a_1+5b_1=50$, $a_1+b_1=10$. 满足 $(a_1, b_1)=1$, $a_1 < b_1$ 的解有:

$\begin{cases} a_1=1, \\ b_1=9 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1=3, \\ b_1=7 \end{cases}$, 则 $\begin{cases} a=5 \times 1=5, \\ b=5 \times 9=45 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=5 \times 3=15, \\ b=5 \times 7=35 \end{cases}$.

无论哪种情况, 这两个数的乘积一定是 75 的倍数.

【点拨】本题主要考查已知最大公约数与两数之和, 反求两数.

【重点 3】奇数与偶数

【解题思路】对于奇数、偶数问题, 要会借助性质反推数字的特点, 尤其要记住: 奇数 $\pm$ 奇数=偶数, 奇数 $\pm$ 偶数=奇数, 偶数 $\pm$ 偶数=偶数.

1. 书店有单价为 10 分、15 分、25 分、40 分的四种贺年片, 小华花了几张一元钱, 正好买了 30 张, 其中某两种各 5 张, 另两种各 10 张, 问小华买贺年片花去 () 元钱.

- A. 5 B. 9 C. 6 D. 8 E. 7

【答案】E

【解析】设买的贺年片分别为 a, b, c, d (张), 用去 k 张 1 元的人民币, 依题意有 $10a + 15b + 25c + 40d = 100k$ (k 为正整数), 即 $2a + 3b + 5c + 8d = 20k$. 显然 b, c 有相同的奇偶性.

若同为偶数, $b=c=10$ 和 $a=b=5, k=\frac{13}{2}$ 不是整数;

若同为奇数, $b=c=5$ 和 $a=d=10, k=7$. 满足题意, 故共花 7 元.

【点拨】本题也属于不定方程问题, 通过奇偶性与整除特点来寻找唯一解.

2. 某市举办小学生数学竞赛, 试卷上共有 30 道试题, 评分标准是: 基础分 15 分, 答对一题加 5 分, 未答一题加 1 分, 答错一题倒扣 1 分, 如果有 2 015 个学生参赛, 问参赛同学的总分是().

- A. 偶数 B. 奇数 C. 质数 D. 合数 E. 无法确定

【答案】B

【解析】如果 30 道题都答对了, 则可得到的分数为 $15 + 5 \times 30 = 165$, 是个奇数. 如果答错一题, 就要从 165 分中减去 $5 + 1 = 6$ 分, 无论答错几个题, 都将从 165 分中减去 6 的倍数, 得分仍为奇数. 如果有一题未答, 就要从 165 分中减去 $5 - 1 = 4$ 分, 因而不论几道题未答, 都将从 165 中减去 4 的倍数, 得分也是奇数. 综上所述, 对每个参赛同学无论答得如何, 成绩都是 165 减去一个偶数, 其得分总是奇数.

因为有 2 015 个人(奇数个)参赛, 奇数个奇数相加, 和仍为奇数, 所以参赛同学的总得分是奇数.

【点拨】本题关键在于说明每位参赛同学所得分数是奇数还是偶数, 再根据人数为奇数及奇偶性质得到最后得分的结果.

3. 在黑板上写上 $1, 2, 3, \dots, 100$, 按下列规定进行“操作”: 每次擦去其中的任意两个数 a 和 b , 然后写上它们的差(大减小), 直到黑板上剩下一个数为止. 黑板上剩下的数是().

- A. 奇数 B. 偶数 C. 质数 D. 合数 E. 无法确定

【答案】B

【解析】黑板上开始时所有数的和为 $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5\,050$, 是一个偶数, 而每一次“操作”, 将 $(a+b)$ 变成了 $(a-b)$, 实际上减少了 $2b$, 即减少了一个偶数. 因为从整体上看, 总和减少了一个偶数, 其奇偶性不变, 所以最后黑板上剩下一个偶数.

【重点 4】质数与合数

【解题思路】质数、合数也是数的重要性质, 要记住最小的质数为 2, 最小的合数为 4. 除了 2 以外的质数都是奇数, 大于 2 的偶数都是合数.

1. 三个质数 a, b, c 的乘积等于这三个质数和的 5 倍, 则 $a^2 + b^2 + c^2 = ()$.

- A. 80 B. 71 C. 72 D. 78 E. 74

【答案】D

【解析】因为 $abc = 5(a+b+c)$, 所以在质数 a, b, c 中必有一个是 5.

不妨设 $a=5$, 于是 $5bc = 5b + 5c + 25$, 即 $(b-1)(c-1) = 6$, 而 $6 = 2 \times 3 = 1 \times 6$, 则

$$\begin{cases} b-1=2, \\ c-1=3 \end{cases} \quad \text{①}$$

$$\begin{cases} b-1=1, \\ c-1=6. \end{cases} \quad \text{②}$$

或



由式①得 $b=3, c=4$, 不合题意. 由式②得 $b=2, c=7$, 符合题意.

所以所求的三个质数是 5, 2, 7. 于是 $a^2+b^2+c^2=78$.

【点拨】由题意得出 $abc=5(a+b+c)$, 由此显然得质数 a, b, c 中必有一个是 5, 不妨设 $a=5$, 代入前式中再设法求 b, c . 质数问题常常通过分解质因数来解决.

2. 老师要琳琳列出 1~40 的所有整数, 然后依下列步骤进行:

步骤一, 删去 1;

步骤二, 保留 2, 删去 2 的倍数;

步骤三, 保留 3, 删去 3 的倍数;

步骤四, 保留 5, 删去 5 的倍数.

当四个步骤进行完之后, 则下列叙述中错误的有()个.

(1) 最后剩下的数必为质数.

(2) 最后剩下的数有 11 个.

(3) 最后一个数为 37.

(4) 剩下的数中, 只有 1 个数是偶数.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

【答案】B

【解析】剩下的是 1~40 间的所有质数: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 共 12 个数.

(2) 叙述错误, 其他叙述正确.

【点拨】本题主要考查质数的特点, 但是如果范围增大, 比如 1~50, 那么剩下的不一定是质数, 比如 49.

3. 三人分糖, 每人都得整数块, 乙比丙多得 13 块, 甲所得是乙的 2 倍, 已知糖的总块数是一个小于 50 的质数, 且它的各位数字之和为 11, 则三人得糖的块数之积为().

A. 900

B. 800

C. 840

D. 920

E. 960

【答案】A

【解析】设甲、乙、丙分别得糖 x, y, z 块, 依题意, 得

$$\begin{cases} x=2y, \\ y=z+13, \\ x+y+z < 50, \text{ 且 } x+y+z \text{ 为质数.} \end{cases}$$

因为 $11=2+9=3+8=4+7=5+6$, 故小于 50 且数字和为 11 的质数只可能是 29 和 47.

若 $x+y+z=29$, 则可得 $4y=42$, y 不是整数, 舍去.

若 $x+y+z=47$, 则可得 $4y=60$, $y=15$, 从而 $x=30, z=2$.

所以甲、乙、丙分别得糖 30, 15, 2 块, 三人得糖的块数之积为 900.

【点拨】本题的关键是分析出小于 50 且数字和为 11 的质数只可能是 29 和 47. 这类问题通常利用质数的性质来分析求得所有的可能值, 再设法检验求得所要的解.

4. 若 x 为正整数, 且 $15x^2-82x-17$ 为一个质数, 则此质数为().

A. 19

B. 23

C. 29

D. 31

E. 37

【答案】D

【解析】由于 $15x^2-82x-17=(5x+1)(3x-17)$ 为质数, 故只能分成 1 和它本身相乘, 且 x 为正整数, 故 $3x-17=1$, 得到 $x=6 \Rightarrow 15x^2-82x-17=31$.

【点拨】本题的关键是进行因式分解, 根据质数的定义, 这个数只能分成 1 和它本身相乘, 解出 x 的数值.

【重点 5】数轴与绝对值

【解题思路】利用数轴来分析绝对值的几何意义, 借助几何意义求解一些表达式更为简单.

已知实数 a, b, c 在数轴上的对应点如图 1-2 所示, 试化简: $\sqrt{a^2} - |a-b| + |c-a| + \sqrt{(b-c)^2} = (\quad)$.

A. $2b-2c-a$

B. $2b+2c-a$

C. $-2b+2c+a$

D. $-2b+2c-a$

E. $-2b-2c-a$



图 1-2

【答案】D

【解析】因为实数 a, b 在数轴上的对应点在原点的左边, 所以实数 a, b 为负数, 且 $b > a$.因为实数 c 在数轴上的对应点在原点的右边, 所以实数 c 为正数.根据 $a < 0, b < 0, c > 0, b > a$, 有:

$$\text{原式} = -a + (a-b) + (c-a) - (b-c) = -a + a - b + c - a - b + c = -2b + 2c - a.$$

【点拨】此题不仅综合运用了算术平方根、绝对值及数的大小比较等知识, 而且还培养了数形结合的能力. 解这类题时, 首先要根据数轴上表示实数的点的位置来确定实数的正负, 并判断出它们之间的大小关系, 然后再化简算术平方根或绝对值.

【重点 6】非负性

【解题思路】由非负数的性质知, 若有限个非负数之和等于零, 必须每个非负数都等于零.

1. 设 $abc \neq 0$, 而且 $|3a-5b| + (a-3b+c)^2 = 0$, 则 $a:b:c = (\quad)$.

A. $3:4:5$

B. $4:3:5$

C. $3:5:4$

D. $5:3:4$

E. $5:4:3$

【答案】D

【解析】由题意得: $3a-5b=0; a-3b+c=0$, 则可以求出 $a:b:c=5:3:4$.

【点拨】根据非负性, 得到两个等式, 然后求出三者的比例.

2. 已知实数 x 和 y 满足 $\sqrt{2x-3y-1} + |x-2y+2| = 0$, 则 $2x - \frac{4}{5}y$ 的平方根是 $(\quad)$.

A. 12

B. ± 12

C. $\pm 2\sqrt{2}$

D. $\pm 2\sqrt{3}$

E. $2\sqrt{3}$

【答案】D

【解析】因为 $\sqrt{2x-3y-1} \geq 0$ 和 $|x-2y+2| \geq 0$, 根据非负性得到:

$$\begin{cases} 2x-3y-1=0, \\ x-2y+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=5, \end{cases} \text{ 所以 } 2x - \frac{4}{5}y = 2 \times 8 - \frac{4}{5} \times 5 = 12.$$

$$\text{则 } 2x - \frac{4}{5}y \text{ 的平方根为 } \pm \sqrt{2x - \frac{4}{5}y} = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

【点拨】非负性是实数的重要性质, 且应用很广. 由非负数的性质知, 有限个非负数之和等于零, 必须每个非负数等于零, 从而得到一个关于 x, y 为未知数的二元一次方程, 解出 x, y 的值.

【重点 7】整式与分式

【解题思路】整式主要考查表达式的变形化简, 要涉及完全平方、平方差公式等; 分式主要考查通分、约分等变形, 分式在求解时要注意分母不能为零.

1. 若 $0 < x < 1$, 则 $\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4} - \sqrt{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4} = (\quad)$.

- A. $\frac{2}{x}$ B. $-\frac{2}{x}$ C. $-2x$ D. $2x$ E. $3x$

【答案】D

【解析】 $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 4 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$.

又因为 $0 < x < 1$, 所以 $x + \frac{1}{x} > 0$, $x - \frac{1}{x} < 0$.

原式 $= x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2x$.

【点拨】本题考查完全平方公式和二次根式的性质. A 不正确是因为应用性质时没有注意当 $0 < x < 1$ 时, $x - \frac{1}{x} < 0$.

2. 已知 $x > 0$, $f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$, 则 $(\quad)$.

- A. $f(x) \leq 2$ B. $f(x) \geq 10$ C. $f(x) \geq 6$ D. $f(x) \leq 3$ E. $f(x) \geq 3$

【答案】C

【解析】
$$f(x) = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)} = \frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + 2 + \frac{1}{x^6}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$
$$= \frac{\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\right] \cdot \left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)\right]}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)}$$
$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = 3x + \frac{3}{x} \geq 6.$$

【点拨】本题分子采用平方差公式, 与分母约分后, 再采用平均值定理求解最值.

3. 已知 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$, $y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$, 求 $\frac{x^3 - xy^2}{x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3} = (\quad)$.

- A. $\frac{2}{5}\sqrt{3}$ B. $\frac{3}{5}\sqrt{6}$ C. $\frac{3}{5}\sqrt{2}$ D. $\frac{4}{5}\sqrt{6}$ E. $\frac{2}{5}\sqrt{6}$

【答案】E

【解析】因为 $x = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$,

$y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6}$.

所以 $x + y = 10$, $x - y = 4\sqrt{6}$, $xy = 5^2 - (2\sqrt{6})^2 = 1$.

$$\frac{x^3 - xy^2}{x^4y + 2x^3y^2 + x^2y^3} = \frac{x(x+y)(x-y)}{x^2y(x+y)^2} = \frac{x-y}{xy(x+y)} = \frac{4\sqrt{6}}{1 \times 10} = \frac{2}{5}\sqrt{6}.$$

【点拨】本题将 x, y 化简后, 根据解题的需要, 先分别求出“ $x+y$ ”“ $x-y$ ”“ xy ”. 从而使求