费定晖　周学圣编演
郭大钧　邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

# 数学分析习题集题解

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇

# 数学分析习题集题解

（三）

山东科学技术出版社

鲁新登字05号

Б. П. 吉米多维奇

# 数学分析习题集题解

（三）

费定晖　周学圣　编演
郭大钧　邵品琮　主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092毫米 32开本　18.875印张　403千字
1994年11月第2版　1994年11月第5次印刷
印数：201,301—211,300

ISBN　7—5331—0101—4

O·7　　定价：17.70元

# 出 版 说 明

吉米多维奇（Б. П. ДЕМИДОВИЧ）著《数学分析习题集》一书的中译本，自 50 年代初在我国翻译出版以来，引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生，常以试解该习题集中的习题，作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来，对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题，数量多，内容丰富，由浅入深，部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限，单变量函数的微分学，不定积分，定积分，级数，多变量函数的微分学，带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等，概括了数学分析的全部主题。当前，我国广大读者，特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者，在为四个现代化而勤奋学习的热潮中，迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此，我们特约作者，将全书 4462 题的所有解答汇辑成书，共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书，同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知，原习题集，题多难度大，其中不少习题如果认真习作的话，既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念，又可以有效地提高我们的运算能力，特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样，我们殷切期望初学数学分析的青年读者，一定要刻苦钻研，千万不要轻

易查抄本书的解答，因为任何削弱独立思索的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 目　　录

# 第三章　不定积分

## §1. 最简单的不定积分

1° **不定积分的概念**　若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中 $C$ 为任意常数.

2° **不定积分的基本性质**：

(a) $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$；(б) $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$；

(в) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = \text{常数})$；

(г) $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

3° **最简积分表**：

Ⅰ. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$；

Ⅱ. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C (x \neq 0)$；

Ⅲ. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$

Ⅳ. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$；

Ⅴ. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C; \end{cases}$

Ⅵ. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$；

Ⅶ. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C(a>0,a\neq 1)$；$\int e^x dx=e^x+C$；

Ⅷ. $\int \sin x dx = -\cos x + C$；

Ⅸ. $\int \cos x dx = \sin x + C$；

Ⅹ. $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\mathrm{ctg} x+C$；

Ⅺ. $\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\mathrm{tg} x+C$；

Ⅻ. $\int \mathrm{sh} x dx = \mathrm{ch} x + C$；

XⅢ. $\int \mathrm{ch} x dx = \mathrm{sh} x + C$；

XⅣ. $\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^2 x}=-\mathrm{cth} x+C$；

XⅤ. $\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x}=\mathrm{th} x+C$.

4° 积分的基本方法

(а) 引入新变数法　若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则
$$\int f(u)du = F(u) + C,\text{式中 } u = \varphi(x).$$

(б) 分项积分法　若

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

则
$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

(в) 代入法　假设

$x=\varphi(t)$，式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的，

则得
$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

(г) 分部积分法　若 $u$ 和 $v$ 为 $x$ 的可微分函数，

则
$$\int udv = uv - \int vdu.$$

利用最简积分表，求出下列积分*：

1628. $\int(3-x^2)^3 dx.$

**解** $\int(3-x^2)^3 dx=\int(27-27x^2+9x^4-x^6)dx$

$$=27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+C.$$

1629. $\int x^2(5-x)^4 dx.$

**解** $\int x^2(5-x)^4 dx$

$$=\int(625x^2-500x^3+150x^4-20x^5+x^6)dx$$

$$=\frac{625}{3}x^3-125x^4+30x^5-\frac{10}{3}x^6+\frac{1}{7}x^7+C.$$

1630. $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx.$

**解** $\int(1-x)(1-2x)(1-3x)dx$

$$=\int(1-6x+11x^2-6x^3)dx$$

$$=x-3x^3+\frac{11}{3}x^3-\frac{3}{2}x^4+C.$$

1631. $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx.$

**解** $\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1\right)dx$

---

* 本章在叙述习题及其解答过程中，凡出现的函数，无论是被积函数还是原函数，均默认是在有意义的定义域上进行的. 例如最简积分表中 I 里当 $n\leqslant-2$ 时，要求 $x\neq0$；Ⅳ 中要求 $|x|\neq1$；Ⅴ 中要求 $|x|<1$；以及 Ⅵ 中，当取负号时要求 $|x|>1$；等等，就未加声明. 在题解中也有相当多的类似情况. 因此，如无特别声明，在一般情形下，这些定义域是很容易被读者确定的，此处就不再予以一一指明.

——《题解》编者注.

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

1632. $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx.$

**解** $\int\left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3}\right)dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx.$

**解** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx = \int\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx.$

**解** $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}}dx$

$$= \int\left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)dx$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x\sqrt[12]{x^5} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx.$

**解** $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}dx$

$$= \int\left(x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}\right)dx$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) + C.$$

1636. $\int\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx.$

解 $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx=\int\left(x^{\frac{3}{4}}-x^{-\frac{5}{4}}\right)dx$

$=\frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}+4x^{-\frac{1}{4}}+C=\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}+C.$

1637. $\int\frac{\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x})^2}{x}dx$

$=\int\left(2-2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}\right)dx$

$=2x-\frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2}+C.$

1638. $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx.$

解 $\int\frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}dx$

$=\int\frac{x^2+\frac{1}{x^2}}{x^3}dx$

$=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}\right)dx=\ln|x|-\frac{1}{4x^4}+C.$

1639. $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$

$=x-\operatorname{arctg}x+C.$

1640. $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx.$

解 $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int\left(-1+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$= -x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C.$$

1641. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx.$

**解** $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{4}{x^2-1}\right)dx$

$$= x + 2\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx.$

**解** $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$$= \arcsin x + \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C.$$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx.$

**解** $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx$

$$= \int\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx$$

$$= \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right| + C.$$

1644. $\int(2^x+3^x)^2dx.$

**解** $\int(2^x+3^x)^2dx = \int(4^x+2\cdot 6^x+9^x)dx$

$$= \frac{4^x}{\ln 4} + 2\cdot\frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

1645. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx.$

解 $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = \int\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^x - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$= -\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x + \frac{1}{5\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C.$

1646. $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx.$

解 $\int \frac{e^{3x}+1}{e^x+1}dx = \int(e^{2x}-e^x+1)dx$

$= \frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x + C.$

1647. $\int(1+\sin x+\cos x)dx.$

解 $\int(1+\sin x+\cos x)dx = x - \cos x + \sin x + C.$

1648. $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx.$

解 $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{(\cos x-\sin x)^2}dx$

$= \int[sgn(\cos x-\sin x)](\cos x-\sin x)dx$

$= (\sin x+\cos x)\cdot sgn(\cos x-\sin x) + C.$

1649. $\int \mathrm{ctg}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{ctg}^2 x dx = \int(\csc^2 x - 1)dx = -\mathrm{ctg}x - x + C.$

1650. $\int \mathrm{tg}^2 x dx.$

解 $\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int(\sec^2 x - 1)dx = \mathrm{tg}x - x + C.$

1651. $\int (a\mathrm{sh}x + b\mathrm{ch}x)dx.$

**解** $\int (a\mathrm{sh}x + b\mathrm{ch}x)dx = a\mathrm{ch}x + b\mathrm{sh}x + C.$

1652. $\int \mathrm{th}^2 x dx.$

**解** $\int \mathrm{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right) dx = x - \mathrm{th}x + C.$

1653. $\int \mathrm{cth}^2 x dx.$

**解** $\int \mathrm{cth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}\right) dx = x - \mathrm{cth}x + C.$

1654. 证明：若

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

**证** 由 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因而有 $F'(ax+b) = f(ax+b)$，且 $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right]$ $= F'(ax+b)$，于是

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}F(ax+b)\right] = f(ax+b),$$

所以

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

求出下列积分：

1655. $\int \frac{dx}{x+a}.$

解 $\int\frac{dx}{x+a}=\ln|x+a|+C.$

1656. $\int(2x-3)^{10}dx.$

解 $\int(2x-3)^{10}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{11}(2x-3)^{11}+C$

$=\frac{1}{22}(2x-3)^{11}+C.$

1657. $\int\sqrt[3]{1-3x}dx.$

解 $\int\sqrt[3]{1-3x}dx=-\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C$

$=-\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}}+C.$

1658. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-5x}}=-\frac{1}{5}\cdot 2(2-5x)^{\frac{1}{2}}+C$

$=-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x}+C.$

1659. $\int\frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}.$

解 $\int\frac{dx}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{5}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)(5x-2)^{-\frac{3}{2}}+C$

$=-\frac{2}{15(5x-2)^{\frac{3}{2}}}+C.$

1660⁺*. $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx.$

---

* 题号右上角带"＋"号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致，以后不再说明。中译本基本是按俄文第二版翻译的.俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

解 $\int\frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}dx$

$=\int(1-x)^{-\frac{3}{5}}dx$

$=-\frac{5}{2}\sqrt[5]{(1-x)^2}+C.$

1661. $\int\frac{dx}{2+3x^2}.$

解 $\int\frac{dx}{2+3x^2}=\int\frac{dx}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}x)^2}$

$=\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

1662. $\int\frac{dx}{2-3x^2}.$

解 $\int\frac{dx}{2-3x^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2}$

$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{3}{2}}x}{1-\sqrt{\frac{3}{2}}x}\right|+C$

$=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+x\sqrt{3}}{\sqrt{2}-x\sqrt{3}}\right|+C.$

1663. $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$

解 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(x\sqrt{\frac{3}{2}}\right)+C.$

1664. $\int\frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$

**解** $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2 - 1}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \left| x\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2 - 1} \right| + C_1$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x\sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}| + C.$

1665. $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$

**解** $\int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -(e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-2x}) + C.$

1666. $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$

**解** $\int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha + C.$

1667. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$

**解** $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$

1668. $\int \frac{dx}{1+\cos x}.$

**解** $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$

1669. $\int \frac{dx}{1-\cos x}.$

**解** $\int \frac{dx}{1-\cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com