数学中的试错与筛选

苏平著

江苏教育出版社

数学中的试错与筛选

苏 平 著

数学中的试错与筛选
苏 平 著

出版发行：江 苏 教 育 出 版 社
（南京市马家街 31 号，邮政编码：210009）
经　　销：江 苏 教 育 出 版 社
照　　排：江 苏 苏 中 印 刷 厂
印　　刷：淮 阴 新 华 印 刷 厂

开本 850×1168 毫米　1/32　印张 4.5　字数 92 600
1998 年 12 月第 1 版　1998 年 12 月第 1 次印刷
印数 1—2 000 册

ISBN　7—5343—3469—1

G·3154　　　　定价：4.40 元

序

1980年以来，在著名数学家徐利治先生的倡导下，我国数学界逐步开展了“数学方法论”这一学科的教学与科研活动.数学方法论方面的文献和著作日益增多，许多师范院校的数学系、中小学教师继续教育班，以及硕士研究生班都将“数学方法论”作为一门重要的课程列入教学大纲和考试范围，部分高校还培养了一批数学方法论方向的研究生，不少高校与科研机构多次举办全国性的数学方法论学术研讨会.这些都标志着数学方法论这一学科在我国学术界已经日益发展和成熟起来.现在，越来越多的数学教育研究工作者都意识到：在中学数学教学中渗透数学思想和方法的教学，应当成为中学数学教育改革的重要课题.因为中学阶段是一个人形成科学方法论的关键时期，而衡量一个人科学方法论水平的重要标准是看他如何看待和理解数学，以及能否运用数学的思想和方法去观察、分析和解决问题.为此，许多数学家和数学教育工作者付出了大量的心血，希望改变国内中学数学教育为了升学，强迫孩子接受大量陈旧的题型知识、把学生思维禁锢在机械模仿的思维定势中的现状.他们认为，中学生所掌握的数学应该既是一种文化知识和数学技术，又是一种今后进一步深造或从事各种工作所必需的方法论.苏平老师就是其中一位有志于研究中学数学方法论的拓荒者，她自1988年以来，陆续发表了《数学的符号化思想》、《对应的思想》、《公理与演

绎思想》、《方程与函数思想》、《论数学的整体化思想》、《模糊数学的思想》、《浅谈数学灵感》等论文，主编过《国际数学奥林匹克(IMO)思想方法》等著作.《数学中的试错与筛选》是作者近几年来从事中学数学方法论研究的又一项重要成果. 该书系统地论述了试错与筛选思想的思维形式和特征；从学生如何学会学习与理解数学的角度，提出了运用试错、筛选法的原则，阐述了试错与筛选的思维模式；又以培养学生创造性思维能力为中心，探讨了试错思想与化归等思想的辩证关系，最后研究了试错思想的美学特征以及试错思想对于激发灵感和培养创造能力的功能.

有关试错的思想在以往的一些著作中也有过零星阐述，但像本书作者那样系统地进行专题研究，目前还是凤毛麟角. 全书立论严谨，简洁明快，富有新意，并以流畅、优美的文笔带着读者经历数学成果再发现的过程，享受数学创造的喜悦，堪称我国中学数学方法论方面的一部佳作，因而本人乐于向读者推荐并为之作序.

作为国内第一本有关试错与筛选方面的专著，其中的观点、分类及表述等方面也难以做到完美无缺，因而也不能苛求其尽善尽美. 愿读者和同行专家能由此而与苏平老师建立联系，并一起进行深入的研究，使之更加丰富和完善，在数学教育和数学方法论的研究中发挥其应有的作用，这也不能不说是数学教育界的一件好事.

朱梧槚

1998年11月于南京

目　录

第一章　试错与筛选概述

解决数学问题的思维过程，各家自有论说．从方法论角度看，越来越多的数学家、科学家们认为：解决数学问题的思维过程，既是一种不断地变换问题的过程，也是一种不断地试错与筛选的过程．两者相互依赖、相互渗透、相互辉映．

关于试错思想、变换思想及其两者的辩证统一，世界著名数学家波利亚(G. Polya)的阐述非常生动并颇具方法论意义．他说："一个飞虫尝试穿过玻璃窗逃遁，它不断重复同一个毫无希望的动作，不断撞击玻璃，而不去试试那扇开着的、它原先从那儿进来的窗子．老鼠则比飞虫聪明，它被关进鼠笼后，就在两根笼柱之间试试，想钻出去，然后又试试旁边两根，再试试别的柱子，……它不断变化它的试验，探索各种可能．人能够，而且也应当能够更聪明地变化他的试验，以更深入的理解来探索各种可能，通过自己的错误与缺点来学习．'试试，再试试'是个通用的忠告．……解题中的成功有赖于选择正确的方面，有赖于从好接近的一侧攻击堡垒．为了找出哪个方面是正确的方面，哪一侧是好接近的一侧，我们从各个方面、各个侧边去试验，我们变化问题．"① 也就是说，在数学发现和创造的过程中，我们可以通过一次又一次方向明确的试错与筛

① ［美］G．波利亚著．怎样解题．北京：科学出版社，1982．1：209

选，产生一些好念头，不断地作出明智的选择，不断地变换问题，去一步步接近真理.

许多数学家都在自己的著作中提过一些和试错、筛选有关的思想、观念和方法，沿着数学家们走过的探索与发现的曲折之路，我们来研究试错与筛选这种数学思想的特征及其方法论价值，同时从数学思维的角度阐述试错与筛选的思维形式及其模式，讨论运用试错、筛选思想解题的方法论原则，并研究试错、筛选思想与其他数学思想的区别和联系.

§1.1 试错与筛选的基本思想

试错、筛选思想的萌芽，可以追溯到古希腊数学家埃拉托色尼(Eratosthenes)的“筛法”. 他在编制质数表时，首次使用了试验和筛选的方法. ①

例 1 制作一个 100 以内的质数表.

公元前三世纪，古希腊的著名数学家欧几里得就已证明了质数的个数是无限的. 于是产生了“怎样把从 1 到任意给定的某自然数 N 之间的质数一个不漏地写出来”的问题. 第一个解决了这个问题的是古希腊的哲学家和数学家埃拉托色尼，他设计了一种“筛选”的试验方法(就像生活中用筛子分开黄豆和小米一样，制造一个特殊的筛子，把 1 和合数纷纷筛掉，只留下质数). 因此，解决例 1 的思路为：依次写下 2～100 的所有自然数，然后留下第一个质数 2，划掉所有 2 的倍数；2

① 殷启正，苏平等著. 国际数学奥林匹克(IMO)思想方法. 山东教育出版社，1993. 12：304

后面没有划去的第一个数是 3，按照质数定义，3 是质数，因此保留 3，再划掉所有 3 的倍数；3 后面没有划去的第一个数是 5，保留质数 5，再划掉所有 5 的倍数；……经过有限次试验与筛选，最后留下的数就组成了一个 100 以内的质数表：

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~
~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~
~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~
~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~					

上述这种筛选质数的方法，称为“埃拉托色尼筛法”. 据说埃拉托色尼在编制历史上第一张质数表时，事先把一张草纸紧绷在一个框子里，然后把小于或等于 N 的所有自然数写上，再把 1 和所有的合数统统挖去，只把质数留在纸上. 这样就形成了一个很像筛子的东西：1 和合数纷纷透过“筛子眼”筛去了，而所有的质数却保留了下来.

也许有人会认为，埃拉托色尼的筛选法太麻烦了，如果 N 的值较大，这样逐步筛选多费事啊！的确，要是能够找出一个公式，由它可以推算出 N 以内的所有质数，那当然是很理想的. 遗憾的是，尽管许多世纪以来无数数学家付出了极大的努力，仍然没有找到这样的公式. 所以直至计算机科学发达的今天，所有的质数表，无一不是用变形或改进的“埃拉托色尼筛法”制得的. 靠了这种简单而朴素的“筛法”试验，我们才拥有了今天的十亿以内的质数表.

埃拉托色尼的筛法已成为一种重要的数学思想，在探索

“哥德巴赫猜想”的征途中，这种古老的筛法在数学家手中进一步发展起来. 推而广之，这种试验和筛选的思想，不仅用于解决许多数论和组合问题，而且还能解决某些函数、几何等方面的问题.

例 2 五名学生 A、B、C、D、E 参加一场比赛. 某人猜测比赛结果的名次顺序是 A、B、C、D、E，但结果是他既没有猜中任何一个学生的名次，也没有猜中任何一对名次相邻的学生的相互顺序；另一个人猜测名次顺序是 D、A、E、C、B，结果猜中了两个学生的名次，同时还猜中了两对名次相邻的学生的相互顺序. 试问实际比赛结果如何？

这个问题实质上是要求把 A、B、C、D、E 的次序作一排列，使这个排列刚好符合两个猜测者的猜测结果. 不过，A、B、C、D、E 的排列共有 $P_5^5=120$ 种，罗列诸情形一一试错与筛选，显然不可取.

这时，我们可以考虑根据两个猜测者的部分猜测结果，筛选出一批可能的排列进行试错.

注意到第二个人的猜测提供的信息较多，我们可以考虑从第二个人的猜测出发，并以猜中两对相邻名次的顺序为标准来确定一个尽可能小的试错筛选范围.

容易验证，被猜中的名次只可能是前两名或后两名. 如果用方框表示猜中的，即只可能是下述情形：

$$\boxed{D}\boxed{A}\,ECB \text{ 或 } DAE\,\boxed{C}\boxed{B}$$

否则，将由猜中两对相邻名次的顺序，推出不止猜中了两个名次. 这样，我们只要对 $2P_3^3=12$ 种情况一一加以筛选就行了.

先看第一类情形：

$DABCE$, $DABEC$, $DACBE$,

$DACEB$, $DAEBC$, $DAECB$.

通过和第一个人的猜测比较可知,从左往右横着看,第1、2、3、4、5种都是不可能的,第6种就是第二个人的猜测,同样是错误的.于是,筛除上述6种情况.

再看第二类情形:

$ADECB$, $AEDCB$, $DAECB$,

$DEACB$, $EADCB$, $EDACB$.

与前面的分析一样,第1、2、3、4种都是不可能的;第5种与第二个人的猜测比较,只有一对相邻名次CB的顺序相同,同样是不可能的.此时,保留在筛上的唯一排列$EDACB$必然是问题的解.

上面所述的试错、筛选的思维过程,显得自然、清晰,没有什么特别的思维难度,但较为繁琐.我们可以进一步思考:能否通过对乙猜测结果所隐含条件的挖掘,进一步缩小试错与筛选的范围.

事实上,如果在乙猜对的一对名次相邻的学生中,有一个名次是正确的,那么另一个的名次也必定是正确的.分析乙猜测的名次顺序D、A、E、C、B,则有:

第一,他猜中的两对名次相邻的学生中,必定有一对的名次也是正确的.否则,被他猜中名次的两个学生中,至少有一个属于猜中名次相邻学生中的某一对,这一对的另一个学生的名次也必定是正确的,这样,乙至少猜中了三个学生的名次,与题设矛盾.

第二,这一对既被猜中名次又被猜中位置相邻的学生只可能位于两端(即第1、2名或第4、5名),因为如果这一对位

于中间(即第2、3名或第3、4名),那么,猜对的另一对名次相邻的学生其个人名次也必定是正确的,与题设矛盾.

因此,乙的猜测只有下列四种可能(即试错与筛选的范围):

(1) $\underline{\overline{D}\ \overline{A}}\ \underline{EC}\ B$ (2) $\underline{\overline{D}\ \overline{A}}\ E\ \underline{CB}$

(3) $\underline{DA}\ E\ \underline{\overline{C}\ \overline{B}}$ (4) $D\ \underline{AE}\ \underline{\overline{C}\ \overline{B}}$

其中,字母上面的划线表示名次是正确的,下面的划线表示相邻位置是正确的.下面分别对四种情况试错:

(1)中,显然 B 不能在最后(否则,成为乙全部猜中).如果 B 在第三名,即$\underline{\overline{D}\ \overline{A}}\ B\ \underline{EC}$,则与“甲没有猜中任何一对名次相邻的学生”不符,因此排除(1).

与(1)作同样的分析,可推出(2)也是不可能的.

再试验(3),显然 E 不能在第3名,也不能在第5名,否则与条件不符.而顺序$E\ \underline{DA}\ \underline{\overline{C}\ \overline{B}}$与甲猜测的名次相对照,完全符合题设条件,所以,实际比赛的结果为 $EDACB$.

对于(4),显然 D 不可能在第一,只可能是$\underline{AE}\ D\ \underline{\overline{C}\ \overline{B}}$,这时 A 为第一名,与“甲没有猜中任何一个学生的名次”矛盾,故排除(4).

我国著名数学家华罗庚教授,在为中学生写的数学课外读物《从孙子的“神机妙算”谈起》中①,说到了我国古代广为流传的一道数学题:

例3 今有物不知其数,三三数之剩二,五五数之剩三,七七数之剩四,问物几何?

华罗庚介绍了一种连小学生都能接受的朴素的试错方

① 华罗庚科普著作选集.上海教育出版社,1984.10:83

法：

先从被 3 除余 2 的数 2,5,8,11,…中去找被 5 除余 3 的数；找到第一个数 8 后，再从 8 开始，以后每一个数都是前一个数与 15 的和(3 和 5 的最小公倍数)，得到数列

$$8,23,38,53,68,\cdots.$$

再在上述数列里寻找被 7 除余 4 的数：53 是第一个被 7 除余 4 的数，于是，$105n+53$(n 是非负整数)便是问题的答案.

例 4 证明：只有唯一一个三角形，它的三条边长为三个连续的自然数，并且它的三个内角中有一个内角的度数为另一个内角的两倍.

设$\triangle ABC$ 满足题设条件，$AB=n$，$AC=n-1$，$BC=n+1$(n 为大于 1 的自然数)，且$\triangle ABC$ 内角的度数分别为 α、2α、$\pi-3\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{3}\right)$.

$\triangle ABC$ 的三个内角的度数存在三种可能的关系式：

(1) $\pi-3\alpha<\alpha<2\alpha$;

(2) $\alpha<\pi-3\alpha<2\alpha$;

(3) $\alpha<2\alpha<\pi-3\alpha$.

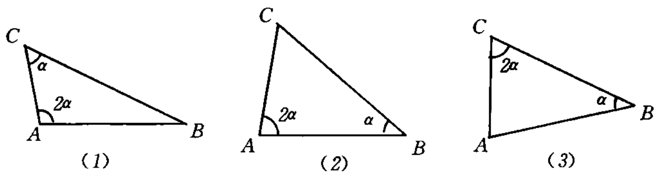

图 1.1

因为 $$\frac{\sin(\pi-3\alpha)}{\sin\alpha}=\frac{\sin3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=3-4\sin^2\alpha$$
$$=4\cos^2\alpha-1$$
$$=\left(\frac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}\right)^2-1,$$
且在同一个三角形中，大边对大角，所以，根据正弦定理可知，在情形(1)中有

$$\frac{n-1}{n}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-1,$$

即 $n^2-3n-1=0$. 该方程无正整数解，故筛除(1)；

同理，对于情况(2)，有

$$\frac{n}{n-1}=\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^2-1,$$

即

$$n^2-5n=0, n=5;$$

对于情形(3)有

$$\frac{n+1}{n-1}=\left(\frac{n}{n-1}\right)^2-1,$$

即

$$n^2-2n=0, n=2.$$

因为长度分别为 1、2、3 的三个线段构不成三角形，所以应筛去(3).

综上所述，满足题设条件的三角形的三边长分别为 4、5、6 三个自然数. 下面证明这样构成的三角形的三个内角中确有一个的度数为另一个的两倍.

由余弦定理得

$$\cos B=\frac{5^2+6^2-4^2}{2\times5\times6}=\frac{3}{4},$$

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}\\ &= \frac{1}{8}\\ &= 2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2-1\\ &= \cos 2B,\end{aligned}$$

$\therefore\quad A=2B.$

G. 波利亚在著作《怎样解题》中列举了一个用试错思想解答作图题的例子. ①

例 5 已知梯形的四条边 a、b、c、d，作出这个梯形来.

令 a 为下底，c 为上底，且 $a>c$，$a/\!/c$，b 不平行于 d. 如果暂时没有别的念头出现，我们先试验一种极端情况：让 c 一直减小到零，此时梯形 $ABCD$ 退化成三角形 ABC(如图 1.2). 引进这个三角形可能会有某些好处，因为三角形的作图比较熟悉而又简单. 但观察了一会儿，我们发现它几乎没有什么用处，因为只知其两边 a 和 d，显然缺条件.

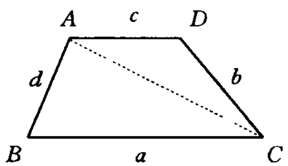

图 1.2

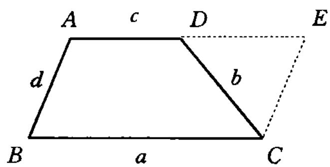

图 1.3

第一次试验虽然失败了，但并非毫无价值，至少，它给我们一个机会去想起用三角形作为达到目的的中间手段.

---

① [美]G. 波利亚著. 怎样解题. 北京：科学出版社，1982. 1:211

我们修改第一次不成功的试验，让 c 一直增加到等于 a（如图 1.3），试试看会发生什么情况. 这时，一个匀称的平行四边形 $ABCE$ 映入眼帘，根据平行四边形的性质，我们发现 $\triangle CED$ 很容易作出，因为已知三边为 b、d 和 $a-c$，于是，原梯形的作图问题便迎刃而解.

从方法论的角度看，上述 5 例的求解模式各有千秋. 如例 1 的解题思路是：首先根据题意确定试验范围（1 至 100），然后根据一定的标准从该范围内逐步排除不符合条件的解，直至筛选出 1 到 100 内的质数. 例 2 的解题策略是：充分挖掘、利用题中给出的信息，在尽可能小的试验范围里，分类枚举各试验对象进行试错，根据试验的结果舍去不符合条件的解，获得正确答案. 例 3 的解题思路是：先通过试验找出“被 3 除余 2”的数的集合 $A_1=\{5,8,11,14,\cdots\}$；然后在 A_1 中试错，寻找“被 5 除余 3”的数，即求“被 3 除余 2”和“被 5 除余 3”的交集 $A_2=\{8,23,38,53,\cdots\}$；最后在 A_2 中试错，筛选出“被 7 除余 4”的数，即求出 3 个集合“被 3 除余 2”、“被 5 除余 3”和“被 7 除余 4”的交集. 解答例 5 的思维模式是：变更问题，通过对极端情况的试错，探索原题的作图方法.

就全局而论，上述 5 例的解题思想是相同的：根据题设条件和所求问题，确定试验对象及其范围，然后按照一定的判别标准，选择恰当的试验方法，去一次一次地试验，或对问题作各种修改和变换，以剔除不符合条件的解或排除错误，直至解决原问题.

我们把这种解题的思维方法称作“试错与筛选”. “试错与筛选”的基本思想只是在原则上给出一种解决数学问题的思维方式，也就是说，我们即使在总体上已经决策，将解决问题的思想