高中各科学习目标与检测

全国重点中学教师编写

数学

厦门大学出版社

高中各科学习目标与检测丛书

数　学

何履端　主编

厦门大学出版社

1988年9月

高中各科学习目标与检测丛书

数　　学

何履端　主编

*

厦门大学出版社出版
福建省新华书店发行
建宁县印刷厂印刷

*

开本787×1092　1/32　12.125印张　272千字　插页2页
1988年11月　第1版　　1988年11月　第1次印刷
印数：　1—35000册
ISBN　7—5615—0136—6

G·25　　定价：3.55元

写在前面

学习目标研究是目前中学教学改革的新课题。为了更好地执行国家教委新颁发的中学教学大纲要求，使之更有效地提高学习效果，厦门大学出版社邀请了上海、江苏、湖南、浙江、福建等省市部分著名中学的特、高级教师，对高中各科学习目标问题作了专题研究，并编写了《高中各科学习目标与检测丛书》，分为《语文》、《政治》、《英语》、《数学》、《物理》、《化学》、《历史》、《地理》、《生物》等九册，作为各年段学生学习和复习指导用书，亦可供教师教学参考及家长评估子女学习之用。

《丛书》各科分为学习目标，对每章（或节）提出具体要求，明确应理解和掌握的重要问题；学习指导，对各科的知识内容分类进行归纳比较，突出重点、难点，注重技能训练，有的放矢地作了具体的阐述，以便学生尽快掌握基础知识和提高分析问题、解决问题的能力；检测习题，精选各类题型进行练习等三部分。书后附有检测习题答案和提示。

本册《高中数学学习目标与检测》的内容，包括全日制中学数学教学大纲所罗列的高中阶段的全部知识点，以及某些初中阶段的知识，便于读者系统复习之用。全书按内容的系统性，分成十五章，每章又分成若干节。每节的学习目标，是按照中学数学教学大纲提出的学习要求，使用了四个

层次的表述要求的用语，具体明确地提出，便于读者领会掌握。各节学习指导中，均有学习内容和学习方法的指导。还通过代表性、典型性的范例，阐述本章知识的主要应用，范例着重解题的分析，揭示解题思路，指明解题方向。特意把解题过程省略，留给读者自己完成，让读者检验是否领会了本题的分析与解题方向。

本书由何履端、张胜坤、吴运筹、林贞生、郑宾王、吴有 、张玟同志参加编写，由何履端副教授审定。林文同志绘图。

由于研究学习目标问题是我们的首次尝试，加上时间匆促，水平所限，在编写中难免有不足或疏漏之处，恳请专家、同行和读者批评指正。

《高中各科学习目标与检测丛书》

编　委　会

1988年9月

目　录

第一章　函　数

第一节　集合、映射与函数

学　习　目　标

1．理解集合、子集、交集、并集、补集的概念。了解空集和全集的意义，了解属于、包含、相等关系的意义，能正确使用有关的术语和符号，能正确地表示一些较简单的集合。

2．了解映射．——映射与逆映射的概念，在此基础上加深对函数有关概念的理解，掌握互为反函数的函数图象之间的关系。

3．理解函数的单调性和奇偶性的概念，并能判断简单函数的单调性和奇偶性，能利用函数的奇偶性描绘函数的图象。

学　习　指　导

1．学习内容

（1）集合

①集合：具有某种属性的一些对象看做一个整体，便形成一个集合。集合里的每个对象叫做这个集合的元素。

如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；如果 a 不是集合 A 的元素，就说 a 不属于 A，记作 $a\notin A$（或 $a\overline{\in}A$）。

集合的两个特征：元素的确定性和互异性。

集合的表示法：列举法、描述法。

自然数集记作N，整数集记作Z，有理数集记作Q，实数集记作R，复数集记作C。

②子集：对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集作 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$）。

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$（或 $B\supset A$）。

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等，记作 $A=B$。

不含任何元素的集合叫做空集，记作 ϕ。$\phi\subseteq A$，$\phi\subset A$，$A\subseteq A$。

对于集作 A、B、C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$。

对于集合 A、B、C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$。

③交集：由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素所组成的集合，叫做 A、B 的交集，记作 $A\cap B$，即

$A\cap B=\{x\mid x\in A$，且 $x\in B\}$。

对于任何集合 A、B，有 $A\cap A=A$，$A\cap\phi=\phi$，$A\cap B=B\cap A$。

④并集：由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A、B的并集，记作$A\cup B$，即

$A\cup B=\{x\in A，或x\in B\}$。

对于任何集合A、B，有$A\cup A=A$，$A\cup\phi=A$，$A\cup B=B\cup A$。

⑤补集：在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号I表示。

已知全集I，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的补集，记作$\bar{A}$，即

$\bar{A}=\{x\mid x\in I，且x\overline{\in}A\}$。

对于任何集合A，有$A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\phi$，$\bar{\bar{A}}=A$。

（2）映射

①映射：设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中的任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，这样的对应（包括集合A，B及从A到B的对应法则f）叫做从集合A到集合B的映射，记作$f：A\to B$。

如果给定一个从集合A到集合B的映射，那么，和A中的元素a对应的B中的元素b叫做a的象，a叫做b的原象。

②一一映射：设A、B是两个集合，$f：A\to B$是从集合A到集合B的映射，如果在这个映射的作用下，对于集合A中的不同元素，在集合B中有不同的象，而且B中每一个元素都有原象，那么这个映射就叫做从A到B上的一一映射。

③逆映射：设$f：A\to B$是集合A到集合B上的一一映射，

如果对于B中的每一个元素 b，使 b在A中的原象 a和它对应，这样所得的映射叫做映射 f：$A \to B$ 的逆映射，记作 f^{-1}：$B \to A$。

从逆映射的定义可知，映射f：$A \to B$也是映射f^{-1} $B \to A$的逆映射。

（3）函数：

①函数的定义及表示法：

定义：如果在某变化过程中有两个变量 x，y，并且对于 x在某个范围内的每一个确定的值，按照某个对应法则，y都有唯一确定的值和它对应，那么 y就是 x的函数，x叫做自变量，x的取值范围叫做函数的定义域，和 x的值对应的 y的值叫做函数值，函数值的集合叫做函数的值域。

用集合的概念也可这样定义：当集合A，B都是非空的数的集合，且B的每一个元素都有原象时，这样的映射f：$A \to B$就是定义域A到值域B上的函数。

$y=f(x)$表示 y是 x的函数。

函数关系的表示法有解析法、列表法与图象法。

②反函数：如果确定函数 $y=f(x)$ 的映射f：$A \to B$是$f(x)$的定义域A到值域B上的一一映射，那么这个映射的逆映射f^{-1}：$B \to A$所确定的函数$x=f^{-1}(y)$叫做函数 $y=f(x)$的反函数。

因为习惯上一般用 x表示自变量，用 y表示函数，为此对调 $x=f^{-1}(y)$中的字母 x、y，把它改写成 $y=f^{-1}(x)$。

求反函数时，由于确定函数 $y=f(x)$的映射f：$A \to B$是f的定义域A到值域B上的一一映射，我们可以先把函数式 $y=f(x)$看作以 x为未知数的方程，从中解出 $x=f^{-1}(y)$，

再改写成为 $y=f^{-1}(x)$。

函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称。

③函数的性质：

1）单调性，对于给定区间上的函数 $f(x)$：

（A）如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就设 $f(x)$ 在这个区间上是增函数；

（B）如果对于属于这个区间的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就设 $f(x)$ 在这个区间上是减函数。

如果函数 $y=f(x)$ 在某个区间上是增函数或减函数，就设 $f(x)$ 在这一区间上具有（严格的）单调性，这一区间叫做 $f(x)$ 的单调区间。

2）奇偶性：对于函数 $f(x)$：

（A）如果对于函数定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数；

（B）如果对于函数定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数。

奇函数的图象关于原点成中心对称图形；反过来，如果一个函数图象关于原点成中心对称图形，那么这个函数是奇函数。

偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形；反过来，如果一个函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，那么这个函数是偶函数。

2．学习方法

（1）集合概念及基本理论，是近代数学最基本的内容之一。许多重要的数学分支，都建立在集合理论的基础上。集合思想还广泛地渗透到自然科学的许多领域。

函数是中学数学最重要的基本概念之一。初中阶段已初步学会用运动变化的观点来考察变量之间的相互依赖和自变量、因变量之间的对应关系。高中阶段则要对函数概念进行再认识，运用集合、映射的思想概括出函数的一般定义，加深对函数概念的理解。

因此，对本节内容必须十分认真学习。

（2）关于集合中元素的两个特征，解释如下：

①确定性：设A是一个给定的集合，x是某一具体对象，则x或者是A的元素，或者不是A的元素，两种情况有且只有一种成立。

②互异性：一个给定集合中的元素，指属于这个集合的互不相同的个体（或对象）。因此，同一集合中不应重复出现同一元素。以后提到集合中的两个元素时，一定是指两个不同的元素。

（3）不要把数0或集合{0}与空集$\varnothing$混淆。

要注意$\in$与$\subseteq$（或$\subset$）这两种符号的不同涵义。$\in$用在元素与集合之间，表示从属关系；$\subseteq$（或$\subset$）用在集合与集合之间，表示包含（或真包含）关系。

（4）关于子集、交集、并集、补集的一些问题，用图解有时非常简便。

（5）一一映射可以通俗地理解为既是单射又是满射的映射。

（6）定义域、值域与对应法则是构成函数的三要素，

其中定义域与对应法则是基本要素。

（7）定义域不对称的函数不具备奇偶性。

（8）判断函数是否具备奇偶性的最基本方法是根据函数的奇偶性定义，即看$f(-x)=-f(x)$和$f(-x)=f(x)$是否成立。

（9）函数的定义域、值域，分别是它的反函数的值域、定义域。

3．应用举例

例1．设有集合$A=\{a, a+d, a+2d\}$，$B=\{a, ar, ar^2\}$，其中$d\neq 0$，$\gamma\neq 1$，试求$A=B$成立的充要条件。

分析：（1）先求必要条件：若$A=B$，则$\begin{cases}a+d=ar\\ a+2d=ar^2\end{cases}$

或$\begin{cases}a+d=ar^2\\ a+2d=ar\end{cases}$，而$\begin{cases}a+d=ar\\ a+2d=ar^2\end{cases}$无解，故由

$\begin{cases}a+d=ar^2\\ a+2d=ar\end{cases}$ 解得$\begin{cases}d=-\dfrac{3}{4}a\\ \gamma=-\frac{1}{2}\end{cases}$。

（2）再证$\begin{cases}d=-\dfrac{3}{4}a\\ \gamma=-\frac{1}{2}\end{cases}$是$A=B$的充分条件。

例2．设$f(x)=x^2+ax+b$（a、$b\in R$），集合$A\{x\mid x=f(x), x\in R\}$，$B=\{x\mid x=f[f(x)], x\in R\}$，（1）求证：$A\subseteq B$；（2）若$A=\{-1, 3\}$试求集合$B$。

分析：（1）若$x\in A$，即$x=f(x)\Longrightarrow f[f(x)]=$

$f(x)=x$，即 $x\in B$。

（2）∵ $A=\{-1,3\}$，∴ $\begin{cases}-1=(-1)^2+a(-1)+b\\3=3^2+a\cdot 3+b\end{cases}$，

解得 $\begin{cases}a=-1\\b=-3\end{cases}$，∴ $f(x)=x^2-x-3$，由 $f[f(x)]=x$，

即 $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$。解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，$x_3=\sqrt{3}$，$x_4=-\sqrt{3}$。集合B即得。

例3．（1）设 $f(x)$是偶函数，且 $x\geqslant 0$时，$f(x)=x^2-x$，当 $x<0$时，$f(x)=$？并画出函数 $y=f(x)$的图象。（2）如果$f(x)$是奇函数，写出它的解析式。

分析：（1）$f(x)$是偶函数。当 $x<0$时，$-x>0$，则$f(x)=f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$。图略。

（2）$f(x)$是奇函数。当 $x<0$时，$-x>0$，则 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^2-(-x)]=-x^2-x$。

$f(x)$的完整解析式即可分段写出。

例4．设点 P（1，2）既在函数$f(x)=ax^2+b$（$x\geqslant 0$）的图象上，又在它的反函数的图象上。（1）求$f(x)$的反函数的解析式；（2）证明反函数是减函数。

分析：（1）反函数为 $y=\sqrt{\dfrac{x-b}{a}}$。

依题意 $\begin{cases}2=a+b\\2=\sqrt{\dfrac{1-b}{a}}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\dfrac{1}{3}\\b=\dfrac{7}{3}\end{cases}$ 代入上