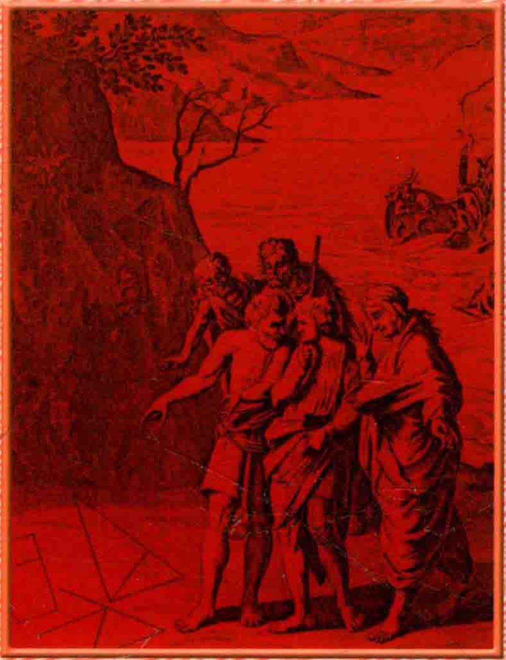
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

闵可夫斯基定理

——从一道华约自主招生试题谈起

佩捷 李舒畅 吴雨辰 编著



◎数的几何
◎椭圆中的格点
◎平面凸区域
◎三维空间中的球面
◎Minkowski-Hlawka 定理
◎空间群

HITP
哈爾濱工業
HARBIN INSTITUTE OF

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

闵可夫斯基定理

——从一道华约自主招生试题谈起

佩捷 李舒畅 吴雨辰 编著

◎数的几何

◎椭圆中的格点

◎平面凸区域

◎三维空间中的球面

◎Minkowski-Hlawka 定理

◎空间群

HITP

哈爾濱工業大學出版社

HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道华约自主招生试题谈起，主要介绍了闵可夫斯基定理及其应用.

本书适合高校的师生、数学竞赛教练员及选手和数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

闵可夫斯基定理:从一道华约自主招生试题谈起/佩捷，李舒畅，吴雨辰编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社，2016.3

ISBN 978-7-5603-5674-7

Ⅰ.①闵… Ⅱ.①佩…②李…③吴… Ⅲ.①闵可夫斯基问题-研究 Ⅳ.①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 264814 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 13　字数 134 千字
版　　次　2016 年 3 月第 1 版　2016 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5674-7
定　　价　28.00 元

目录

第1章 一道华约自主招生题

在2008年清华大学等高校(简称华约)的自主招生考试中出现如下试题:

试题 定义横、纵坐标都是整数的点为格点.在平面直角坐标系中,有对称中心是原点的矩形,证明面积大于4的该类矩形至少包含除原点外的两个格点.

证明 如图1,将平面划分成以$(2m,2n)$为中心,边长为2且四边平行于坐标轴的正方形的并集,每两个正方形最多只在一条边外相交.

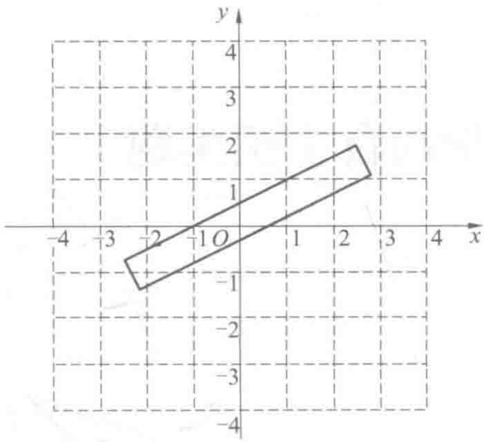


图 1

对于面积大于 4 的矩形 R，若某个正方形与 R 的交的面积大于 0(注意，线面积为 0)，令这样的正方形集合为 S. 则将该正方形平移至与以原点为中心的正方形 Q 重合，由于 R 的面积大于 4，必存在 Q 内部的一点是 S 中两个正方形平移后的公共点.

设该点坐标为 (x,y)，则存在 $(m,n)\neq(i,j)$，使 $A(x+2m,y+2n)$，$B(x+2i,y+2j)$ 都在 R 中.

由于 R 的对称性，知 $A'=(-x-2m,-y-2n)$ 也在 R 中，于是线段 $A'B$ 的中点 $M(i-m,j-n)\neq(0,0)$ 在 R 中，相应的其关于原点的对称点 M' 也在 R 中.

这是一道有背景的试题，体现了大学教师对现代数学的了解和鉴赏. 对破除目前高考趋于"八股化"的倾向是一个有益的尝试，在许多辅导书中都出现了其背景介绍：

闵可夫斯基定理 如果一个关于原点对称，面积大于 4 的凸区域，那么该区域除原点外，一定还有其他

格点.

证明　如图 2,作与坐标轴距离是偶数的两组平行线. $OABC$ 是位于第一象限且离原点最近的 2×2 方格,这些不重叠的 2×2 方格把这个凸区域分成若干块,将这些小块连同其所在 2×2 方格一起平移,使其与 $OABC$ 完全重叠. 由于此凸区域的面积大于 4, $OABC$ 的面积等于 4,故由重叠原则,知至少有两块有公共点.

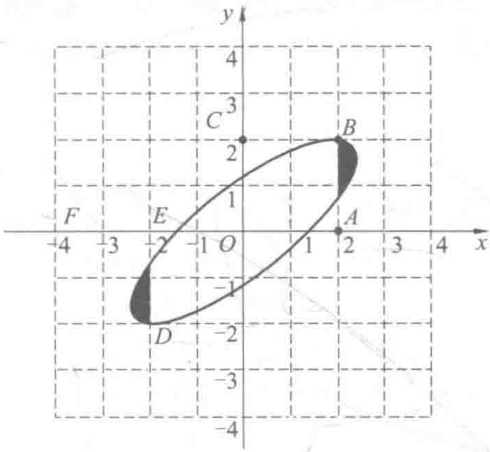


图 2

因此原来的凸区域内有两个点 P 和 Q(两者不一定都是 $OABC$ 内的点),它们的横坐标的差与纵坐标的差都是偶数.

设 P 的坐标为 (x_1,y_1),Q 的坐标为 (x_2,y_2),则由凸区域的对称性,知点 P 关于原点 O 的对称点 $P'(-x_1,-y_1)$ 也在此凸区域内. 由区域的凸性,知线段 $P'Q$ 也在此区域内. 因此其中点 $M\left(\dfrac{x_2-x_1}{2},\dfrac{y_2-y_1}{2}\right)$ 也

在此区域内.而由上述平移规则,知 x_2-x_1 与 y_2-y_1 都是偶数,故 $\frac{x_2-x_1}{2}$ 与 $\frac{y_2-y_1}{2}$ 都是整数,从而 M 是格点.进而格点 M 关于原点 O 的对称格点 M' 也在此区域内.

本题是闵可夫斯基定理的特例(那个定理说,对于平面单位正方形点格阵,以某个格点为对称中心面积大于 4 的平面凸区域,其内部至少包含 3 个格点),希尔伯特在他的《直观几何学》一书里给出了特殊情形:以某个格点为中心,边长为 2 的正方形,其内部或边上还有一个格点(由对称性,有一个就肯定还有另一个).

一道 Putnam 赛题和一道苏联大学生数学竞赛试题

第 2 章

1979 年 12 月 1 日第四十届 The William Lowell Putnam Mathematical Competition 试题 B－5.

试题 1　设 C 是平面上的闭凸集，C 除了包含 $(0,0)$ 外不包含其他坐标为整数的点；又设 C 分布在四个象限中的面积相等，试证 C 之面积 $A(C)\leqslant 4$.

试题 2　设 $f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$，式中 a,b,c 是实数，且 $D=ac-b^2>0$，证明：存在不同时为零的整数 u,v，使 $|f(u,v)|\leqslant\left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

这是苏联大学生 1977 年数学奥林匹克的一道试题.

这两个试题都是“数的几何”中闵可夫斯基定理的特例.“数的几何”是闵可夫斯基开创的一个独立的数论分支.

赫尔曼·闵可夫斯基(Hermann-Minkowski,1864 年 6 月 22 日 —1909 年 1 月 12 日)德国数学家.生于俄国的阿列克萨塔斯(Alexotas,今在俄罗斯考纳斯(Kayhac)),卒于哥廷根.8 岁时随全家迁回德国,曾在柏林大学学习.后入柯尼斯堡(Kønigsberg)大学,在那里与数学家希尔伯特结为挚友.1885 年获数学博士学位.经过短期服役后,相继在波恩、柯尼斯堡(1895)、苏黎世(1896)和哥廷根(1903)等大学任数学教授.在哥廷根时与希尔伯特①一起领导过数学讨论班.1881 年,巴黎科学院悬赏征求下述问题的解:将一个数表成五个平方数的和.年仅 17 岁的闵可夫斯基提交出大大超过原问题结果的论文,给出了更一般的答案,终于在 1883 年与当时英国著名的数学家亨利·史密斯②同获这项数学大奖.从此,闵可夫斯基与数论结下不解之缘,在代数数论,特别是有理系数的二次型理

① 希尔伯特(Hilbert,David,1862.1.23—1943.2.14)德国数学家.生于普鲁士柯尼斯堡(今苏联的加里宁格勒)的韦洛,卒于哥廷根.他发展了早期几何基础的工作,形成了数学基础中“形式主义”这一流派,创立了证明论或元数学,成为数理逻辑五大主要部门之一.

② 史密斯,H.J.S.(Smith,Henry John Stanley,1826.11.2—1883.2.9)英国数学家.生于爱尔兰都柏林,卒于牛津.他研究过数学的许多问题,其中主要贡献在数论方面.他在以后的十几年中不断补充完善数论理论,并因此获法国科学院的奖金.

论方面做出了突出贡献.他开创了用几何方法去研究数论,其目的是用几何图形来表达有理数的代数猜想,结果常常使证明变得更加简洁.1896 年他出版了有关的系统论著《数的几何》(Geometrieder Zahlen),将数论中型的理论提升到一个新的高度.闵可夫斯基应用几何方法对连分数理论和 n 维空间的凸性理论做了探索;他还由对应几何原理引进空间距离的新定义,为 20 世纪 20 年代建立赋范空间铺平了道路.闵可夫斯基的另一贡献是与著名物理学家爱因斯坦同时奠定了相对论的基础.他曾在 1908 年的科学年会上提出若干有关电动力学的新结果.他的演讲以"空间和时间"(Raum and Zeit,1907)为主题,引进了极为简单的数学空、时观.根据这种思想,某些现象可以用简单的数学方式表出,使三维几何学变成了四维物理学.他的工作为相对论提供了数学工具.1909 年,闵可夫斯基因急性阑尾炎引起的并发症早逝于哥廷根.闵可夫斯基的接班人是兰道[①].

① 兰道(Landau,Edmund Georg Herman 1877.2.14—1938.2.19)德国数学家.生于柏林,卒于同地.他在解析数论、单变量解析函数论、算术的公理化等方面皆有重要贡献.

数的几何

第3章

前伦敦数学会主席，国际数学联副主席卡斯尔斯（Cassels, John William Scott）在他1959年写的《数的几何引论》（An Introduction to the Geometry of Numbers）的序言中写道：

数的几何中一个基本并典型的问题如下：

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是实变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个实值函数，适当地选择整数 $u_1,\cdots,u_n$ 能使 $|f(u_1,\cdots,u_n)|$ 小到什么程度？可能有一个平凡解 $f(0,\cdots,0)=0$，例如当 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是一个齐次型，此时要排除 $u_1=u_2=\cdots=u_n=0$ 的情形（齐次问题）.

一般地,估计要求不仅对个别函数而是对整个一类函数都有效.一个典型的结果如下:如果

$$f(x_1,x_2)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+a_{22}x_2^2 \tag{1}$$

是一个正定二次型,则存在不全为零的整数 u_1,u_2 使得

$$f(u_1,u_2)\leqslant(4D/3)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

其中

$$D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$$

是此二次型的判别式.由于任何一对不全为零的整数 u_1,u_2 都有 $u_1^2+u_1u_2+u_2^2\geqslant1$,此处 $D=\frac{3}{4}$.因此,如果结果正确,则它是最佳的.

当然正定二元二次型是一个特别简单的情形,上面的结果在数的几何产生前就已经知道.而且我们还可以给出一个实质上不依赖数的几何的证明.但是对正定二元二次型的论证展示了一些特别简单的方法,我们将继续用它作为例子.

上述结果可以用图像来表达.一个形为

$$f(x_1,x_2)\leqslant\kappa$$

的不等式表示(x_1,x_2)平面上的一个椭圆形有界区域 $\mathscr{R}$,如果 $f(x_1,x_2)$ 由式(1)给出且 κ 是一些正数.那么只要 $\kappa\geqslant(\frac{4}{3}D)^{\frac{1}{2}}$,前面的结果表明 $\mathscr{R}$ 就包含一个原点以外的整数坐标点(u_1,u_2).

从闵可夫斯基基本定理立即可得类似的结果.但没有如此精确.在二维的情形下此结果可表述为,一个区域 $\mathscr{R}$ 只要满足以下三个条件,总是包含一个原点以外的整数点(u_1,u_2):

i)$\mathscr{R}$ 关于原点对称，即若(x_1,x_2) 在 $\mathscr{R}$ 内，则$(-x_1,-x_2)$ 也在 $\mathscr{R}$ 内.

ii)$\mathscr{R}$ 是凸的，即如果(x_1,x_2) 与(y_1,y_2) 是 $\mathscr{R}$ 的两个点，则联结它们的全部线段$\{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\lambda x_2+(1-\lambda)y_2\}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$ 也都在 $\mathscr{R}$ 内.

iii)$\mathscr{R}$ 的面积大于 4.

任何椭圆 $f(x_1,x_2)\leqslant\kappa$ 满足 i) 和 ii)，因为它的面积是

$$\frac{\kappa\pi}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{\kappa\pi}{D^{\frac{1}{2}}}$$

只要 $\kappa\pi>4D^{\frac{1}{2}}$ 它也满足 iii). 这样我们有一个与式(2) 相类似的结果，只要常数$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ 被任何比$\frac{4}{\pi}$ 大的数所代替.

简单地考虑闵可夫斯基定理证明背后的基本想法是有益的，因为在后面的正式证明中，由于需要得出尽可能广泛适用的强有力的定理，证明思想反而变得模糊了. 闵可夫斯基的工作是用点$\left(\frac{1}{2}x_1,\frac{1}{2}x_2\right)$ 构成的区域 $\mathscr{S}=\frac{1}{2}\mathscr{R}$ 代替 $\mathscr{R}$. 其中(x_1,x_2) 在 $\mathscr{R}$ 内. 这样 $\mathscr{S}$ 关于原点对称并且是凸的，它的面积是 $\mathscr{R}$ 的$\frac{1}{4}$，因而大于 1. 更一般地，闵可夫斯基考虑相似于 $\mathscr{S}$ 但中心在整点(u_1,u_2) 的全体相似的 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$.

首先我们指出，如果 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 叠交[①]，则$(u_1,$

---

① 逆命题真是显然的. 若(u_1,u_2) 在 $\mathscr{R}$ 中，$\left(\frac{1}{2}u_1,\frac{1}{2}u_2\right)$ 在 $\mathscr{S}$ 和 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 中.

u_2）在 $\mathscr{R}$ 内（图 1）. 因为设重叠部分的一个点为（ξ_1，ξ_2），因（ξ_1，ξ_2）在 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 内，点（ξ_1-u_1，ξ_2-u_2）必须在 $\mathscr{S}$ 内，由对称性点（$u_1-\xi_1$，$u_2-\xi_2$）在 $\mathscr{S}$ 内，然后由于 $\mathscr{S}$ 是凸的，（$u_1-\xi_1$，$u_2-\xi_2$）与（ξ_1，ξ_2）的中点（$\frac{1}{2}u_1$，$\frac{1}{2}u_2$）在 $\mathscr{S}$ 内，即（u_1，u_2）在 $\mathscr{R}$ 内，正如指出的那样. 显然 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 与 $\mathscr{S}(u'_1,u'_2)$ 叠交当且仅当 $\mathscr{S}$ 与 $\mathscr{S}(u_1-u'_1,u_2-u'_2)$ 叠交.

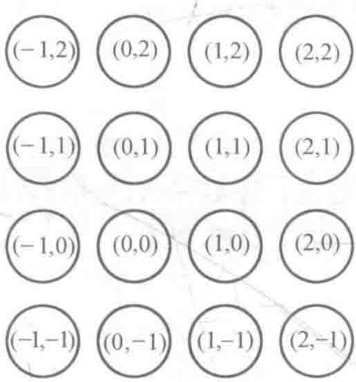


图 1

因此，为证明闵可夫斯基定理，只需证明若 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 互不叠交，则它们每一个的面积不超过 1 就足够了. 略加思考就可确信这是必须如此的. 一个正式的证明在下文给出. 另一个或许更加直观的论证如下. 我们假定 $\mathscr{S}$ 完全包含在一个正方形 $|x_1|\leqslant X$，$|x_2|\leqslant X$ 内. 设 U 是一个大整数，有 $(2U+1)^2$ 个中心在（u_1，u_2）的区域 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 适合 $|u_1|\leqslant U$，$|u_2|\leqslant U$，所有这些 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 全都包含在面积为 $4(U+X)^2$ 的正方形 $|x_1|\leqslant U+X$，$|x_2|\leqslant U+X$ 内. 因为假定 $\mathscr{S}(u_1,u_2)$ 都不叠交，我们有 $(2U+1)^2\leqslant 4(U+X)^2$. 此处 V