21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

泛函分析选讲

FANHAN FENXI XUANJIANG

北京师范大学数学科学学院　主　编

杨大春　袁　文/编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

21世纪高等学校研究生教材

数学学科硕士研究生系列教材

泛函分析选讲

FANHAN FENXI XUANJIANG

北京师范大学数学科学学院　主　编

杨大春　袁　文/编著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

泛函分析选讲/杨大春，袁文，编著．—北京：北京师范大学出版社，2016. 2

(21 世纪高等学校研究生教材　数学学科硕士研究生基础课程系列教材)

ISBN 978-7-303-20105-1

Ⅰ. ①泛…　Ⅱ. ①杨…　②袁…　Ⅲ. ①泛函分析-研究生-教材　Ⅳ. ①O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 025461 号

营销中心电话　010-58802181　58802123
北师大出版社高等教育分社网　http://gaojiao.bnup.com
电子信箱　gaojiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　刷：北京市东方圣雅印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：730 mm×980 mm　1/16
印　张：30
字　数：500 千字
版　次：2016 年 2 月第 1 版
印　次：2016 年 2 月第 1 次印刷
定　价：65.00 元

策划编辑：岳昌庆　责任编辑：岳昌庆　刘　军
美术编辑：焦　丽　装帧设计：焦　丽
责任校对：陈　民　责任印制：陈　涛

前言

研究生教材建设是研究生培养工作的重要环节, 是研究生教学改革措施之一, 也是衡量学校研究生教学水平和特色的重要依据. 纵观我院的研究生教育, 可分为几个阶段: 1953～1960年是我院研究生教育初创时期, 招收代数、分析、几何等方向的10个研究生班; 1962～1965年改为招收少量的硕士研究生; 1966～1976年“文化大革命”时期, 研究生停止招生. 1978年, 我院恢复招收硕士研究生, 研究生所学课程除外语和自然辩证法公共课程外, 主要学习几门专业课. 每年导师根据招生情况, 分别制订每个研究生的培养计划. 从1982年开始, 首次开展制订攻读硕士学位研究生培养方案的工作. 为拓宽研究生的知识面, 对每届研究生开设5门专业基础理论课: 泛函分析、抽象代数、实分析、复分析、微分流形, 每人至少选3门; 从1983年起, 增加代数拓扑, 共6门基础理论课, 安排有经验的教师讲课且相对固定, 考试要求严格, 使研究生受到正规的训练. 由于不同院校开设的本科生课程有一定的差距, 经过这个阶段的学习后, 基本上达到了一个相同的水平, 为从本科生到研究生基础水平过渡提供了保障. 在1992年修订教学计划时, 增加了概率论基础和计算机基础. 这样, 基础理论课共开设8门. 从1997学年开始, 规定研究生每人至少选4门. 从2000年开始, 改为开设12门基础课, 增加应用分析基础(后改称现代分析基础)、偏微分方程、李群、随机过程. 从2007学年开始, 改为开设14门基础课, 增加高等统计学、最优化理论与算法、非线性泛函分析、动力系统基础, 规定研究生每人至少选5门; 去掉计算机基础、李群. 经过30多年系统的研究生培养工作, 研究生教育正在逐步走向正规. 在此期间, 学院在学科建设、人才培养和教学实践中积累了比较丰富的经验, 将这些经验落实并贯彻到研究生教材编著中去是大有益处的.

随着研究生的扩招, 再加上培养方案的改革, 出版研究生系列教材已经提到议事日程上来. 在20世纪90年代, 北京师范大学出版社已经出版了几部基础课教材:《泛函分析》《实分析》《随机过程通论》等, 但未系统策划出版系列教材. 2005年5月, 由北京师范大学数学科学学院李仲来教授和北京

师范大学出版社理科编辑部岳昌庆、王松浦进行了沟通和协商, 由北京师范大学数学科学学院主编(李仲来教授负责), 准备对北京师范大学数学科学学院教师目前使用的北京师范大学出版社出版的几部教材进行修订后再版, 进一步计划用几年时间, 出版数学一级学科硕士研究生的基础课程系列教材和部分专业课教材.

我们希望使用这些教材的校内外专家学者和广大读者, 提出宝贵的修改意见, 使其不断改进和完善.

本套教材可供高等院校数学一级学科硕士研究生和课程与教学论(数学)等硕士研究生使用和参考.

北京师范大学数学科学学院

2015-12-02

作者的话

本书是作者近些年来为北京师范大学数学科学学院的高年级本科生及硕、博研究生所开设的泛函分析研讨课程的讲义，其主要内容参考了北京大学张恭庆教授和林源渠教授的《泛函分析讲义上册》第二章和第四章以及张恭庆教授和郭懋正教授的《泛函分析讲义下册》第五章、第六章和第七章，并增加了作者自己和研讨班同学的关于许多细节的补充证明及理解.

泛函分析是研究现代数学和物理学中诸多问题的一个强有力工具，在现代数学及其他相关学科中的地位和重要作用已毋庸赘述. 虽然国内外关于泛函分析的基础理论已有许多优秀的教材珠玉在前，但很难找到一本难度适中且适合于国内基础数学分析类方向的研究生教材. 基于作者近些年来的学术兴趣和研究方向，我们选取了紧算子理论、Banach代数、算子的谱理论以及算子半群理论四个方面的基础理论作为本书的主要内容.

具体地，本书共分四章. 第1章主要介绍有界线性算子特别是紧算子的谱. 作为矩阵的本征值这一概念的推广，算子的谱在研究算子的结构方面起着重要作用. 例如，Hilbert空间上的对称紧算子可以完全地由该算子的本征值来确定(Hilbert-Schmidt定理). 第2章主要介绍了Banach代数及C^*代数的一些基础知识，并基于此进一步给出了Hilbert空间上有界正常算子的谱分解. 第3章主要关注无界算子，给出了一般无界自伴算子的谱族和谱分解. 最后，在第4章中，介绍了强连续线性算子半群的一些基础知识，并给出了算子半群理论在Bochner定理和遍历定理中的一些应用的例子.

由于这些理论对高年级本科生和研究生来说难度较大，为了便于他们的理解，我们在本书中尽可能地给出了详尽的演算过程和证明细节. 本书最大的特色在于除了本科生应该掌握的一些基础泛函分析知识之外，尽可能地做到自包含、并注重其证明和推理的严谨性. 为了理解本书的这些知识，读者仅需具备本科泛函分析的一些基本知识和概念. 具体地，读者如果理解了北京大学张恭庆教授和林源渠教授的《泛函分析讲义上册》的第一章和第二章的主要内容即已足够.

本书重点介绍了算子的谱理论和算子半群理论. 这些理论是从事调和分析、泛函分析、偏微分方程、概率论和位势理论等相关学科分支研究工作的必备工具之一, 希望本书能为从事这些相关专业的研究生及科研工作者的研究工作提供一定的帮助. 由于作者学识水平所限, 本书难免存在错误和不足之处, 望各位专家和广大读者予以批评指正并通知作者.

在本书的编写过程中, 我们得到了许多老师和同学的帮助, 其中包括北京师范大学数学科学学院调和分析方向已经毕业和在读的如下研究生: 孟岩、林海波、周渊、杨东勇、刘丽光、蒋仁进、杨四辈、曹军、梁熠宇、刘绥乐、卓次强、付星、侯绍雄、卢玉峰、张俊强、贺新蕾、陈夏铭、刘军、闫现杰、吴素青、贺子毅、张军伟和刘奕. 除此之外, 还得到了北京师范大学数学科学学院参加本书研讨班的高年级本科生和其他研究生同学的许多宝贵建议和帮助, 限于篇幅我们不一一列举, 在此一并致谢. 特别感谢卓次强同学为本书的Tex编排所付出的辛勤劳动, 并感谢北京师范大学出版社在本书撰写过程中所给予我们的大力支持.

最后指出, 不同于通常的教材, 本书特意设计版面不是十分紧凑, 留有些许空白, 虽有挣取稿费之嫌疑, 但真正的目的是希望读者阅读轻松、愉快及便于注记, 但愿这种尝试是有益的.

杨大春(dcyang@bnu.edu.cn)、袁文(wenyuan@bnu.edu.cn)
2015年12月5日于北京师范大学后主楼

目 录

第1章 紧算子的谱理论

算子谱理论的发展始于线性微分方程及其无穷维推广的解的研究，是现代数学、物理和工程的许多分支，如偏微分方程、量子力学和信号处理中不可缺少的工具. 通过研究算子的谱，人们可以更清楚地了解算子本身的结构，从而用来刻画相应方程的解的构造. 在本章中，我们将介绍Banach(巴拿赫)空间上的有界线性算子特别是紧算子的谱理论，后者的性质类似于有限维空间中的矩阵，其在积分方程理论和数学物理问题的许多研究中起着重要作用.

本章主要参考了文献[5]的第二章和第四章.

§1.1 有界线性算子的谱

在本书中，用$\mathbb{N}$表示正整数，即$\mathbb{N} := \{1,2,\cdots\}$；用$\mathbb{C}$表示所有的复数全体. 设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$为线性赋范空间，用$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$表示$\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的所有有界线性算子全体且对每一个$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$，用$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})}$表示$T$在$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$中的算子范数. 特别地，若$\mathscr{X}=\mathscr{Y}$，我们记$\mathscr{L}(\mathscr{X}) := \mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{X})$且对每一个$T\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$，用$\|T\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})}$表示$T$在$\mathscr{L}(\mathscr{X})$中的算子范数.

定义1.1.1. 设$A:\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$是线性算子，$D(A)$是其定义域. 称$A$是闭的，是指由$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)$且当$n\to\infty$时，$x_n\to x$及$Ax_n\to y$就能推出$x\in D(A)$且$y=Ax$.

由闭算子的定义易知，若算子A闭，则对任意的$\lambda\in\mathbb{C}$，算子$\lambda I-A$仍然闭. 若$A\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$且$\mathscr{X}$为Banach空间，则$A$是闭算子.

关于闭算子我们还有以下重要的闭图像定理(见[5, 第98页, 定理2.3.14]).

定理1.1.2. *设$\mathscr{X}$，$\mathscr{Y}$为Banach空间，若A是$D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$的闭线性算子，并且$D(A)$闭，则$A$是有界线性算子.*

我们考虑非平凡复Banach空间$\mathscr{X}$及闭线性算子$A: D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{X}$，其中$D(A)$表示算子$A$的定义域. 若存在$\lambda\in\mathbb{C}$和$x_0\in D(A)\setminus\{\theta\}$使得

$$Ax_0=\lambda x_0,$$

则称λ为A的本征值, 称x_0为λ的本征元. 此处及以后, θ表示$\mathscr{X}$中的零元.

定义1.1.3. 设$\mathscr{X}$是Banach空间,

$$A:\ D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{X}$$

是闭线性算子, 并记I为$\mathscr{X}$上的恒等算子. 称集合

$$\rho(A):=\{\lambda\in\mathbb{C}:\ (\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})\}$$

为A的预解集, $\rho(A)$中的元素λ称为A的正则值.

当$\dim\mathscr{X}<\infty$时(此处及下文中, $\dim\mathscr{X}$表示空间$\mathscr{X}$的维数), 由线性代数理论知, $\lambda\in\mathbb{C}$只有两种可能:

(i) 或者λ是本征值;

(ii) 或者$(\lambda I-A)^{-1}$是一个矩阵, 即$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$, 此时$\lambda$为正则值.

而当$\dim\mathscr{X}=\infty$时, 有如下4种情况:

(i) $(\lambda I-A)^{-1}$不存在, 即λ为本征值, 其全体记为$\sigma_p(A)$;

(ii) $(\lambda I-A)^{-1}$存在, 且值域

$$R(\lambda I-A):=(\lambda I-A)D(A)=\mathscr{X},$$

即λ是正则值;

(iii) $(\lambda I-A)^{-1}$存在, $R(\lambda I-A)\neq\mathscr{X}$但$\overline{R(\lambda I-A)}=\mathscr{X}$. 此时称$\lambda$为$A$的连续谱, 其全体记为$\sigma_c(A)$;

(iv) $(\lambda I-A)^{-1}$存在且$\overline{R(\lambda I-A)}\neq\mathscr{X}$. 此时称$\lambda$为$A$的剩余谱, 其全体称为$\sigma_r(A)$.

称$\sigma(A):=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$为$A$的谱集, $\lambda\in\sigma(A)$称为A的谱点. 我们有

$$\sigma(A)=\sigma_p(A)\cup\sigma_c(A)\cup\sigma_r(A).$$

命题1.1.4. 设$\mathscr{X}$为Banach空间且

$$A:\ D(A)\subset\mathscr{X}\to\mathscr{X}$$

为闭线性算子. 若$(\lambda I-A)^{-1}$存在, 且值域

$$R(\lambda I-A):=(\lambda I-A)D(A)=\mathscr{X},$$

则$(\lambda I-A)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{X})$.

证明 由$D((\lambda I-A)^{-1})=R(\lambda I-A)=\mathscr{X}$闭及闭图像定理1.1.2, 只需证明$(\lambda I-A)^{-1}$为闭算子即可.

首先证明$\lambda I-A$为闭算子. 设$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)$, 满足

$$\begin{cases} x_n\to x, & n\to\infty,\\ (\lambda I-A)x_n\to y, & n\to\infty,\end{cases}$$

只需证$x\in D(A)$且$y=(\lambda I-A)x$即可. 注意到$\lambda x-\lim_{n\to\infty}Ax_n=y$, 即

$$\begin{cases} Ax_n\to\lambda x-y, & n\to\infty,\\ x_n\to x, & n\to\infty,\end{cases}$$

从而由A闭, 有$x\in D(A)$且$Ax=\lambda x-y$, 即$(\lambda I-A)x=y$. 故$\lambda I-A$为闭算子.

下证$(\lambda I-A)^{-1}$为闭算子. 设$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D((\lambda I-A)^{-1})=\mathscr{X}$, 使得

$$\begin{cases} x_n:=(\lambda I-A)^{-1}y_n\to x, & n\to\infty,\\ y_n\to y, & n\to\infty.\end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases} (\lambda I-A)x_n=y_n\to y, & n\to\infty,\\ x_n\to x, & n\to\infty.\end{cases}$$

故由$\lambda I-A$闭知$x\in D(\lambda I-A)=D(A)$且$(\lambda I-A)x=y$. 从而

$$y\in R(\lambda I-A)=D((\lambda I-A)^{-1})$$

且$(\lambda I-A)^{-1}y=x$. 这说明$(\lambda I-A)^{-1}$为闭算子, 再由闭图像定理即得结论. 因此命题得证. □

以下例子说明当$\dim\mathscr{X}=\infty$时, 前述类型的谱均可能出现.

例1.1.5. 设$\mathscr{X}=L^2[0,1]$为实空间, $A:\ u(t)\mapsto -\frac{d^2}{dt^2}u(t)$, 定义域

$$D(A):=\big\{u\in L^2[0,1]:\ u\text{二次可微},\ u'\text{绝对连续且}\ u''\in L^2[0,1],\ u(0)=u(1),\ u'(0)=u'(1)\big\}.$$

则A为闭线性算子, $\sigma(A)=\sigma_p(A)=\{(2n\pi)^2:\ n\in\mathbb{N}\}$且

$$\rho(A)=\mathbb{C}\setminus\{(2n\pi)^2:\ n\in\mathbb{N}\}.$$

证明　首先说明A是闭算子, 只需说明当$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset D(A)$且

$$\begin{cases} u_n\to u, & n\to\infty,\\ -u_n''\to v, & n\to\infty \end{cases}$$

在$L^2[0,1]$意义下成立时, 有$u\in D(A)$且$-u''=v$. 为此, 令

$$y(t):=-\int_0^t v(s)\,ds,$$

其中$t\in[0,1]$. 下证$\{u_n'(t)-u_n'(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$在$L^2[0,1]$及一致意义下收敛到$y(t)$. 事实上, 由$u_n'$绝对连续及Hölder不等式, 我们有

$$\begin{aligned}\left|u_n'(t)-u_n'(0)-y(t)\right| &= \left|\int_0^t [u_n''(s)+v(s)]\,ds\right|\\ &\leqslant \|u_n''+v\|_{L^2[0,1]}\\ &\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

上述极限关于$t\in[0,1]$一致. 由此, 进一步可知$\int_0^1 v(s)\,ds=0$且

$$\|u_n'-u_n'(0)-y\|_{L^2[0,1]}\leqslant \|u_n''+v\|_{L^2[0,1]}\to 0,\quad n\to\infty.$$

从而$\{u_n'-u_n'(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$为$L^2[0,1]$中的Cauchy列.

下面证明存在$\alpha \in \mathbb{R}$使得$\lim_{n\to\infty} u_n'(0) = \alpha$. 由此, 进一步有

$$u_n' \to \alpha + y, \quad n \to \infty$$

在$L^2[0,1]$及一致意义下成立. 事实上, 由$u_n(0) = u_n(1)$知$\int_0^1 u_n'(t)\,dt = 0$, 从而由Hölder不等式进一步有

$$\begin{aligned}|u_n'(0) - u_m'(0)| &= \left|\int_0^1 [-u_n'(t) + u_n'(0) + u_m'(t) - u_m'(0)]\,dt\right| \\ &\leqslant \|[u_m' - u_m'(0)] - [u_n' - u_n'(0)]\|_{L^2[0,1]} \\ &\to 0, \quad n, m \to \infty.\end{aligned}$$

由此知$\{u_n'(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$是Cauchy列, 从而存在$\alpha \in \mathbb{R}$使得

$$u_n'(0) \to \alpha, \quad n \to \infty.$$

定义

$$\Omega(t) := \int_0^t [\alpha + y(s)]\,ds, \quad t \in [0,1],$$

则$\Omega(0) = 0$显然成立. 下证$\{u_n(t) - u_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$在$L^2[0,1]$及一致意义下收敛于$\Omega(t)$. 事实上, 注意到$u_n(t) - u_n(0) = \int_0^t u_n'(s)\,ds$, 故由Hölder不等式有

$$\begin{aligned}&\left|u_n(t) - u_n(0) - \int_0^t [\alpha + y(s)]\,ds\right| \\ &= \left|\int_0^t [u_n'(s) - \alpha - y(s)]\,ds\right| \\ &\leqslant \|u_n' - (\alpha + y)\|_{L^2[0,1]} \\ &\to 0, \quad n \to \infty\end{aligned}$$

关于$t \in [0,1]$一致成立. 从而$\Omega(1) = 0$且

$$\|u_n - u_n(0) - \Omega\|_{L^2[0,1]} \leqslant \|u_n' - (\alpha + y)\|_{L^2[0,1]} \to 0, \quad n \to \infty.$$

又由

$$\begin{aligned}&|u_n(0) - u_m(0)| \\ &= \|u_n(0) - u_m(0)\|_{L^2[0,1]}\end{aligned}$$

$$\leqslant \|[u_n - u_n(0)] - [u_m - u_m(0)]\|_{L^2[0,1]} + \|u_n - u_m\|_{L^2[0,1]}$$
$$\to 0, \quad n, m \to \infty$$

知$\{u_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$是Cauchy列, 从而收敛. 设$\beta := \lim_{n\to\infty} u_n(0)$, 则

$$u_n(t) \to \beta + \Omega(t), \quad n \to \infty$$

在$L^2[0,1]$及一致意义下成立. 由此及Riesz定理(见[7, 定理3.17]), 对几乎处处的$t \in [0,1]$有

$$u(t) = \beta + \Omega(t) = \beta + \alpha t - \int_0^t \int_0^s v(\tau)\, d\tau ds.$$

令$\widetilde{u}(t) := \beta + \Omega(t)$, 则$\widetilde{u}$二次可微, $\widetilde{u}'$绝对连续, $\widetilde{u}'' \in L^2[0,1]$且在$L^2[0,1]$中$\widetilde{u} = u$. 显然有$\widetilde{u}'' = -v$. 由$\Omega(1) = \Omega(0) = 0$可知$\widetilde{u}(1) = \beta = \widetilde{u}(0)$. 又由

$$\widetilde{u}'(t) = \alpha - \int_0^t v(\tau)\, d\tau$$

知$\widetilde{u}'(0) = \alpha$且

$$\widetilde{u}'(1) = \alpha - \int_0^1 v(\tau)\, d\tau = \alpha = \widetilde{u}'(0).$$

由此有$\widetilde{u} \in D(A)$, 从而A为闭算子.

下面证明$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{(2n\pi)^2 : n \in \mathbb{N}\}$. 注意到对任意$n \in \mathbb{N}$,

$$A \sin(2n\pi t) = (2n\pi)^2 \sin(2n\pi t),$$

故$([2n\pi]^2 I - A)^{-1}$不存在, 从而$(2n\pi)^2 \in \sigma_p(A)$. 令

$$E := \{(2n\pi)^2 : n \in \mathbb{N}\},$$

则$E \subset \sigma_p(A)$. 下面证明$\sigma_p(A) \subset E$. 为此只需证$[\mathbb{C} \setminus E] \subset \rho(A)$. 若此事实成立, 则有

$$\mathbb{C} = E \cup (\mathbb{C} \setminus E) \subset \sigma_p(A) \cup \rho(A) \subset \mathbb{C}.$$

故$\mathbb{C} = \sigma_p(A) \cup \rho(A)$, 从而$\sigma_p(A) = [\rho(A)]^{\complement} \subset E$, 故结论成立.

首先说明$\lambda \in \mathbb{C} \setminus E$时, $(\lambda I - A)^{-1}$存在, 这只需说明$\lambda I - A$为单射.

设$u_1, u_2 \in D(A)$且$u_1 \neq u_2$, 若$(\lambda I - A)u_1 = (\lambda I - A)u_2$, 即

$$-\frac{d^2}{dt^2}(u_1 - u_2) = \lambda(u_1 - u_2).$$

由常微分方程理论知

$$u_1 - u_2 = C_1 e^{\gamma_0 t} + C_2 e^{-\gamma_0 t},$$

其中$C_1, C_2 \in \mathbb{C}$, $\gamma_0 = i\sqrt{|\lambda|}e^{i\frac{\arg\lambda}{2}}$.

由于对任意$n \in \mathbb{N}$, $\lambda \neq (2n\pi)^2$, 故$e^{\pm\gamma_0} \neq 1$. 又由

$$u_i(0) = u_i(1),\ u_i'(0) = u_i'(1),\ i \in \{1,2\},$$

可得

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = C_1 e^{\gamma_0} + C_2 e^{-\gamma_0}, \\ C_1\gamma_0 - C_2\gamma_0 = C_1\gamma_0 e^{\gamma_0} - C_2\gamma_0 e^{-\gamma_0}, \end{cases}$$

因此$C_1 = C_2 = 0$, 从而$u_1 = u_2$, 矛盾! 故$(\lambda I - A)u_1 \neq (\lambda I - A)u_2$. 因此$\lambda I - A$为单射, 从而$(\lambda I - A)^{-1}$存在.

下面还需证明

$$R(\lambda I - A) = L^2[0,1],$$

即对任意的$v \in L^2[0,1]$, 存在$u \in D(A)$使得$v = (\lambda I - A)u$.

注意到$v \in L^2[0,1]$等价于

$$v(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{2\pi i n t}$$

在$L^2[0,1]$意义下成立, 且$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$, 其中$c_n := \int_0^1 v(t)e^{-2\pi i n t}\,dt$. 令

$$u(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{2\pi i n t},$$

其中$d_n := \frac{c_n}{\lambda - (2n\pi)^2}$, 则由$\{d_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell^2$知$u \in L^2[0,1]$. 对任意$N \in \mathbb{N}$, 令

$$v_N := \sum_{|n|\leqslant N} c_n e^{2\pi i n t},\quad u_N := \sum_{|n|\leqslant N} d_n e^{2\pi i n t},$$