普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

徐爱华 等 编

XIANXING DAISHU

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主　编　徐爱华　李　亮　贾敬堂
副主编　郑克敏　王海龙　韩田君
　　　　陈　宇　郑　丽
编　委　温志强　张岳鹏　王艳艳

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书共包括六章，分别为行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型和用 Mathematica 软件解线性代数问题. 每章都配备有相应的习题，书后提供了各章习题的参考答案及提示.

本书可以作为高等院校公共基础课“线性代数”课程的教材，也可以作为工程技术人员学习线性代数知识的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/ 徐爱华主编. --上海 ：同济大学出版社，2015.1

ISBN 978-7-5608-5743-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①徐… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 005975 号

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

主编 徐爱华 李 亮 贾敬堂 **副主编** 郑克敏 王海龙 韩田君 陈 宇 郑 丽

编委 温志强 张岳鹏 王艳艳

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 李志伟

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(上海市四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021－65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 三河市海新印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 11

字 数 220000

版 次 2015 年 1 月第 1 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5743-5

定 价 24.80 元

前 言

本书是根据教育部制定的“数学教学基本要求”，由多年从事高等院校线性代数教学工作的教师执笔编写而成，在教材体系、内容和例题的选择方面吸取了国内外优秀教材的优点，也汇集了自己的教学经验.本书注重概念的直观性和方法的启发性，突出了“以应用为目的”的思想，内容通俗易懂，深入浅出，注重应用，体现了应用技术型的教育理念.

全书系统讲解了线性代数的基础知识和基本方法，体例适当，行文严谨，用语准确，解析详细.在引入概念时，尽可能从实际问题出发，以使学生易于接受.教材的主要内容包括：行列式、矩阵、向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型以及用 Mathematica 软件解线性代数问题.除了传统的线性代数课程内容，本书结合了数学软件的应用，讲解了数学软件 Mathematica 在线性代数问题中的应用实例，让学生在掌握线性代数知识的基础上，能够应用数学软件解决问题.本书每章都配备了适量的例题，并在章末给出了相应的习题，书末提供了各章习题的参考答案.

本书理论系统，举例丰富，讲解透彻，难度适宜，适合作为高等院校经济管理类及理工类学生的公共基础课“线性代数”课程的教材，也可以作为工程技术人员学习线性代数知识的参考书.

参加本书编写的有：徐爱华，李亮，贾敬堂，郑克敏，王海龙，韩田君，陈宇，郑丽，温志强，张岳鹏，王艳艳等.由于作者水平有限，本书难免有不足、遗漏和错误之处，衷心希望广大读者不吝指正，以使本书在教学实践之中不断完善.

编 者

2014 年 12 月

目　录

Contents
目录

Contents

目录

第一章

行列式

本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质及计算方法，并介绍利用行列式求解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

1.1 二阶与三阶行列式

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

是利用对角线法则来定义的. 其中 $a_{ij}\ (i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式的元素，它的第一个下标 i 表示它位于第 i 行，称为行标，第二个下标 j 表示它位于第 j 列，称为列标. 二阶行列式就是主对角线上的元素 a_{11} 与 a_{22} 的乘积减去副对角线上的元素 a_{12} 与 a_{21} 的乘积，这就是对角线法则.

【例 1】 计算二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

解 $D = 7\times 3 - (-2)\times 4 = 21 + 8 = 29.$

同样可以用对角线法则来定义三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

三阶行列式是三条主对角线方向的各元素乘积之和减去三条副对角线方向的各元素乘积之和，如图 1-1 所示.

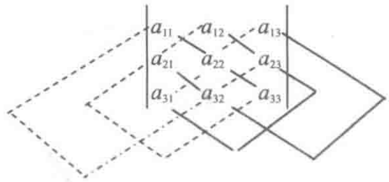

图 1-1

【例 2】 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，得

$$\begin{aligned} D &= 1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4- \\ &\quad 1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24=-14. \end{aligned}$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，对于更高阶数的行列式，就不能够用对角线法则去求了，而需要找到行列式的内在规律，进而去讨论 n 阶行列式.

1.2 n 阶行列式

1.2.1 排列的逆序数及对换

定义 1 由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列(也叫做这 n 个元素的一个全排列).

例如，31245 就是一个 5 级排列.

【例 1】 写出所有的 3 级排列.

解 123 132 213 231 312 321

可见,第一个位置有 3 种选择,第二个位置有 2 种选择,第三个位置有 1 种选择,所以所有的 3 级排列一共有 $3\times2\times1=3!=6$ 个.并且由此不难推出,n 级排列一共有 $n!$ 个.在 n 级排列中,$123\cdots n$ 这个排列具有自然顺序,称为一个自然排列或标准排列.

定义 2　在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小次序相反,即前面的数比后面的数大,就称它们构成一个逆序.一个排列中所有逆序的总数就称为这个排列的逆序数.

例如,排列 2431 中,21,41,31,43 均为逆序,则排列的逆序数为 4.

定义 3　逆序数是奇数的排列称为奇排列;逆序数是偶数的排列称为偶排列.

例如,2431 是偶排列;31425 中有 3 个逆序,是奇排列.

逆序数的求法为:在一个 n 级排列中,依次考虑每个数后面比它小的数有几个,如第 i 个元素后比它小的数有 t_i 个,则此排列的逆序数为

$$t=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=\sum_{i=1}^{n-1}t_i.$$

【例 2】　求排列 31425 的逆序数.

解　3 之后比 3 小的有 2 个,1 之后比 1 小的有 0 个,4 之后比 4 小的有 1 个,2 之后比 2 小的有 0 个,于是逆序数为

$$t=2+0+1+0=3.$$

定义 4　把一个排列中的某两个元素位置对调,而其他的元素不动,就得到了另一个排列,这种变换就称为一个对换.

例如,排列 31425 中的 1 与 5 对换,就得到新排列 35421.

定理 1　任何一个排列经过一次对换,排列改变奇偶性.

即奇排列经过一次对换变成偶排列,偶排列经过一次对换变成奇排列.

例如,2431(逆序数为 4,偶排列)→ 2341(逆序数为 3,奇排列).

定理 2　全部 n 级排列中,偶排列与奇排列各占一半,都是 $\frac{n!}{2}$($n\geqslant 2$)个.

定理 3　任何一个 n 级排列都可以经过 k 次对换变成一个标准排列，且 k 的奇偶性与原排列相同.（k 不唯一，但奇偶性不变.）

例如，2431（逆序数为 4，偶排列）→1432→1234（$k=2$）.

1.2.2　n 阶行列式的定义

在定义 n 阶行列式之前，我们先研究一下二阶、三阶行列式的定义.

二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

是所有不同行不同列的元素的乘积的代数和，每两个元素的乘积都可以表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}$，行标为标准排列，列标排列 p_1p_2 取遍 2 级排列时，得到所有的项，一共有 $2!=2$ 项.

再看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

同样也是所有不同行不同列的元素的乘积的代数和，每 3 个元素的乘积都可以表示为 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，行标为标准排列，列标排列 $p_1p_2p_3$ 取遍 3 级排列时，得到所有的项，一共有 $3!=6$ 项.

下面来考虑二、三阶行列式展开式中的各项的正负问题. 在二阶行列式中，列标排列为 12 时，该项取正；为 21 时，该项取负，在三阶行列式中，列标排列为 123，231，312 时，该项取正；为 321，213，132 时，该项取负. 而排列 12，123，231，312 都是偶排列，排列 21，321，213，132 都是奇排列. 于是可知，当行标是标准排列时，如果列标排列是偶排列，该项取正，列标排列是奇排列，该项取负.

如果用 t 表示每一项的列标排列的逆序数，则各项所带符号可以表

示为$(-1)^t$. 所以二阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2}.$$

这里 t 为排列 p_1p_2 的逆序数,和号表示对所有的 2 级排列 p_1p_2 求和.

三阶行列式可以写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}.$$

这里 t 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数,和号表示对所有的 3 级排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

由此,我们把二阶、三阶行列式的概念推广到 n 阶行列式情形.

定义 5　n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的代数和,其中 $p_1p_2\cdots p_n$ 是一个 n 级排列. 当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时该项乘积带正号,是奇排列时该项乘积带负号. 即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(p_1p_2\cdots p_n)} (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

其中 t 表示 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数, $\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

这是 n 阶行列式的表达式,也叫做完全展开式. 由于 n 级排列有 $n!$ 个,所以 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项.

n 阶行列式有时也记为 $D=\det(a_{ij})$, a_{ij} 为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素.

按此定义的二阶、三阶行列式显然与按对角线法则定义是一致的. 另

外需要注意的是，当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，与绝对值符号不要混淆.

例如，一阶行列式 $|-3|=-3$；绝对值 $|-3|=3$.

1.2.3 计算几个特殊的行列式

【例 3】 计算对角行列式(对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素都是零).

$$(1)D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix};\quad (2)D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}.$$

解 $(1)D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，此时显然成立；

$$(2)D=\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

证明时可设 $\lambda_i=a_{i,n-i+1}$，于是

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1\\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} & & & a_{1n}\\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^t a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^t\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

其中，t 是排列 $n(n-1)(n-2)\cdots321$ 的逆序数，所以

$$t=0+1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}.$$

【例 4】 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 具体可以依定义如下讨论:对于形如 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$ 的项中,先找出可能不为零的项,再确定其符号. 在第 n 行中,只有 a_{nn} 可能不为零,于是想要乘积不为零,只能 $p_n=n$;在第 $n-1$ 行中,只有 $a_{n-1,n-1}$,$a_{n-1,n}$ 可能不为零,于是想要乘积不为零,只能 $p_{n-1}=n$ 或 $p_{n-1}=n-1$,但是由于 $p_n=n$,所以只能 $p_{n-1}=n-1$;依次类推下去,展开式中只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项可能不为零,而其列标排列是偶排列,故而带正号. 于是,上三角行列式就等于主对角线上元素的乘积.

类似地可以证明下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.2.4 n 阶行列式的另一种定义

定理 4 n 阶行列式也可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn},$$

其中 t 为行标排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数,$\sum\limits_{(p_1p_2\cdots p_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

证明 按行列式定义，n 阶行列式可写为

$$D_1=\sum_{(p_1p_2\cdots p_n)}(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

我们必须证明 D_1 中每一项恰好对应 D 中某一项.

事实上，D_1 与 D 中分别都有 $n!$ 项，项数相同. 下面说明 D_1 中每一项恰好对应 D 中某一项. 对 D_1 中一项 $(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，交换顺序使其列标化为标准顺序，同时，行标化为了排列 $q_1q_2\cdots q_n$，根据对换的理论可知排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 与排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 有相同的奇偶性. 若用 s 表示排列 $q_1q_2\cdots q_n$ 的逆序数，则有

$$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=(-1)^s a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}.$$

于是，D_1 中每一项恰好对应 D 中某一项，定理得证.

1.3 行列式的性质

由定义可见，利用行列式的定义来计算行列式是非常复杂的，所以我们要讨论行列式的性质.

定义 把一个行列式的所有行变成对应的列后所得到的行列式称为原行列式的转置行列式，记为 D^{T} 或 D'，即

$$\text{若 } D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \text{则 } D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D 与 D^{T} 互为转置行列式.

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.

证明 记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式为

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$. 且

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{t}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{t}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n},$$

这是行列式 D 的另一种定义形式. 故 $D^{\mathrm{T}}=D$.

由此性质可知,行列式中的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立,反之亦然.

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

证明　设行列式 D 互换第 i 行与第 j 行后变为 D_1,则

$$D=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中,t 是排列 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 的逆序数,而

$$D_1=\sum(-1)^{s}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

其中,s 是排列 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数.

由于 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 是由 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$ 经过一次对换而得的,所以 t 与 s 的奇偶性相反,因此$(-1)^t=-(-1)^s$,于是

$$\begin{aligned}D&=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\\&=-\sum(-1)^{s}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\\&=-\sum(-1)^{s}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=-D_1.\end{aligned}$$

推论　若行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式的值为零.

证明　将此行列式 D 中相同的两行互换,其形式不变,但由性质 2,它应变号,于是有 $D=-D$,故 $D=0$.

性质 3　行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号外.

证明　设第 i 行有公因子 k,则第 i 行上元素可以写成 ka_{ip_i},从而

$$D=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}=k\sum(-1)^{t}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

推论　行列式中如果有两行(列)对应成比例,则此行列式为零.

性质 4　若行列式中某行(列)各元素都是两数之和,如第 i 行的元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下面两个行列式之和

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 容易看出

$$\begin{aligned} D &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots(a_{ip_i}+b_{ip_i})\cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum (-1)^t a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}. \end{aligned}$$

性质 5 把行列式某行(列)各元素乘以一个常数 k 加到另一行(列)对应元素上去,行列式值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在计算行列式时,可以利用行列式的性质简化行列式(常常是化为上三角或者下三角行列式),再计算结果.简化过程是利用性质对行列式的行与列进行变换,根据需要,引入下面记号:

(1)$r_i \leftrightarrow r_j$($c_i \leftrightarrow c_j$):交换第 i 行(列)与第 j 行(列);

(2)$r_i \div k(c_i \div k)$:第 i 行(列)提出公因子 k;

(3)$r_i + kr_j(c_i + kc_j)$:把第 j 行(列)的各元素乘以 k 加到第 i 行(列)对应元素上.

【例 1】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-2r_1]{r_3+r_1} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{r_3+r_2} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-r_3} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=-1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4.$$

【例 2】 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 6} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$