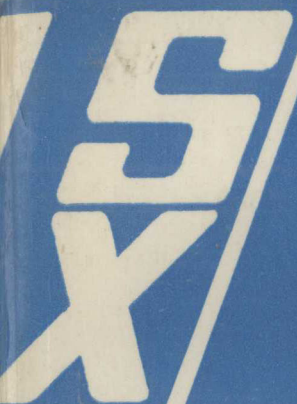


新编《中学各科解难》丛书



初中数学 解难手册

根据国家教委最新教学大纲编写

丛书主编 张盛如

分册主编 方金秋 高敬东

中国 社会 出版 社



根据国家教委最新教学大纲

新编《中学各科解难》丛书

初中数学解难手册

丛书主编 张盛如

丛书副主编 张光勤

分册主编 方金秋 高敬东

编 著 *高敬东 庄剑芳

*张长胜 许俊岐

张占龙

(参加新编撰稿者名字前加·号)

中国社会科学出版社

(京)新登字 022 号

新编《中学各科解难》丛书

初中数学解难手册

丛书主编 张盛如

分册主编 方金秋 高敬东

中国社会出版社出版发行

北京西城区西黄城根南街 9 号 邮政编码 100032

北京仰山印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本:787×1092 毫米 1/32 印张:18.25 字数:404 千字

1992 年 8 月第一版 1993 年 5 月第二次印刷

印数:21.501—31.500 册 定价:8.10 元

ISBN 7-80088-273-X/G·94

编委会名单

丛书主编 张盛如

丛书副主编 张光勤

编委

时雁行	祁乃成	温才鉴	康锦屏
方金秋	张盛如	孟广恒	郭正权
黄儒兰	张光勤	张永昌	张景林
陶麟	高敬东	冯琦琳	张风清
林镜仁	唐兆钰	陆研	

新 编 小 序

新编《中学各科解难》丛书，是《中学各科解难》丛书的修订本。

《中学各科解难》丛书（13种）自1990年10月面市以来，深受广大中学师生欢迎，因此出版不到半年，就再版重印。即便如此，书店仍然脱销，不少读者纷纷致函编者或出版社要求代购此书。

为什么这套丛书能在较短的时间内就得到读者的一致认可呢？读者普遍指出：因为这套丛书的编写思路非常适合学生学习实际，既能帮助他们加深对课堂知识的重点、难点的理解，又能帮助他们拓开视野和思路，学到一些相应的课外知识，更重要的是还能向他们提示一些卓有成效的学习方法，使他们能较快地掌握各科学学习规律，迅速将知识转化为能力。所以他们在来信中说：“这是一套可心的书”、“解渴的书”，有的甚至称它为“是无师自通的书”。当然，在来信中，读者也诚恳地指出了丛书在排印和撰写中的某些缺欠，尽管如此，他们仍热切地希望编者和出版社今后能编写和出版更多、更好的这类学习丛书。

作为丛书的编者，他们所编的丛书能得到广大读者的如此赞许，无疑感到鼓舞和欣慰，同时，也更加感到自己责任的重大。为使丛书能更好地体现《中学各科教学大纲》所规定的知识能力要求，更好地为广大中学师生服务，在中国社会出版社领导的大力支持下，根据国家教委新颁《中学各科教学大纲》和读者反馈的意见，我们对这套解难丛书作了较大

的修订（除个别学科外）。在这次修订中，我们作了如下努力：第一，努力体现新颁大纲对各科知识、能力的要求，特别要在培养能力上下功夫；第二，增强丛书的解难性能，对于难点力求能举一反三；第三，选例要注意精要、典型并注意题型的更新；第四，文字表述上要求比原版更为准确、流畅。此外，还补编了高初中《政治解难手册》。我们深信，通过这次修订，《中学各科解难》丛书将会以一个更新的面貌出现在读者面前，因此特在《解难丛书》书题之前，冠以“新编”二字。但愿新编《中学各科解难》丛书能成为广大读者新交的老朋友。

欢迎读者继续为这新开的花朵浇水、除草。

丛书主编 张盛如

1992年2月于北京阳照寓所

目 录

第一章	实数	1
第二章	非负数	36
第三章	代数式	52
第四章	方程和方程组	106
第五章	应用题	164
第六章	一元二次方程的根的判别式、根与系数的关系	203
第七章	函数的基本概念	232
第八章	二次函数	262
第九章	不等式与不等式组	300
第十章	指数	319
第十一章	平面几何基本概念	333
第十二章	直线形	342
第十三章	解直角三角形	389
第十四章	圆	406
第十五章	圆内计算	461
附录 I	怎样学平面几何	492
附录 II	解斜三角形	515
	习题解答	557

第一章 实数

在初中代数中，对数的使用范围，是在小学学过正数的基础上引进负数，把数的概念扩充到有理数，又进一步引入无理数，从而把数的概念扩充到实数。因此初中数学所研究的内容都是在实数范围内进行的，故对于实数中的一些重要概念、运算法则和性质必须有透彻的理解和牢固的掌握。

一、内 容 提 要

本章主要内容包括实数的分类、数轴、相反数、绝对值、倒数等概念，实数比较大小法则、有理数及实数的运算法则、运算律。

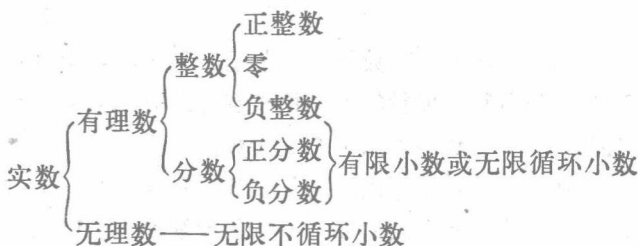
绝对值是本章的重点，也是难点，它对学习实数的性质、运算起着关键性的作用，而且对于今后学习与掌握含有绝对值符号的代数式、不等式和方程都是极为重要的，它在中学数学课程中是贯穿始终的重要概念，因此必须予以足够的重视。抓住定义，由浅入深地把有关代数式、根式、不等式等知识沟通起来，并注意一定的解题技巧，培养分析问题的能力。

学习实数不仅要求理解和掌握数的定义、分类及各种与数有关的基本概念，而且要熟练地掌握数的运算定律与性质，正确合理地进行各种数系的运算，提高自己的计算能力。

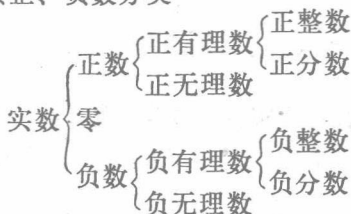
(一) 基 本 概 念

1. 实数的分类

(1) 按有理数、无理数分类



(2) 按正、负数分类



2. 数轴

(1) 定义：规定了原点、正方向和长度单位的直线，叫做数轴。

(2) 数轴上的所有点与全体实数具有一一对应的关系，即每一个实数都可以用数轴上的唯一的点来表示；反过来，数轴上的每一个点都表示唯一的一个实数。

3. 相反数

(1) 定义：只有符号不同的两个实数互为相反数，规定零的相反数为零（即实数 a 和 $-a$ 互为相反数）。

几何意义：在数轴上原点的两旁，到原点距离相等的两个点所表示的两个数是互为相反的数，零的相反数为零。

4. 绝对值

(1) 定义：一个正实数的绝对值是它本身，一个负实数的绝对值是它的相反数，零的绝对值是零。

用数学式子表示为：

$$|a| = \begin{cases} a & (a > 0) \\ 0 & (a = 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

a —— 是任意实数

几何意义：在数轴上表示这个数的对应点离开原点的距离。

如果实数 a 在数轴上的对应点为 A ，则 $|a| = |OA|$

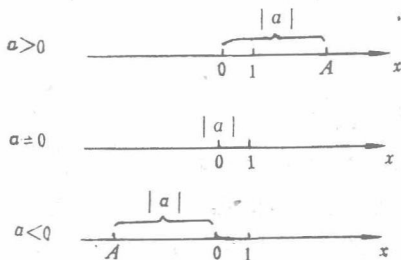


图 1-1

(2) 性质①任何一个实数 a 的绝对值是一个非负数（正实数或零）即 $|a| \geq 0$ ；

② 任何一个实数都有唯一的绝对值；

③ 互为相反数的两个数，其绝对值恒等，即 $|a| = |-a|$ ；

④ 已知一个数的绝对值求原数，一般原数有两个，它们是互为相反数，当一个数的绝对值为零时，原数只有一个，

则为零。

⑤ 如果两个数的绝对值相等,则这两个数不一定相等。

例如 $|-5| = |5|$, 但 $-5 \neq 5$ 。

⑥ 任何一个实数都小于等于它的绝对值。即 $a \leq |a|$,

例如 $3 = |-3|$, $-3 < |-3|$ 。

5. 倒数

定义: 1 除以一个数的商, 叫做这个数的倒数, 零没有倒数。

互为倒数的定义还可这样理解:

若 a 、 b 为两个不为零的实数, $ab = 1$ (或 $a = \frac{1}{b}$) 则

a 和 b 互为倒数; 反之, 若 a 和 b 互为倒数, 则 $ab = 1$ (即 $a = \frac{1}{b}$)。

6. 实数的大小比较

实数的大小比较, 可结合数轴来阐明比较法则, 在数轴上表示两个数的点, 靠右边的点所表示的数较大。

法则: (1) 正数都大于零, 负数都小于零, 正数大于一切负数;

(2) 两个正数, 绝对值较大的正数大;

(3) 两个负数, 绝对值较大的反而小。

在比较实数大小时, 有时也用求差的方法 (比差法) 和求商的方法 (比商法):

比差法: 若 $a - b > 0$, 则 $a > b$; 若 $a - b < 0$, 则 $a < b$; 若 $a - b = 0$, 则 $a = b$ 。

用比差法比较两实数大小时的一般步骤: ①作差; ②变形: 通常用配方法或分解因式; ③判断其 > 0 、 $= 0$ 、 < 0 。

比商法：在 $a > 0$ 、 $b > 0$ 时，若 $\frac{a}{b} > 1$ ，则 $a > b$ ；

若 $\frac{a}{b} < 1$ ，则 $a < b$ ；若 $\frac{a}{b} = 1$ ，则 $a = b$ 。

(二) 基 本 运 算

实数的运算主要是有理数的运算、无理数运算，因此重点放在这两部分内容上。

1. 有理数的运算：在有理数范围内，加、减、乘、除（零不能做除数）运算全能实施。

有理数的四则运算法则关键在于搞清符号法则以及利用绝对值意义，把运算转化为算术中数的运算，也要注意“+”与“-”这两个符号的双重意义，即它们既是运算符号，又是性质符号。

2. 实数的运算：有理数集合的一切运算性质，在实数集合内都适用，非负数的开方运算总能在实数集合内实施，但是负实数的开偶次方运算在实数集合内不能实施。

无理数的运算，通常是取它的近似值，进行近似计算，因此无理数运算实际上是通过有理数的运算来进行的。

3. 运算定律：

加法交换律： $a + b = b + a$

加法结合律： $(a + b) + c = a + (b + c)$

乘法交换律： $ab = ba$

乘法结合律： $(ab)c = a(bc)$

乘法对加法的分配律： $a(b + c) = ab + ac$

4. 运算顺序：

(1) 在加、减、乘、除、乘方和开方六种运算中，

加、减为第一级运算，乘、除为第二级运算，乘方、开方为第三级运算；

(2) 先计算“三级”，再算“二级”，最后算“一级”，如有括号，先计算括号内的；

(3) 若只有同一级的运算，则从左到右依次运算。

注意：在进行计算时，要善于简便运算过程，养成能充分运用运算法则、定律与运算顺序使运算合理简捷的习惯。

二、例 题 分 析

例 1 把下列各数填在相应的集合里：

$3.14, -\pi, 0.12, 1-\sqrt{2}, \sin 60^\circ, -2^4, 4^{-2},$
 $(-\sqrt{5})^\circ, \cos 90^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, -\sqrt[3]{-8}, |-6|,$
 $3.2 \times 10^{21}, 5.0 \times 10^{-13}, 0.\dot{3}.$

【解】

负实数集合：

$\{-\pi, 1-\sqrt{2}, -2^4, \dots\};$

整数集合：

$\{-2^4, (-\sqrt{5})^\circ, \cos 90^\circ, \operatorname{tg} 45^\circ, -\sqrt[3]{-8},$
 $|-6|, 3.2 \times 10^{21}, \dots\};$

有理数集合：

$\{3.14, 0.12, -2^4, 4^{-2}, (-\sqrt{5})^\circ, \cos 90^\circ,$
 $\operatorname{tg} 45^\circ, -\sqrt[3]{-8}, |-6|, 3.2 \times 10^{21}, 5.0 \times 10^{-13},$
 $0.\dot{3}, \dots\};$

无理数集合：

$\{-\pi, 1-\sqrt{2}, \sin 60^\circ, \dots\}.$

注意：(1) 能计算或化简的，要先经过计算化简求出

结果, 再进行判断。如 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\sqrt[3]{-8} = -(-2)$
 $= 2$, $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$, $(-\sqrt{5})^\circ = 1$, $-2^4 = -16$, $\cos 90^\circ = 0$,
 $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$, $|-6| = 6$, $3.2 \times 10^{21} = 320000000000000000000$,
 $5.0 \times 10^{-13} = 0.00000000000005$ 。

(2) 弄清各数的条件, 要抓住实质, 不要只看表面形式。如负实数包括负有理数和负无理数, 不可漏掉负无理数, 特别不可漏掉 $1 - \sqrt{2}$; 整数包括负整数、正整数和零, 不可漏掉零, 本例中不要丢掉 $\cos 90^\circ = 0$; 有理数的实质是能表示成分数的数, 注意: 整数可以写成分母为 1 的分数, 有限小数都可化成分数, 特别注意无限循环小数也可以化成分数, $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$; 无理数的实质是无限不循环小数, 而不要误认为无理数就是带根号; 如 $-\pi$ 就是不带根号的无理数, 因为 π 是圆周率, 是一个非常重要的无限不循环小数; 更不能形式主义地认为带根号的都是无理数, 如本题中 $(-\sqrt{5})^\circ = 1$, $-\sqrt[3]{-8} = 2$ 都不是无理数。

(3) 弄清各类数之间的关系, 可以使我们更迅速准确地回答问题。如认识到整数集合是有理数集合的一部分, 就可以直接把整数都写入有理数集合中。

例 2 判断题 (正确的画“√”, 错误的画“×”)

(1) 在实数范围内, 如果一个数不是正数, 则一定是负数。 (×)

说明: 因为实数包括正数、负数和零。

(2) 无限小数都是无理数。 (×)

说明: 无限小数包括无限循环小数和无限不循环小数,

无限循环小数是有理数，所以无限小数不一定是无理数。

(3) 无理数都是无限小数。 (✓)

说明：无限不循环小数称为无理数，所以无理数一定是无限小数。

(4) $-a$ 一定是负数。 (×)

说明：当 a 为负数时， $-a$ 即负数 a 的相反数为正数。

(5) 最小的正整数是零。 (×)

(6) 零既不是正数，也不是非负数。 (×)

说明：非负数即包括正数和零。

(7) 不存在最小的正数，也不存在最大的正数。 (✓)

(8) 无理数就是开方开不尽的数。 (×)

说明：开方开不尽的数一定是无理数，但无理数不一定由开方开不尽得到，可以是其他无限不循环小数。

例 3 判断题：（正确的画“✓”，错误的画“×”）

(1) $\frac{2}{5}$ 的相反数是 $\frac{5}{2}$ 。 (×)

(2) -0.001 的相反数是 $\frac{1}{1000}$ 。 (✓)

(3) $-\frac{1}{7}$ 的相反数是 7。 (×)

说明：(1)~(3)题，要根据相反数的定义去判断，不要与倒数概念相混淆。

(4) 如果两个数互为相反数，那么表示这两个数的点离开原点的距离相等。 (✓)

例 4 判断题：

(1) 如果 $|m| > |n|$ ，那么 $m > n$ 。 (×)

说明：用一反例说明其结论是不正确的，即可说明此

命题是不成立的。例 $m = -5$, $n = -3$, $|-5| > |-3|$, 但 $-5 < -3$ 。

(2) 已知两数的绝对值相等, 那么这两个数也相等。

(×)

说明: 例 $|-3| = |3|$ 。但 $-3 \neq 3$ 。

(3) $|-a| > 0$, 则 $a > 0$ 或 $a < 0$ 。

(√)

(4) $\frac{3x}{|x|-4}$ 有意义, 则 $\frac{2x}{-x-4}$ 也有意义。

(√)

说明: 当 $\frac{3x}{|x|-4}$ 有意义时, 则 $|x|-4 \neq 0$ $x \neq \pm 4$, 而

当 $x \neq \pm 4$ 时, 则 $\frac{2x}{-x-4}$ 有意义。

(5) 如果 x, y 是两个负数, 并且 $x < y$, 则 $|x| < |y|$ 。

(×)

说明: 反例 $-5 < -2$, 但 $|-5| > |-2|$

(6) 一个整数的倒数都小于这个整数。

(×)

说明: 反例 -2 的倒数为 $-\frac{1}{2}$, 而 $-\frac{1}{2} > -2$ 。

(7) 任何正数大于它的倒数。

(×)

说明: 反例 $\frac{1}{3}$ 的倒数是 3 ; 但 $\frac{1}{3} < 3$ 。

(8) 任意实数 a 的倒数都可以用 $\frac{1}{a}$ 表示。

(×)

说明: 零没有倒数。

例 5 填空题:

(1) 在数轴上与原点的距离等于 5 个长度单位的点所表示的数是 ± 5 ;

(2) 在数轴上一个点与原点的距离是 5, 这个点所表示的数是 -5 或 $+5$;

注意：这两个题的问法是不同的，题（2）中强调的是“一个点”，所以它表示的数也只能是 -5 或 $+5$ 中的一个。

（3） $-x$ 的相反数是 x ， $\frac{1}{x}$ 的相反数是 $-\frac{1}{x}$ ；

（4） $n-2$ 的相反数是 $2-n$ ， $n+2$ 的相反数是 $-n-2$ ；

（5）两个数互为相反数，它们的和为零，它们的绝对值相等；

（6） a 的相反数的相反数是 a ；

（7） $\sqrt{2}-1$ 的相反数是 $1-\sqrt{2}$ ，倒数是 $\sqrt{2}+1$ ；

（8）任何实数的相反数都是负数，对吗？不对，任何实数 a 的倒数都是 $\frac{1}{a}$ ，对吗？不对。各举一例，说明你的回答是正确的： -5 和 0 。

说明： 0 的倒数是不存在的。

例6 填空题：

（1）如果 $|x| < 3$ ，当 x 为整数时有 $0, \pm 1, \pm 2$ 。

说明：本题即求到原点距离小于 3 的整数点有哪几个。

（2）绝对值小于 5.2 的所有整数是 $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ 。

说明：

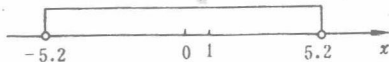


图 1-2

x 取整数即为所求。

（3）绝对值大于等于 2 小于 5.3 的所有负整数是 -2 ，