高等代数中的典型问题与方法（第二版）

李志慧　李永明　编

◎ 方便自学（配套习题详细解答）

◎ 考研备考（高校考研真题讲解）

◎ 教师备课（知识要点归纳评析）

科学出版社

高等代数中的典型问题与方法
（第二版）

李志慧　李永明　编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是为正在学习高等代数的读者、正在复习高等代数准备报考研究生的读者，以及从事这方面教学工作的年轻教师编写的.

本书与北京大学数学系几何与代数教研组编写的《高等代数（第三版）》相配套，在编写上也遵循此教材的顺序. 全面、系统地总结和归纳了高等代数中问题的基本类型、每种类型的基本方法，对每种方法先概括要点，再选取典型而有一定难度的例题，逐层剖析. 对一些较难理解的问题，在适当的章节做了专题研究，进行了较深入的探讨和总结，如：线性变换的对角化、矩阵分解等问题，以消除读者长期以来对其抽象问题在理解上含糊不清的疑虑，从而更深入地领会问题.

本书大量采用全国部分高校历届硕士研究生高等代数入学试题，并参阅了 50 余种教材、文献及参考书，经过反复推敲、修改和筛选，在长期教学实践的基础上编写而成. 全书共分 9 章，45 节，126 个条目，约 320 个典型问题，涉及多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、λ-矩阵、欧氏空间.

图书在版编目 (CIP) 数据

高等代数中的典型问题与方法/李志慧，李永明编. —2 版. —北京：科学出版社，2016.5

ISBN 978-7-03-048101-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①李… ②李… Ⅲ. 高等代数—研究 Ⅳ. ①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 085890 号

责任编辑：王胡权 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：白 洋 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

大厂书文印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 9 月第 一 版 开本：720×1 000 1/16

2016 年 5 月第 二 版 印张：24 1/2

2016 年 5 月第八次印刷 字数：492 000

定价：45.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

第二版前言

本书自 2008 年 9 月出版以来，得到各地读者的广泛肯定，一些读者向我们提出了宝贵的意见，在此深表感谢. 这次再版，对第 1 章的内容做了较大的调整；增加了 1.4 节和 5.6 节，以及若干典型例子，并增加了一些知识点及例子的评析.

本书具有以下特色.

(1) 内容清晰. 结构上逐条有序地安排知识点，然后加以准确描述，并运用典型例子加以分析.

(2) 论证严谨. 在例子的求解及证明方面推理严谨.

(3) 评析新颖. 对知识点、例子等进行评析，以剔除疑惑，或在理解层次方面给予拔高；评析的语言易于理解，站在读者思维的角度论述.

(4) 覆盖面广. 知识点的涉及面广，共探讨高等代数中约 320 个典型问题.

(5) 习题丰富. 精心配套的习题量大，且各有代表性. 通过演练可以熟练掌握高等代数的基本方法与技巧.

一些读者还问及如何更好地理解本书的书名，下面谈谈我们的理解和编写本书的初衷. 全书共分 9 章，45 节，126 个条目，约 320 个知识要点(简称要点)，实质上，这些要点就是本书中的典型问题. 而“方法”一词指的是以性质、定理等作为原理提炼出来的解决问题的办法，如本书中式(4.15)即是一个原理，由此演变出求矩阵逆的方法，即将这个矩阵与单位阵并列写到一起，然后对该阵施行能将其变为单位阵的一系列初等变换，而对单位阵同时也施行这样的变换，这时单位阵就化为该阵的逆矩阵. 因此，这种方法是有原理可循的. 实质上，在高等代数中，依据原理产生的求解问题的方法很多，例如，求解一般线性方程组的高斯消元法；计算行列式的方法；求线性变换的特征值与特征向量的方法；二次型化标准形的合同变换方法、配方法及正交变换法等，读者在学习时要仔细体会这些方法的由来. 当然，如果从课程特色的角度谈及高等代数研究问题的基本方法，则属于另一个层面上的问题，它表现在：严格的逻辑推理方法；公理化方法；矩阵方法；结构化方法(如线性空间及子空间)；等价分类方法等. 这些方法较前面提到的方法更抽象，可以说代表了这门课程的思想方法. 有些方法是数学系本科生第一次接触到的，需要通过读书和多做练习加以理解，以便在今后的研究中能熟练应用. 高等代数中这两种不同层面的方法都是需要理解和掌握的.

我们衷心感谢广大教师和读者对本书的关心，书中的疏漏或不当之处恳请不吝赐教(电子信箱：snnulzh@aliyun.com).

编　者

2015 年 9 月 3 日于陕西师范大学

第一版前言

“高等代数”课是本科数学专业的一门重要的基础课，也是理工科大学各专业的重要数学工具. 它对数学专业的许多后继课程有直接影响，关系到学生数学素质的培养. 这门课程的特点是概念多，内容比较抽象. 在长期的教学实践中，我们深刻体会到，学生学习和掌握教材的基本知识困难并不大，但要灵活运用基本概念和基础理论去分析问题和解决问题就感到困难，甚至不知如何着手. 为培养学生分析问题和解决问题的能力，目前已出版了大量相关书籍，但仍不能满足学生的要求. 分析其原因，有些书主要是解题，不去分析题中要考察的知识点，学生在学习过程中不能及时领悟和总结，从而学习后印象不深刻；有些书虽总结了知识点并附有配套的例题，但由于知识点或列举不够详细，或缺乏配套例题，学生读后仍感到不系统. 在学生掌握了教材的基本知识后，若能有一本帮助他们巩固、加深、提高、扩大所学知识的书，对高等代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类指导，告诉读者应该如何分析和解决问题，这对培养读者的思维能力与独立解决问题的能力，从根本上强化已学知识，将是十分必要的.

考虑到这些需要，我们将全国各高校历届硕士研究生高等代数入学试题进行了一次全面的整理，逐题分析研究，比较分类. 同时参阅了国内 50 余种教材、文献和参考书，将这些教材中的知识点和方法进行了总结和归类. 然后，将整理好的知识点和归类后的试题进行一一匹配，有的试题我们附在了相应的练习题中，用于读者自检.

全书共分 9 章，42 节，111 个小条目，中心问题是向读者回答：**高等代数的每个单元到底有哪些基本问题？每类问题各有哪些方法？每种方法又有哪些富有代表性、典型性、又有相当难度，值得向读者推荐的好例题和练习？**

基于编写本书的上述宗旨，我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解. 全书每段先对所解问题以“要点”的形式进行概括性的阐述，然后由浅入深地安排一套一套的例题，对具体的方法和精神实质，加以“评析”，以拔高而达到更深层次的理解.

本书是笔者在陕西师范大学数学与信息科学学院为高年级学生讲授“高等代数选讲”所写讲义的基础上编写的. 原讲义讲授了 6 届，听取了各方老师的意见，每届学生都积极纠正了讲义中的若干笔误，经过大量的修改和补充，我的学生杜康对全书定稿做了详细的校对，这在较大程度上减少了本书原稿中出现的错误.

作者十分感谢南开大学组合数学研究中心的李学良教授，作者硕士导师李尊贤教授，陕西师范大学数学与信息科学学院王国俊教授，陕西师范大学数学与信息科学学

院刘新平教授，浙江理工大学理学院的樊太和教授以及荷兰 Twente 大学数学系的 Hoede 教授在各方面提供的帮助.

限于编者的水平，疏漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者指正.

编　者

2008 年 1 月 3 日于陕西师范大学

常 用 符 号

$\mathbf{N}$	全体自然数组成的集合 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots\}$.
$\mathbf{I}$	全体整数组成的集合.
$\mathbf{Q}$	全体有理数组成的集合.
$\mathbf{R}$	全体实数组成的集合.
$\forall$	对于任意给定的.
$\exists$	至少存在一个.
P	表示一个数域.
$P[x]$	数域 P 上以 x 为未定元的一元多项式的全体.
$\partial(f(x))$	非零多项式 $f(x)$ 的次数.
$(a_{ij})_{m\times n}$	矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.
$\det(a_{ij})_n$	n 次方阵 $(a_{ij})_n$ 的行列式.
$\lvert\boldsymbol{A}\rvert$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式.
A_{ij}	矩阵 $(a_{ij})_{m\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.
$\boldsymbol{A}^*$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.
$r(\boldsymbol{A})$	矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.
$\boldsymbol{E}_n$	n 级单位矩阵.
I	恒同变换.
V_n	n 维线性空间.
$M_{m\times n}(P)$	数域 P 上 m 行 n 列矩阵的全体.
$L(V_n)$	线性空间 V_n 上线性变换的全体.
V_λ	以 λ 为特征值的特征子空间.
$m_A(\lambda)$	方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式.
$L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r)$	向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的生成子空间.
$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$	向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的内积.
$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle$	向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 的夹角.
$\lvert\boldsymbol{\alpha}\rvert$	向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度.

目　　录

第 1 章 多 项 式

多项式是代数学研究的最基本的概念之一. 高等代数从研究内容上分为多项式和线性代数两大部分，而多项式这一章似乎与其余章节在逻辑上没有多大联系而自成一个体系. 但实质上，它与矩阵、二次型、线性变换、λ-矩阵及欧氏空间均有着密切的联系.

本章内容包括：多项式的概念与运算，多项式的整除，多项式的因式分解，注记.

1.1 多项式的概念与运算

一、多项式的基本概念

a. 多项式的定义

要点 形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1.1}$$

称为数域 P 上以 x 为文字的一元多项式，其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in P$，n 是非负整数.

b. 多项式的次数

要点 式(1.1)中，当 $a_n\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 的次数为 n，记为 $\partial(f(x))=n$，并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项，a_n 为 $f(x)$ 的首项系数，a_ix^i 为 $f(x)$ 的 i 次项，a_i 为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n=\cdots=a_1=0$ 且 $a_0\neq 0$ 时，称多项式 $f(x)$ 为零次多项式，这时 $\partial(f(x))=0$；当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时，称 $f(x)$ 为零多项式. 零多项式是唯一不定义次数的多项式.

评析 多项式的次数是一个很直观的概念，但它在处理多项式的有关问题中却起着关键的作用. 这一点可在例 1.1.1 及例 1.2.1 等题中体会它独特的作用.

c. 多项式的相等

要点 数域 P 上以 x 为文字的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们对应的同次项系数均相等.

评析 证明两个多项式的相等有如下方法：①利用定义；②在它们首项系数相等的情况下，证明这两个多项式相互整除；③在它们首项系数相等的情况下，证明这两个多项式在复数域上有相同的根；④一些特殊情况下，也可考虑用反证法，如例 1.1.1.

二、多项式的运算

要点 1° 记 $P[x]=\left\{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\middle|a_i\in P,\ i=0,1,\cdots,n\right\}$，则可在集合 $P[x]$ 上做与整数集合 $\mathbf{Z}$ 相类似的运算，即 $P[x]$ 中的两个多项式可以进行加、减、乘运算，并具有与整数相类似的概念与结论(如可讨论互素、不可约等概念，并有带余除法定理等结论).

2° 当 $f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$ 时，它们做运算后的次数有下列性质：

(1) 当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时，$\partial(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial(f(x)),\partial(g(x))\}$；

(2) $\partial(f(x)g(x))=\partial(f(x))+\partial(g(x))$.

例 1.1.1 (2007，大连理工大学) 设 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 均为实系数多项式，证明：若有

$$f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x),$$

则 $f(x)=g(x)=h(x)=0$.

证明 若 $f(x)\neq 0$，则 $\partial\left(f^2(x)\right)$ 为偶数，故 $g(x)$，$h(x)$ 不能全为零，且 $\max\{\partial(g(x)),\partial(h(x))\}\geqslant 0$. 从而 $\partial\left(g^2(x)+h^2(x)\right)$ 也是偶数，即得 $\partial\left(xg^2(x)+xh^2(x)\right)$ 为奇数，这与 $f^2(x)=xg^2(x)+xh^2(x)$ 矛盾，故 $f(x)=0$. 此时由 $f^2(x)=x\left(g^2(x)+h^2(x)\right)$，易得 $g(x)=h(x)=0$.

练习 1.1

1.1.1 当 a,b,c 取何值时，多项式 $f(x)=x-5$ 与 $g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$ 相等.

1.2 多项式的整除

一、带余除法和综合除法

a. 带余除法

要点 设 $f(x),g(x)\in P[x],g(x)\neq 0$，则存在唯一的一对多项式 $q(x),r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x), \tag{1.2}$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$. 式(1.2)中的 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式，$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

需要强调的是，等式(1.2)中的余式 $r(x)$ 必须满足 $r(x)=0$ 或 $\partial(r(x))<\partial(g(x))$，这个条件是要牢记的.

评析 带余除法是多项式理论中最重要、最基本的工具，表现在：

(1) 它把两个多项式间可除性关系进行了完全的概括，包括除尽、除不尽两种情