

高等代数中的典型 问题与方法 (第二版)

李志慧 李永明 编

- ◎ 方便自学 (配套习题详细解答)
- ◎ 考研备考 (高校考研真题讲解)
- ◎ 教师备课 (知识要点归纳评析)



科学出版社

高等代数中的典型问题与方法 (第二版)

李志慧 李永明 编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是为正在学习高等代数的读者、正在复习高等代数准备报考研究生的读者,以及从事这方面教学工作的年轻教师编写的。

本书与北京大学数学系几何与代数教研组编写的《高等代数(第三版)》相配套,在编写上也遵循此教材的顺序。全面、系统地总结和归纳了高等代数中问题的基本类型、每种类型的基本方法,对每种方法先概括要点,再选取典型而有一定难度的例题,逐层剖析。对一些较难理解的问题,在适当的章节做了专题研究,进行了较深入的探讨和总结,如:线性变换的对角化、矩阵分解等问题,以消除读者长期以来对其抽象问题在理解上含糊不清的疑虑,从而更深入地领会问题。

本书大量采用全国部分高校历届硕士研究生高等代数入学试题,并参阅了50余种教材、文献及参考书,经过反复推敲、修改和筛选,在长期教学实践的基础上编写而成。全书共分9章,45节,126个条目,约320个典型问题,涉及多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、 λ -矩阵、欧氏空间。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数中的典型问题与方法/李志慧,李永明编。—2版。—北京:科学出版社,2016.5

ISBN 978-7-03-048101-6

I. ①高… II. ①李… ②李… III. 高等代数—研究 IV. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第085890号

责任编辑:王胡权 / 责任校对:邹慧卿

责任印制:白洋 / 封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

大厂书文印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年9月第一版 开本:720×1000 1/16

2016年5月第二版 印张:24 1/2

2016年5月第八次印刷 字数:492 000

定价:45.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

第二版前言

本书自 2008 年 9 月出版以来, 得到各地读者的广泛肯定, 一些读者向我们提出了宝贵的意见, 在此深表感谢. 这次再版, 对第 1 章的内容做了较大的调整; 增加了 1.4 节和 5.6 节, 以及若干典型例子, 并增加了一些知识点及例子的评析.

本书具有以下特色.

(1) 内容清晰. 结构上逐条有序地安排知识点, 然后加以准确描述, 并运用典型例子加以分析.

(2) 论证严谨. 在例子的求解及证明方面推理严谨.

(3) 评析新颖. 对知识点、例子等进行评析, 以剔除疑惑, 或在理解层次方面给予拔高; 评析的语言易于理解, 站在读者思维的角度论述.

(4) 覆盖面广. 知识点的涉及面广, 共探讨高等代数中约 320 个典型问题.

(5) 习题丰富. 精心配套的习题量大, 且各有代表性. 通过演练可以熟练掌握高等代数的基本方法与技巧.

一些读者还问及如何更好地理解本书的书名, 下面谈谈我们的理解和编写本书的初衷. 全书共分 9 章, 45 节, 126 个条目, 约 320 个知识要点(简称要点), 实质上, 这些要点就是本书中的典型问题. 而“方法”一词指的是以性质、定理等作为原理提炼出来的解决问题的办法, 如本书中式(4.15)即是一个原理, 由此演变出求矩阵逆的方法, 即将这个矩阵与单位阵并列写到一起, 然后对该阵施行能将其变为单位阵的一系列初等变换, 而对单位阵同时也施行这样的变换, 这时单位阵就化为该阵的逆矩阵. 因此, 这种方法是原理可循的. 实质上, 在高等代数中, 依据原理产生的求解问题的方法很多, 例如, 求解一般线性方程组的高斯消元法; 计算行列式的方法; 求线性变换的特征值与特征向量的方法; 二次型化标准形的合同变换方法、配方法及正交变换法等, 读者在学习时要仔细体会这些方法的由来. 当然, 如果从课程特色的角度谈及高等代数研究问题的基本方法, 则属于另一个层面上的问题, 它表现在: 严格的逻辑推理方法; 公理化方法; 矩阵方法; 结构化方法(如线性空间及子空间); 等价分类方法等. 这些方法较前面提到的方法更抽象, 可以说代表了这门课程的思想方法. 有些方法是数学系本科生第一次接触到的, 需要通过读书和多做练习加以理解, 以便在今后的研究中能熟练应用. 高等代数中这两种不同层面的方法都是需要理解和掌握的.

我们衷心感谢广大教师和读者对本书的关心，书中的疏漏或不当之处恳请不吝赐教(电子信箱: snnulzh@aliyun.com)。

编者

2015年9月3日于陕西师范大学

第一版前言

“高等代数”课是本科数学专业的一门重要的基础课，也是理工科大学各专业的**重要数学工具**。它对数学专业的许多后继课程有直接影响，关系到学生数学素质的培养。这门课程的特点是概念多，内容比较抽象。在长期的教学实践中，我们深刻体会到，学生学习和掌握教材的基本知识困难并不大，但要灵活运用基本概念和基础理论去分析问题和解决问题就感到困难，甚至不知如何着手。为培养学生分析问题和解决问题的能力，目前已出版了大量相关书籍，但仍不能满足学生的要求。分析其原因，有些书主要是解题，不去分析题中要考察的知识点，学生在学习过程中不能及时领悟和总结，从而学习后印象不深刻；有些书虽总结了知识点并附有配套的例题，但由于知识点或列举不够详细，或缺乏配套例题，学生读后仍感到不系统。在学生掌握了教材的基本知识后，若能有一本帮助他们巩固、加深、提高、扩大所学知识的书，对高等代数中的问题与方法进行全面系统的总结和分类指导，告诉读者应该如何分析和解决问题，这对培养读者的思维能力与独立解决问题的能力，从根本上强化已学知识，将是十分必要的。

考虑到这些需要，我们将全国各高校历届硕士研究生高等代数入学试题进行了一次全面的整理，逐题分析研究，比较分类。同时参阅了国内 50 余种教材、文献和参考书，将这些教材中的知识点和方法进行了总结和归类。然后，将整理好的知识点和归类后的试题进行一一匹配，有的试题我们附在了相应的练习题中，用于读者自检。

全书共分 9 章，42 节，111 个小条目，中心问题是向读者回答：**高等代数的每个单元到底有哪些基本问题？每类问题各有哪些方法？每种方法又有哪些富有代表性、典型性、又有相当难度，值得向读者推荐的好例题和练习？**

基于编写本书的上述宗旨，我们在对例题进行分类讲解时，特别注意了系统地讲述解题思想与解题方法，而不是题目的堆砌或单纯的题解。全书每段先对所解问题以“要点”的形式进行概括性的阐述，然后由浅入深地安排一套一套的例题，对具体的方法和精神实质，加以“评析”，以拔高而达到更深层次的理解。

本书是笔者在陕西师范大学数学与信息科学学院为高年级学生讲授“高等代数选讲”所写讲义的基础上编写的。原讲义讲授了 6 届，听取了各方老师的意见，每届学生都积极纠正了讲义中的若干笔误，经过大量的修改和补充，我的学生杜康对全书定稿做了详细的校对，这在较大程度上减少了本书原稿中出现的错误。

作者十分感谢南开大学组合数学研究中心的李学良教授，作者硕士生李尊贤教授，陕西师范大学数学与信息科学学院王国俊教授，陕西师范大学数学与信息科学学

院刘新平教授，浙江理工大学理学院的樊太和教授以及荷兰 Twente 大学数学系的 Hoede 教授在各方面提供的帮助。

限于编者的水平，疏漏和不妥之处在所难免，恳请广大读者指正。

编 者

2008 年 1 月 3 日于陕西师范大学

常用符号

\mathbf{N}	全体自然数组成的集合 $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.
\mathbf{I}	全体整数组成的集合.
\mathbf{Q}	全体有理数组成的集合.
\mathbf{R}	全体实数组成的集合.
\forall	对于任意给定的.
\exists	至少存在一个.
P	表示一个数域.
$P[x]$	数域 P 上以 x 为未定元的一元多项式的全体.
$\partial(f(x))$	非零多项式 $f(x)$ 的次数.

$(a_{ij})_{m \times n}$	矩阵 $(a_{ij})_{m \times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.
-------------------------	--

$\det(a_{ij})_n$	n 次方阵 $(a_{ij})_n$ 的行列式.
$ A $	矩阵 A 的行列式.
A_{ij}	矩阵 $(a_{ij})_{m \times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式.
A^*	矩阵 A 的伴随矩阵.
$r(A)$	矩阵 A 的秩.
E_n	n 级单位矩阵.
I	恒同变换.
V_n	n 维线性空间.
$M_{m \times n}(P)$	数域 P 上 m 行 n 列矩阵的全体.
$L(V_n)$	线性空间 V_n 上线性变换的全体.
V_λ	以 λ 为特征值的特征子空间.
$m_A(\lambda)$	方阵 A 的最小多项式.
$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$	向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 的生成子空间.
(α, β)	向量 α, β 的内积.
$\langle \alpha, \beta \rangle$	向量 α, β 的夹角.
$ \alpha $	向量 α 的长度.

目 录

第二版前言

第一版前言

常用符号

第 1 章 多项式	1
1.1 多项式的概念与运算	1
一、多项式的基本概念	1
二、多项式的运算	2
练习 1.1	2
1.2 多项式的整除	2
一、带余除法和综合除法	2
二、整除	4
三、最大公因式及其求法	5
四、多项式的互素	7
练习 1.2	9
1.3 多项式的因式分解	10
一、不可约多项式	10
二、 k 重因式	12
三、多项式函数	13
四、一般数域上的因式分解及根的性质	15
五、复数域上多项式的因式分解及根的性质	16
六、实数域上多项式的因式分解及根的性质	17
七、有理数域上多项式的因式分解及根的性质	19
练习 1.3	22
1.4 注记	23
第 2 章 行列式	24
2.1 用定义计算行列式	24
练习 2.1	25
2.2 求行列式的若干方法	25
一、三角化法	26

	二、用行列式的性质化为已知行列式	26
	三、滚动相消法	27
	四、拆分法	29
	五、加边法	31
	六、归纳法	32
	七、利用递推降级法	33
	八、利用重要公式与结论	35
	九、用幂级数变换计算行列式	36
	练习 2.2	38
2.3	利用降级公式计算行列式	42
	练习 2.3	48
2.4	有关行列式的证明题	49
	练习 2.4	50
2.5	一个行列式的计算和推广	51
	一、 D_n 的计算	52
	二、问题的推广	54
第 3 章	线性方程组	56
3.1	线性相关性 (I)	56
	一、线性相关	56
	二、线性无关	57
	三、综合性问题	61
	练习 3.1	63
3.2	矩阵的秩	64
	练习 3.2	67
3.3	线性方程组的解	67
	一、线性方程组的几种表示形式	67
	二、线性方程组有解的判定及解的个数	68
	三、线性方程组解的结构	70
	练习 3.3	77
第 4 章	矩阵	81
4.1	矩阵的基本运算	81
	一、矩阵的加法和数乘	81
	二、矩阵的乘法	82
	三、矩阵的转置	83
	四、矩阵的伴随	84

练习 4.1	87
4.2 矩阵的逆	88
一、矩阵逆的性质	88
二、矩阵逆的求法 (I)	88
三、矩阵不可逆的证明方法	89
四、矩阵多项式的逆 (II)	90
练习 4.2	91
4.3 矩阵的分块	91
一、分块阵的乘法及其应用	91
二、分块阵的广义初等变换	92
三、关于分块阵的逆 (III)	93
练习 4.3	94
4.4 初等矩阵	95
一、初等矩阵及其性质	95
二、初等变换的应用	96
三、利用初等变换求矩阵的逆 (IV)	99
四、矩阵的等价	100
练习 4.4	100
4.5 若干不等式	101
一、Steinitz 替换定理及其应用	101
二、利用整齐与局部的思想 (实例)	102
练习 4.5	104
第 5 章 二次型	105
5.1 二次型与矩阵	105
一、二次型的概念及其表示	105
二、二次型与对称矩阵 (I)	106
练习 5.1	107
5.2 标准形和规范形	107
一、标准形	107
二、规范形及其唯一性	111
三、(反)对称矩阵 (II)	112
练习 5.2	113
5.3 正定二次型	114
一、正定二次型的判定	114
二、正定矩阵的判定	117

练习 5.3	118
5.4 其他各类二次型	120
一、负定二次型	120
二、半正(负)定二次型	122
5.5 不等式与二次型(实例)	123
5.6 注记	124
第 6 章 线性空间	125
6.1 线性空间的定义	125
一、用定义证明线性空间	125
二、几个常用的线性空间	125
三、向量组的线性相关性	126
练习 6.1	126
6.2 基与维数·变换公式	127
一、基与维数的求法	127
二、基变换公式	128
三、同一向量在不同基下的坐标(“3推1”公式 I)	129
四、坐标的求法	130
练习 6.2	131
6.3 子空间及其运算	131
一、子空间的判定	131
二、子空间的运算	134
三、直和的证明	137
四、子空间的性质	137
练习 6.3	139
6.4 不等式	141
练习 6.4	143
第 7 章 线性变换	144
7.1 线性变换及其运算	144
一、线性变换的判定及其性质	144
二、线性变换的多项式	146
练习 7.1	146
7.2 线性变换与矩阵	147
一、线性变换的矩阵	147
二、一一对应关系	148
三、矩阵的相似	150

	四、向量与其象向量的坐标(“3推1”公式II)	151
	五、同一线性变换在不同基下的矩阵(“3推1”公式III)	152
	练习 7.2	153
7.3	矩阵(线性变换)的特征值与特征向量	155
	一、矩阵的特征值与特征向量求法	155
	二、矩阵特征值的和与积	159
	三、代数重数与几何重数	160
	四、扰动法(实例)	161
	练习 7.3	161
7.4	线性变换(矩阵)的对角化问题(I)	163
	一、利用特征向量判定	163
	二、利用特征值判定	164
	练习 7.4	166
7.5	不变子空间	168
	一、不变子空间的判定	168
	二、特征子空间	169
	三、值域	170
	四、核	171
	练习 7.5	174
7.6	线性空间的分解	177
	一、多项式理论与线性空间分解初步	177
	二、线性空间的分解	179
	练习 7.6	179
第 8 章	λ-矩阵	181
8.1	λ -矩阵的有关概念及结论	181
	一、 λ -矩阵的相关概念	181
	二、不变因子, 行列式因子与初等因子	182
	练习 8.1	184
8.2	矩阵相似的条件	185
	一、矩阵相似与 λ -矩阵等价之间的关系	185
	二、矩阵相似的充要条件	185
	练习 8.2	186
8.3	矩阵的 Jordan 标准形	186
	一、Jordan 标准形及其求法	186
	二、Jordan 块的性质及其应用	190

练习 8.3	195
8.4 Jordan 标准形的相似过渡阵的求法	197
练习 8.4	201
8.5 最小多项式	202
一、最小多项式及其性质	202
二、最小多项式的求法	204
三、最小多项式的应用(实例)	208
练习 8.5	209
8.6 矩阵的对角化问题(II)	210
一、利用最小多项式判定矩阵的对角化	210
二、常见的几类可对角化矩阵	211
练习 8.6	211
8.7 矩阵方幂的若干求法	212
一、秩为 1 的情况	212
二、可分解为数量矩阵和幂零矩阵之和的情况	213
三、归纳法(实例)	214
四、利用相似变换法	215
五、特征多项式法(或最小多项式法)	216
六、利用 Jordan 标准形(实例)	217
练习 8.7	218
第 9 章 欧几里得空间	220
9.1 欧氏空间及其基本性质	220
一、欧氏空间的基本概念	220
二、不等式	222
三、度量矩阵及其性质	223
四、内积的矩阵表示(“3 推 1”公式 IV)	224
五、不同基的度量矩阵之间的关系(“3 推 1”公式 V)	225
练习 9.1	226
9.2 标准正交基	226
一、标准正交基及其性质	226
二、标准正交基的求法	226
三、正交矩阵及其性质	229
练习 9.2	230
9.3 子空间	231
一、子空间的正交及其性质	231

二、正交补	231
练习 9.3	233
9.4 欧氏空间上的线性变换	234
一、正交变换	234
二、对称变换	236
三、反对称变换	237
四、(反)对称矩阵(III)	237
练习 9.4	239
9.5 矩阵分解	241
一、加法分解	241
二、乘法分解	243
三、特殊矩阵的分解	245
练习 9.5	247
练习答案	249

第1章 多项式

多项式是代数学研究的最基本的概念之一. 高等代数从研究内容上分为多项式和线性代数两大部分, 而多项式这一章似乎与其余章节在逻辑上没有多大联系而自成一个体系. 但实质上, 它与矩阵、二次型、线性变换、 λ -矩阵及欧氏空间均有着密切的联系.

本章内容包括: 多项式的概念与运算, 多项式的整除, 多项式的因式分解, 注记.

1.1 多项式的概念与运算

一、多项式的基本概念

a. 多项式的定义

要点 形式表达式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (1.1)$$

称为数域 P 上以 x 为文字的一元多项式, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in P$, n 是非负整数.

b. 多项式的次数

要点 式(1.1)中, 当 $a_n \neq 0$ 时, 称多项式 $f(x)$ 的次数为 n , 记为 $\partial(f(x)) = n$, 并称 $a_n x^n$ 为 $f(x)$ 的首项, a_n 为 $f(x)$ 的首项系数, $a_i x^i$ 为 $f(x)$ 的 i 次项, a_i 为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n = \cdots = a_1 = 0$ 且 $a_0 \neq 0$ 时, 称多项式 $f(x)$ 为零次多项式, 这时 $\partial(f(x)) = 0$; 当 $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ 时, 称 $f(x)$ 为零多项式. 零多项式是唯一不定义次数的多项式.

评析 多项式的次数是一个很直观的概念, 但它在处理多项式的有关问题中却起着关键的作用. 这一点可在例 1.1.1 及例 1.2.1 等题中体会它独特的作用.

c. 多项式的相等

要点 数域 P 上以 x 为文字的两个一元多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们对应的同次项系数均相等.

评析 证明两个多项式的相等有如下方法: ①利用定义; ②在它们首项系数相等的情况下, 证明这两个多项式相互整除; ③在它们首项系数相等的情况下, 证明这两个多项式在复数域上有相同的根; ④一些特殊情况下, 也可考虑用反证法, 如例 1.1.1.

二、多项式的运算

要点 1° 记 $P[x] = \{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \mid a_i \in P, i = 0, 1, \cdots, n\}$, 则可在集合 $P[x]$ 上做与整数集合 \mathbf{Z} 相类似的运算, 即 $P[x]$ 中的两个多项式可以进行加、减、乘运算, 并具有与整数相类似的概念与结论(如可讨论互素、不可约等概念, 并有带余除法定理等结论).

2° 当 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$ 时, 它们做运算后的次数有下列性质:

(1) 当 $f(x) \pm g(x) \neq 0$ 时, $\partial(f(x) \pm g(x)) \leq \max\{\partial(f(x)), \partial(g(x))\}$;

(2) $\partial(f(x)g(x)) = \partial(f(x)) + \partial(g(x))$.

例 1.1.1 (2007, 大连理工大学) 设 $f(x), g(x), h(x)$ 均为实系数多项式, 证明: 若有

$$f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x),$$

则 $f(x) = g(x) = h(x) = 0$.

证明 若 $f(x) \neq 0$, 则 $\partial(f^2(x))$ 为偶数, 故 $g(x), h(x)$ 不能全为零, 且 $\max\{\partial(g(x)), \partial(h(x))\} \geq 0$. 从而 $\partial(g^2(x) + h^2(x))$ 也是偶数, 即得 $\partial(xg^2(x) + xh^2(x))$ 为奇数, 这与 $f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$ 矛盾, 故 $f(x) = 0$. 此时由 $f^2(x) = x(g^2(x) + h^2(x))$, 易得 $g(x) = h(x) = 0$.

练习 1.1

1.1.1 当 a, b, c 取何值时, 多项式 $f(x) = x - 5$ 与 $g(x) = a(x - 2)^2 + b(x + 1) + c(x^2 - x + 2)$ 相等.

1.2 多项式的整除

一、带余除法和综合除法

a. 带余除法

要点 设 $f(x), g(x) \in P[x], g(x) \neq 0$, 则存在唯一的一对多项式 $q(x), r(x) \in P[x]$, 使

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x), \quad (1.2)$$

其中 $r(x) = 0$ 或 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$. 式(1.2)中的 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式, $r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式.

需要强调的是, 等式(1.2)中的余式 $r(x)$ 必须满足 $r(x) = 0$ 或 $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$, 这个条件是要牢记的.

评析 带余除法是多项式理论中最重要、最基本的工具, 表现在:

(1) 它把两个多项式间可除性关系进行了完全的概括, 包括除尽、除不尽两种情