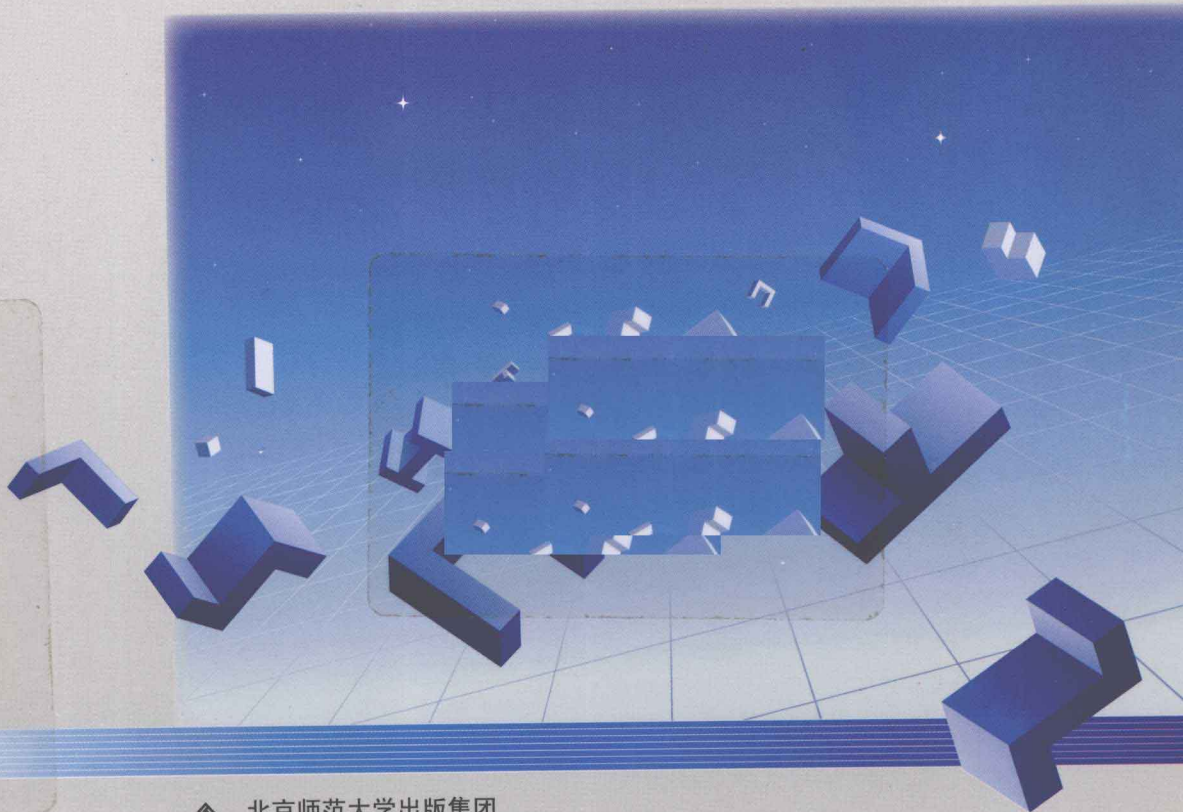


京師 数学教育丛书

数学思维概论

SHUXUE SIWEI GAILUN

周春荔 编 著



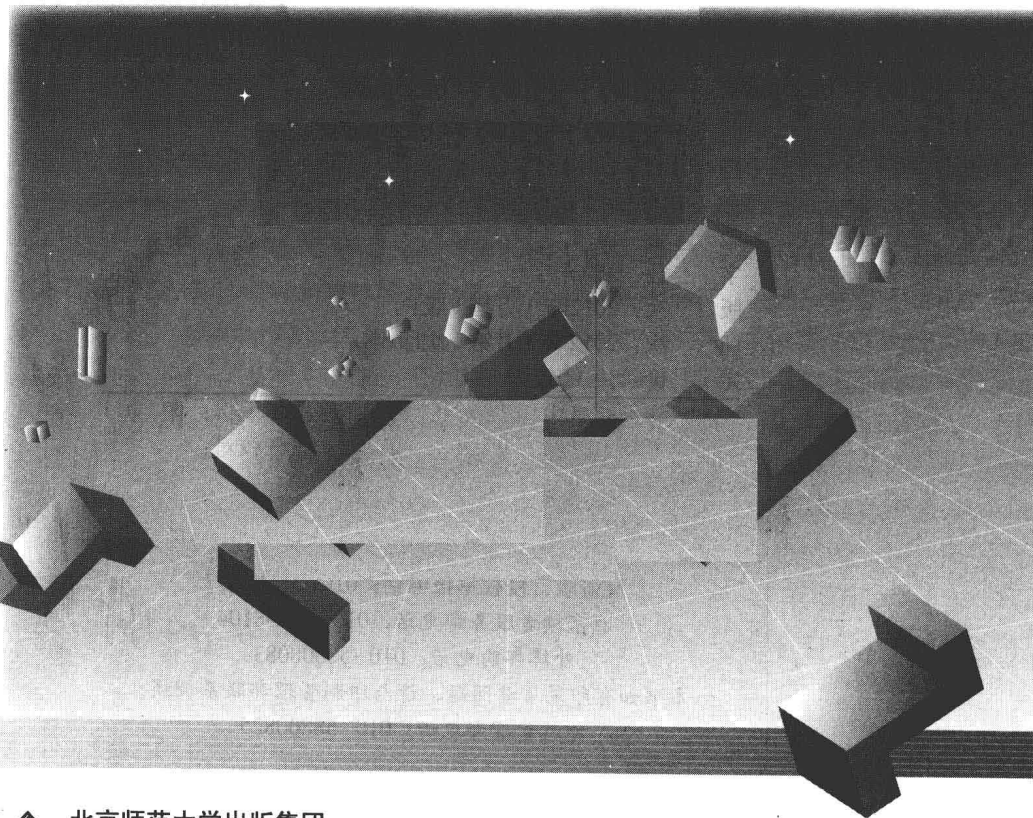
北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

北京师范大学 数学教育丛书

数学思维概论

SHUXUE SIWEI GAILUN

周春荔 编 著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学思维概论/周春荔编著. —北京: 北京师范大学出版社, 2012.1

(数学教育丛书)

ISBN 978-7-303-13847-0

I. ①数… II. ①周… III. ①数学教学—高等学校—教材 IV. ①O1-4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 229332 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 <http://gaojiao.bnup.com.cn>
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行: 北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn

北京新街口外大街 19 号

邮政编码: 100875

印刷: 北京中印联印务有限公司

经销: 全国新华书店

开本: 170 mm × 230 mm

印张: 19.5

字数: 350 千字

版次: 2012 年 1 月第 1 版

印次: 2012 年 1 月第 1 次印刷

定价: 30.00 元

策划编辑: 岳昌庆 责任编辑: 胡琴竹 周 阳

美术编辑: 毛 佳 装帧设计: 毛 佳

责任校对: 李 菡 责任印制: 李 啸

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话: 010-58800697

北京读者服务部电话: 010-58808104

外埠邮购电话: 010-58808083

本书如有印装质量问题, 请与印制管理部联系调换。

印制管理部电话: 010-58800825

作者的话

著名的苏联学者加里宁有一句名言：“数学是锻炼思维的体操！”我从初中时代读到这句名言至今，已近60年。在1957年以后那个以阶级斗争为纲、突出政治到1962年“阶级斗争要年年讲、月月讲、天天讲”的年代，这句名言逐渐淡出舞台，人们很少提及。后来到了“革命无罪、造反有理”、砸烂封资修、在上层建筑领域实行无产阶级专政的“文革”岁月，这句名言被视为修正主义教育思想的产物，因此销声匿迹，没人再敢公开提及。而在人们正常生活、和谐相处的发展年代，这句名言又走进了人们的视野，重见天日，和青少年交朋友，和学校的师生交朋友，和数学家、数学教育家交朋友，引领人们正确地认识数学在基础教育中的价值。

什么是思维？数学与思维有什么特殊的关系？为什么“锻炼思维的体操”要加冕于“数学”而不加冕于其他学科？基础教育培养有社会主义觉悟的有文化的劳动者要不要发展学生的思维？带着对这些问题的好奇心，我不得不对思维心理学有一些涉猎，读了一点书，积累了一些资料，思索了一些问题，对数学思维进行了一些议论，以期在教学中应急所需。因此，本书只是自己的一点读书笔记和心得体会，是对事实和素材、经验与体会的初步整理与综合。为学习与研究数学思维的同人提供一些方便，做一些交流。对思维与数学思维的知识做些普及工作。这正是写《数学思维概论》的初衷。

人们对思维有各种各样的理解，如“思维是一种认识活

动”“思维是人们的理性认识”，等等，这些命题都不足以成为思维的定义。比如，人的认识活动离不开思维，然而思维要比认识活动广泛得多；把思维等同于理性认识，认为思维只存在于人的理性认识阶段这种最流行的观点，实质是没有分清“思维”与“思维能力”的表现。其实思维既存在于理性认识阶段，也存在于感性认识阶段，思维存在于人们认识的全过程。现在通用的思维的定义即思维是人脑对于客观事物的本质及其内在联系的间接和概括的反映，源于哲学命题“思维是对存在的反映”。

由于现代的脑科学、信息技术、心理学的发展，从哲学认识论的角度，可以把思维简要定义为：思维是大脑对信息的加工活动。这里所说的信息，不仅包括来自客观外界的信息，而且包括来自主体内部生理、心理需要方面的信息。这个定义，对具体研究思维，特别是数学思维，比较有益。

在这个意义下，动物也有思维。动物的思维认识能力，是人类与动物共有的。它产生于人的思维认识能力形成之前，可以说，它是人类思维认识能力产生的基础。当然，动物的思维并不等于人的思维。人的思维认识能力，不仅与动物的思维有着不同的生理、心理基础，更有其独特的社会历史因素。随着从猿到人的进化，在“人猿相揖别”的时候，从动物的思维发展到人的思维，起了本质的变化。比如，动物不能创造语言符号进行思维，动物不会像人那样借助第二信号系统进行思维活动。虽然，在动物心理学家的精心训练下，某些聪明的猿类也能运用手势语言和符号语言交流想法，进行人兽对话，但是，至今还没有发现猿类能够创造语言符号来交流思想成果。虽然动物已有简单的分析综合能力，有初级的抽象思维活动，但是动物的思维与人不同，它们的思维基本上还是一种趋利避害、自我保存的本能活动。然而，人类的思维，即使是人类始祖的思维，也是按照自身的需要和目的，有意识、有计划的一种精神活动。正如马克思在分析人的意识历史时所说的：“这里人和绵羊不同的地方只在于：他的意识代替了本能，或者说他的本能是被意识到了的本能。”^①

思维作为心理活动是大脑的功能。脑的产生，是生物进化史上一个划时代的里程碑。从动物脑到人脑是一个历史进化的过程，从古到今人类思维的发展也是一个历史的过程。几千年来，人类思维的成果，改变了世界的面貌，但人类对自我的思维至今却认识的甚少。直到20世纪80年代，人们才提出了思维科学的概念，要建立“思维学”，其主要研究的问题是：人是怎样思维的？思维是一种精神活动，一方面，它具有主观性；另一方面，对思维本身来说，精

^① 马克思恩格斯选集(第1卷)。北京：人民出版社，1995，36。

神、意志的作用是很有局限性的。乍看起来，“让我想想”“我来想想”完全是自由自在的，其实，我们想到这些和这么想，在很大程度上是不由自己的，总是要受到思维规律所制约的。年龄相同的同班学生做同一道数学题，其错误大体有几种类型，这反映了不同个体大脑思维功能的同一性及同一性中的差异性。但对于孪生者，其同一性表现得极为强烈。例如，2006年5月31日凤凰卫视的“鲁豫有约”，请了若干对孪生兄弟姐妹，其中孪生兄弟杂技演员刘全和、刘全利二人谈到念中学时两人做算术题错的都一样。这个事情就很有趣，值得我们注意！

至于数学思维学，应属于思维科学的子类。数学思维学应回答学习、探索数学的人是怎样思维的，是按照什么方式思维的，有哪些区别于其他学科思维方式的特点和规律，应该怎样遵循数学的思维规律提高数学的学习效率。数学教学又是数学思维活动的教学。可见研究数学思维对提高数学教学质量也有着重要的意义。

例如，由于计算器、计算机的普及，美国的数学教育家提出一种设想，在小学阶段直接使用计算器讲解加法、乘法的通性，而取消笔算、心算练习，实践的结果，新的一代，只知道 $12 + 31 = 31 + 12$ ，而不会算出结果为43。其实，只要考察一下人类对加法、乘法思维发展的历史就会一目了然。最初是一位数的加法，和超过“十”进1；然后是两位数加法，先算个位数加法，超过“十”进1，再对十位上的数和进上的1像一位数加法一样进行……这样，就可以计算任意的多位数的加法了。实现了化繁为简、以简驭繁的思维过程，也是中国古算中的“归一”思维。了解了“认识数的加法”的个体思维的发展与历史上人类思维的整体发展大体上一致的规律，因此小学要讲笔算，而且“三算结合”是有益的。这也是中国小学生四则计算能力较强的原因。由此也看出某些国家数学教育改革不尊重思维规律带来的某种后果。

华罗庚(1910—1985)教授在1959年通过电台普及数学讲座时指出：“数学是一门既古老而又年青的学科。说古老，是指它是和人类文明同时开始的一门学问；说年青，到今天它仍然还是十分活跃地贯穿到各个科学部门之中起着重要作用，并且仍然不断地出现新分支的一门学问。历史上有许多科学技术的方法被新的所代替而退出了舞台，但是数学上的不少古已有之的原则到今天依然被采用着。燧人氏钻木取火的方法今天已经普遍地不用了；但是一直到今天，人们在幼年学习的时候，数数的方法，还是扳着手指一、二、三、四、五……地数，和古代的方法没有两样。识数已经成为人类的必需知识，如果一个人被人认为不识数，那将是一件十分不光彩的事，‘唉！这个小孩七岁了，还不识

数!’这是很不好听的话，这就极够父母操心的了。”^①可见数学思维方式与其他学科思维方式的差异带来的在学习上的差异，我国学者和教师早就有所认识。而且，为了缩短学习过程，早就创建了新的学习平台，比如，学习乘法并不需要花很多时间，只要以“九九歌”为平台就可以了。如果不以“九九歌”为乘法平台，而直接用计算器算乘法，作为文盲小商贩做买卖的计算工具是可以的，但作为数学文化教育远远是不够的！

由此可见，数学思维历史的研究成果，对数学教学的应用可以提高教学质量和学习效率。

本书拟从以下几个方面进行探索。

首先，介绍数学思维的特点，以及具体的数学形象思维、抽象的数学逻辑思维、素朴的数学直觉思维三种基本成分，再分别介绍以对应为特点的函数思维、扩维为特点的空间思维、排序为手段的程序思维、建构可实现的构造思维等几种重要的数学思维，这是第一章的基本内容。

为了探讨数学的思维方式，我们研究数学思维的基本方式，数学思维的建构与基本原则，数学思维的模式，最后涉及对数学思维的一般规律的一些思考，以及数学思维自由原则与经济化，这是第二章的要点。

第三章我们介绍数学思维的结构与思维品质，重点介绍思维的分析与综合，数学思维品质概述以及数学思维的元认知。

第四章介绍数学思维发展与数学学习。内容将对数学思维的发展建构，产生式与思维定式，迁移规律，数学学习的特点与行为表征和数学思维的最近发展区理论，一些时髦的理论在数学教学中的应用进行一些探讨。

第五章谈一谈数学创造性思维与智力开发。通过黑箱模型探究数学思维方法论、数学思维中的问题解决策略，数学思维中的灵感顿悟，特别是对数学创造性思维及其培养进行了综合性的探讨。这些都是21世纪数学教育面临的全新课题。

第六章略谈数学思维的研究与数学教学，将数学思维的研究纳入中小学数学教师和广大数学教育工作者的视野。

数学教育工作者研究数学思维的出发点，在于提高数学教与学的质量。我们所依据的材料，除借助其他学科的相关理论成果外，绝大多数都来源于数学教学实践，我们研究数学思维的落脚点也在于提高数学教与学的质量，推进数学素质教育。

^① 华罗庚. 数学的性质和作用. 北京: 科学技术出版社, 1959, 1.

本书的资料丰厚、翔实，根据读者的数学功底，可有选择地使用，更希望读者能收集、积累与补充更多的实验例证资料。

总之，我们的探索与研究只是开个头，还很不成熟。现代数学教育呼唤数学思维的研究。本书只当是抛了一枚石子，对收集到的材料进行了一些加工整理，提供出来，目的是引玉，引起中小学数学教育工作者结合自己的教学实际对数学思维研究的兴趣和热情，以期促进数学思维学尽快从襁褓中健康地成长起来。

衷心地感谢支持、帮助和关心本书写作、出版的朋友和同事们。本书出版发行后，殷切期待各方读者和专家给予批评，以匡谬剔芜。谢谢！

首都师范大学数学科学学院
周春荔 2011年6月于北京

目 录

第 1 章 思维发展与数学思维 / 1

§ 1.1 数学思维及主要特点	1
1.1.1 思维与数学思维	1
1.1.2 数学思维的特点	2

思考题 1.1	16
---------------	----

§ 1.2 数学思维的基本成分	17
1.2.1 具体的数学形象思维	17
1.2.2 抽象的数学逻辑思维	23
1.2.3 素朴的数学直觉思维	26

思考题 1.2	33
---------------	----

§ 1.3 几种重要的数学思维	34
1.3.1 求同为依据的类化思维	34
1.3.2 一一相对应的配对思维	36
1.3.3 运动为特点的函数思维	38
1.3.4 形状与方位的空间思维	40
1.3.5 排序为手段的程序思维	42
1.3.6 把握不变性的整体思维	44
1.3.7 考虑边界值的极端思维	46
1.3.8 建构可实现的构造思维	48

思考题 1.3	55
---------------	----

§ 1.4 科学家的数学思维例析	56
1.4.1 数学、科学大师思维个例简析	56

1.4.2 成为优秀数学研究者的必要条件	61
思考题 1.4	61

第2章 数学思维的基本方式与规律/62

§ 2.1 数学思维的基本方式	62
2.1.1 发散思维与收敛思维	62
2.1.2 正向思维与逆向思维	64
2.1.3 直觉思维与逻辑思维	67
2.1.4 归纳思维与演绎思维	71
2.1.5 联想思维与类比思维	76
2.1.6 再现思维与创造思维	82
思考题 2.1	84
§ 2.2 数学思维建构及其基本原则	85
2.2.1 数学思维建构过程例析	85
2.2.2 数学思维建构原则举要	89
思考题 2.2	93
§ 2.3 数学思维的层次模式	94
2.3.1 数学方法——数学思维的操作模式	94
2.3.2 数学原理——数学思维的机理模式	97
2.3.3 数学思想——数学思维的动态模式	100
2.3.4 数学意识——数学思维的工具模式	102
思考题 2.3	104
§ 2.4 数学思维规律及其思考	105
2.4.1 数学思维的一般规律	105
2.4.2 关于数学的现实原型	109
2.4.3 数学思维的自由与经济化	113
思考题 2.4	115

第3章 数学思维结构与思维品质/116

§ 3.1 数学思维结构概述	116
3.1.1 思维结构主要因素举要	116
3.1.2 思维心理结构图示分析	119

思考题 3.1	120
§ 3.2 思维的分析与综合	121
3.2.1 没有分析就没有综合	121
3.2.2 综合就是把念头化为行动	125
3.2.3 分析与综合程序例谈	129
思考题 3.2	135
§ 3.3 数学思维品质概述	136
3.3.1 数学思维品质分项举要	136
3.3.2 数学思维品质综合比较	150
思考题 3.3	151
§ 3.4 数学思维的元认知	152
3.4.1 元认知的理论要点概述	152
3.4.2 元认知理论与数学教学	156
思考题 3.4	168

第 4 章 数学思维发展与数学学习 /169

§ 4.1 思维的作用正方图示简析	169
4.1.1 图式“我们是怎样思考的”	169
4.1.2 两则数学解题思维日记	173
思考题 4.1	176
§ 4.2 中小学生的数学思维发展	177
4.2.1 青少年数学思维发展的年龄特征	177
4.2.2 数学思维发展的关键期与成熟期	179
思考题 4.2	183
§ 4.3 产生式的应用与思维定式	184
4.3.1 思维发展与数学学习	184
4.3.2 产生式与思维定式	186
思考题 4.3	190
§ 4.4 数学学习与迁移现象分析	191
4.4.1 学习迁移的含义与分类	191
4.4.2 迁移的实质	193
4.4.3 迁移规律与数学学习	194

思考题 4.4	197
§ 4.5 数学学习特点与行为表征	198
4.5.1 数学学习的建构机理分析	198
4.5.2 数学学习特点的行为表征	200
思考题 4.5	204
§ 4.6 数学思维中的“最近发展区”	205
4.6.1 “最近发展区”理论的产生背景	205
4.6.2 “最近发展区”理论与数学教学	209
4.6.3 全面发展数学素养的新理念	213
思考题 4.6	219
第 5 章 数学创造性思维与智力开发 /220	
§ 5.1 数学思维方法的黑箱模型	220
5.1.1 数学思维方法结构初探	220
5.1.2 数学解题思维例题解说	229
思考题 5.1	233
§ 5.2 数学思维与问题解决策略	234
5.2.1 问题解决的含义	234
5.2.2 数学问题解决的主要策略	237
5.2.3 数学思维发展与问题解决	240
思考题 5.2	245
§ 5.3 数学思维中的灵感与顿悟	246
5.3.1 数学灵感与顿悟发生的事例	246
5.3.2 数学灵感与顿悟的基本特征	248
5.3.3 灵感与顿悟的机理解释	251
思考题 5.3	255
§ 5.4 数学创造性思维及其培养	256
5.4.1 数学创造性思维及其特点	256
5.4.2 影响数学创造性思维的主要因素	260
5.4.3 数学教育与数学创造性思维发展	263
思考题 5.4	274

第 6 章 数学思维的研究与数学教学 /275

§ 6.1 数学思维的研究现状和方法的概貌综述	275
6.1.1 我国数学思维研究简况综述	275
6.1.2 数学思维的研究手段与方法	277
思考题 6.1	279
§ 6.2 数学教学本质是数学思维活动的教学	280
6.2.1 数学教学是数学思维活动的教学	280
6.2.2 数学思维与人的思维发展	282
思考题 6.2	285
§ 6.3 现代数学教育呼唤数学思维的研究	286
思考题 6.3	287

附录:关于数学家谈数学学习的问卷分析 /288**主要参考书目 /297**

第1章 思维发展与数学思维

§ 1.1 数学思维及主要特点

1.1.1 思维与数学思维

思维，就是人脑对客观世界的本质属性、相互关系及其内在规律概括的和间接的反映。

思维作为心理学的范畴，它从属于认识过程。所谓思维的过程主要是分析和综合的过程及其派生的抽象、概括、比较、分类、具体化和系统化。思维过程是在人的实践活动中由感性认识，特别是在想象的基础上借助语言，以知识经验为中介实现的。实践活动是思维的基础，语言是思维的工具。

思维作为心理学的一个核心问题，一直受到人们的关注。皮亚杰(Piaget, 1896—1980)在他的《发生认识论》中提出，思维作为一个认识发展过程，是一个内在结构连续的组织和再组织的过程，过程的进行是连续和经常的，但其结果是不连续的，也就是说发展有阶段性。他认为儿童心理(思维)结构的发展涉及图式、同化、顺应和平衡四个方面，其中图式是核心。图式是动作的组织结构，这些结构、这些动作在相同或类似的环境中由于重复而引起迁移或概括。个体之所以能对刺激做出这样或那样的反应，是由于个体具有能够同化这种刺激的某种图式，因而能做出相应的反应。同化就是把环境因素纳入机体已有的图式或结构之中，以加强和丰富主体的动作；顺应是改变主体动作适应主体变化。平衡就是调节。皮亚杰认为它是发展中的最主要的因素，他指出平衡就是不断成熟的内部组织和外部环境的相互作用。平衡—不平衡—平衡的过程，实现着儿童思维结构的不断变化和发展。在动作图式说的基础上，皮亚杰把儿童思维发展分为四个阶段，即感觉动作阶段(出生~约2岁)、前运算阶段(约2~7岁)、具体运算阶段(约7~11岁)与形式运算阶段(约11~15岁)。运算是皮亚杰认知发展阶段论中的一个核心概念。所谓运算，是指通过逻辑推理将一种状态转化成另一种状态。例如， $2+3=5$ ，可以说5是由2和3转化而来的；从5中减去3，则也可以说5与3作用转化为2。皮亚杰的发生认识论为我们理解数学思维提供了一种比较合理、比较符合实际的心理学依据。

由于20世纪50年代以来对机器模拟人脑思维过程的研究以及人工智能机

的发展，“以至于人们可以谈论机器思维而不致遭到什么反对。”^①如果我们承认机器能够实现思维，那么，关于思维的一般定义，就应该从信息的角度来刻画。运用感知的信息和储存在大脑(或电脑)内的信息去解决问题的过程，即是思维。解决问题是多方面的，包括学习知识、形成概念、发现规律、作出决策、创作文艺、证明定理等。这样一来，思维的过程就是一个信息传递、接收和储存、加工的过程。为我们研究思维提供了一个全新的视角。

什么是数学思维呢？由于数学的对象是现实世界的空间形式与量的关系，因此，人们在探索、认识现实世界的空间形式与量的关系时在头脑中进行的思维活动，就是数学思维。而通过思维活动得到的数学知识，又成为一种数学思维形式，在人们进一步的数学思维中发挥作用，可以约简进一步思维的过程。比如，抽屉原则是1842年狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)首先提出并应用的一项数学成果，而后人在解题时，碰到类似的问题，就可以直接利用这一成果引导我们的思维，正像小朋友见到“任意13个人中，必有2人出生的月份是相同的”的问题时，马上就会说根据“抽屉原则”。在这个意义下，作为数学知识的“抽屉原则”又成为一种思维形式。正如一位数学家所说：“数学是一种思维形式，它牢固地扎根于人类智慧之中……数学表现了人类思维的本质和特征，并在任何国家与民族的文明中都会有所体现。因而在当今的意义下，任何一种完善的形式化思维，都不能忽视这种数学思维形式。”由于数学所研究的对象都是纯粹的量，所以，数学思维是客观世界的纯粹的本质的属性、相互关系及其内在规律性在人的头脑中概括的和间接的反映。显然，数学思维首先是思维，因而具有思维的一般特征。但数学思维又带有数学自身的特点，它不是事物一般的本质和事物之间一般的规律性的关系在人们头脑中的反映，而是以“纯粹的量”的形式来反映事物的本质和事物之间的规律性关系。正如彭加勒(Poincaré, 1854—1912)所说：“数学家研究的不是物体，而是物体之间的关系；因此，只要关系不变，这些物体被其他物体代换对他们来说是无关紧要的。在他们看来，内容是不重要的，他们感兴趣的只是形式。”^②数学思维较之一般思维具有更高的抽象概括性，以及更大的间接性，以至于数学成为一种牢固地扎根于人类智慧之中的“思维形式”。

1.1.2 数学思维的特点

现在我们说的数学思维，也就是数学家的思维，是一种理性的思维方式。

^① 控制论哲学问题译文集(第一辑)。北京：商务印书馆，1965，112。

^② 彭加勒著。科学的价值。李醒民译。北京：光明日报出版社，1988，21。

对数学思维的特点，见仁见智，每个数学家的意见都极具参考价值。如著名的数学家辛钦(Хинчин, 1894—1959)朴素而准确地指出数学思维的四个特点：

①数学思维的特点是推理的逻辑结构占绝对优势……数学思维方式的这一特点体现得这样充分，这是任何一门别的科学所没有的，这一特点包含许多有价值的东西。十分明显，它可以最大限度地注意思维过程的正确性，并保证不出错误；从另一方面说，思维者在每次析取时眼前能浮现存在着的全部可能性，并保证一个不漏地考虑到每一种可能性。

②……思路简洁。总是自觉地努力寻求导向目的的最简洁的逻辑途径，毫不留情地舍弃对于完美无缺的论证不是绝对必要的一切。

③……精确地分解论证过程。为此，在数学著作中广泛使用概念和判断编号这种简单的方法，在每段的前面标上一个专门符号，指明这一段是研究所有各种情况中的哪一种。

④符号精密准确。“每一个数学符号都有严格规定的含义：用另一个符号来替换它，或者把它放到另一位置上，通常总是要引起误解，有时甚至使原来给定的含义完全没有了。”^①

辛钦对数学思维特点的概括，尽管只侧重于形式与结果的描述，但终归揭示了数学的高度概括与抽象性是数学思维特点的基本根据。我国有的学者概括数学思维有“数学思维的概括性，数学思维的问题性，数学思维的相似性”三个特性。张莫宙、唐瑞芬、刘鸿坤合著的《数学教育学》中曾明确概括数学思维的特点：策略创造与逻辑演绎的结合。^②也有的教科书将数学思维的特征概括为：数学思维的高度抽象性；数学思维形式化的严谨性；数学思维表现的多样性。在《数学的思维方式》一书中表述数学思维的特性为：(1)数学思维较之其他思维具有更强的间接性和概括性；(2)数学思维具有独特的形式化的符号语言；(3)数学思维具有显著的美学特性；(4)数学思维具有独特的辩证性。总之，各家之说，五彩纷呈，角度不同。综合各家之说，数学思维的特点要包含数学的主要特点，但不能简单地等同于数学的“高度的抽象性、逻辑的严谨性、广泛的适用性”三个特点。一般可以认为，数学思维有如下的几个特点。

(1) 数学思维层层抽象与模式化

数学的抽象，先由原型抽象为模型，模型中的概念、运算、方法等又可成为进一步数学抽象的原型，此后可以层层概括，逐级抽象，形成完全相对独立

^① 弗利德曼. 中小学数学教学心理学原理. 陈心五译. 北京: 北京师范大学出版社, 1987, 46~471.

^② 张莫宙, 唐瑞芬, 刘鸿坤. 数学教育学. 南昌: 江西教育出版社, 1991(11), 14.

的脱离现实的量的概念结构或模式。从原型—模型—模式，数学取得了极度抽象的形式，形成了模式这种纯逻辑的结构。随着数学的发展，这种抽象程度仍在不断发展。对极度抽象的结构或模式，只要求不存在逻辑矛盾就可以了。以致许多数学家认为“数学是结构的科学”“数学是模式的科学”。正如怀特海(Whitehead, 1861—1947)所说：“极端的抽象是真正的武器，用以控制对具体事物的思维。这个近乎矛盾的说法，现已完全成立。”^①对于数学抽象的层次性，比如，有的学者认为数学抽象分为三个阶段，第一阶段：产生数的概念(使对象同一起来，撇开个体物的质的无限多样性)和创造数的符号，即数字。第二阶段：从算术过渡到代数，在代数中已经不使用个别的具体数字，而使用字母符号；同时其结果对具体数字来说也是可靠的。具体的数字对字母符号而言是特殊的东西。第三阶段：不仅是撇开符号的一切数字内容，而且根本撇开数学运算本身的量的内容，数学抽象的这种发展是从特殊向一般的运动。在这个意义上，数学思维经历着个别→特殊→一般的发展，这是一个日益更为抽象的历史过程。从运算角度来看，最初是数字的运算，后来发展为代数式的运算，再进一步抽象为代数系统的运算，如“集合”“向量”“矩阵”等的运算。随着运算对象的抽象，运算也更加抽象，经历着算术四则运算→代数运算→一般运算的层层概括，逐级抽象的思维发展过程。下面我们就以数学运算的发展为例，解说数学思维的层层抽象概括性。

算术中的四则运算是具体的数进行的运算。尽管每对具体数的运算形式、结果都不尽相同，但内中蕴涵着某种规律性，数的运算满足一定的运算律，如加法、乘法的交换律、结合律，乘法对加法的分配律，等等，这也就是通常所说的“数系通性”。此后，从算术过渡到代数，在代数学中已经不再就个别的数的运算来研究，而是以字母代表数，对一般的数、抽象的数的运算进行研究。用字母表示数，不仅可以很方便地表达具有普遍意义的运算律，而且可以用运算符号表达数之间的关系结构，也便于把字母表示的运算从数推广到其他各种量的运算，含字母的式子同样可以表达量的关系与结构。因此，字母表示法的实质就是舍去运算对象的个性，而把运算对象进行抽象化思维。

随着运算对象的抽象化，人们对什么是运算开始有了更一般的思索，原来不只数可运算，向量也可运算，行列式、矩阵均可运算。那么，什么是运算呢？我们还是从具体例子分析起，

如 $12+3=15$, $12\times 3=36$, $12-3=9$,

^① 斯蒂恩. 今日数学随笔十二篇. 马继芳译. 上海: 上海科学技术出版社, 1982(8), 6.