普通高等院校数学类规划教材配套用书

应用线性代数

学习指导

大连理工大学城市学院基础教学部　组编

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

普通高等院校数学类规划教材配套用书

应用线性代数
学习指导

大连理工大学城市学院基础教学部 组编

主编 曹铁川

编者 高桂英 刘怡娣 张 鹤

王淑娟 孙晓坤

大连理工大学出版社

DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

应用线性代数学习指导 / 大连理工大学城市学院基础教学部组编. — 大连 ：大连理工大学出版社，2011.7

ISBN 978-7-5611-6343-6

Ⅰ. ①应… Ⅱ. ①大… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 139619 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号　邮政编码:116023

发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn

大连理工印刷有限公司印刷　　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm　印张:4.75　字数:164 千字

2011 年 7 月第 1 版　　2011 年 7 月第 1 次印刷

责任编辑:王　伟　　责任校对:小　畢

封面设计:熔点创意

ISBN 978-7-5611-6343-6　　定　价:15.00 元

前　言

线性代数作为一门重要的数学基础课，在高等院校众多专业普遍开设. 由于这门课程概念多，概念之间关联紧密，定理抽象且环环紧扣，运算独特且与数的运算似是而非，证明方法严谨又不乏灵活多样，因而初学者往往吃不透，理不顺，对于一些计算题虽能形式地完成，却不解其意，对于证明题更是望而却步.

为了帮助初学者尽快入门，更好地完成这门课程的学习，我们编写了这本《应用线性代数学习指导》. 该书是大连理工大学城市学院组编的《应用线性代数》配套学习用书，分章编写，与教材保持同步. 每章包括以下四个版块：

内容提要　简练且不失详细地列出本章需要掌握的主要概念、定理、计算公式及相关结论，使学习者能全面清晰地了解本章概貌，把握要点.

释疑解惑　针对教学中某些难以理解或经常出错的地方，进行分析点拨，查找原因. 特别是对看起来似是而非、容易混淆的问题，进行释疑解惑.

例题解析　围绕着本课程的基本要求，选择一些概念性、综合性、启发性较强的题目，对其剖析探究，帮助学生开拓思路，总结经验，灵活运用所学知识，丰富解题经验和技巧.

习题选解　解答教材的课后习题，力求过程简明，思路清晰，尽量做到题型齐全，难易适度，从基本到综合，循序渐进，以帮助读者尽

快掌握解题方法，巩固所学内容.

本书由大连理工大学城市学院组织编写，曹铁川任主编并负责统稿. 参加编写的有高桂英、刘怡娣、张鹤、王淑娟和孙晓坤.

限于编者水平，书中疏漏与不足在所难免，恳请同行与读者不吝指正.

编　者

2011 年 7 月

目　录

第 1 章　行列式 /1

内容提要 /1　　释疑解惑 /3

例题解析 /7　　习题选解 /16

第 2 章　矩　阵 /24

内容提要 /24　　释疑解惑 /28

例题解析 /37　　习题选解 /47

第 3 章　n 维向量和线性方程组 /56

内容提要 /56　　释疑解惑 /59

例题解析 /66　　习题选解 /75

第 4 章　特征值、特征向量与二次型 /95

内容提要 /95　　释疑解惑 /98

例题解析 /104　　习题选解 /122

第1章　行列式

行列式是一种特定的算式，是线性代数中的一个重要概念.行列式在对矩阵和线性方程组等问题的研究中起着重要的作用.作为重要的数学工具之一，在数学的许多分支和工程技术中也有着广泛应用.

内容提要

1. 二阶和三阶行列式

由 2^2 个数 a,b,c,d 排成的两行、两列的式子 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，记作 D，其值为 $ad-bc$，即

$$D=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

由 3^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 排成三行、三列的式子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，它表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

2. n 阶行列式

设 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它是一个算式，其值为

当 $n=1$ 时，$D=|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$，

这里 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$ 分别表示元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 的代数余子式.

说明：当 $n=2$ 和 $n=3$ 时，用这种方法定义的二阶和三阶行列式，其结果与前面二阶、三阶行列式定义的结果是一致的.

特殊地，

对角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ & a_{22} & & & \\ & & a_{33} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

下三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

上三角行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$；

范德蒙行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$.

3. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等.

定理　n 阶行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应代数余子式乘积之和. 这一结论称为行列式按行(列)展开法则.

性质 2　互换行列式的任意两行(列)，行列式的值变号.

推论　若行列式的某两行(列)元素完全相同,则此行列式等于零.

性质 3　若行列式的某一行(列)的每个元素都乘以同一数 k,等于用数 k 乘以此行列式.

推论　若行列式的某一行(列)均含有公因子 k,则 k 可以提到行列式的外面.

推论　若行列式的某一行(列)的元素全为零,则此行列式等于零.

性质 4　若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则该行列式等于零.

性质 5　若行列式的某一行(列)的每个元素均为两项之和,则行列式可表示为两个同阶的行列式之和.

性质 6　若将行列式的某行(列)的每个元素乘以数 k 加到另一行(列)的对应元素上去,则行列式的值不变.

性质 7　行列式的某行(列)的每个元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和为零.

4. 克莱姆法则

若 n 元非齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则它有唯一解:

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad \cdots,\quad x_n=\frac{D_n}{D}.$$

其中 D_j 是把系数行列式 D 中的第 j 列的元素用常数项 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 代替后得到的 n 阶行列式.

若 n 元齐次线性方程组的系数行列式 $D\neq0$,则它只有零解.

推论　n 元齐次线性方程组只有零解(有非零解)的充分必要条件是系数行列式不等于零(等于零).

释疑解惑

【问 1-1】　计算四阶及四阶以上的行列式时,是否可以形式地使用"对角线法则"?

答　不可以.

例如 $$D_1=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&-1&2&0\\3&3&0&0\\4&0&5&0\end{vmatrix}\xlongequal{c(4)}1\times(-1)^{1+4}\begin{vmatrix}0&-1&2\\3&3&0\\4&0&5\end{vmatrix}=9,$$

若形式地使用"对角线法则",则得到

$$D_1=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&-1&2&0\\3&3&0&0\\4&0&5&0\end{vmatrix}\xlongequal{\text{形式地使用对角线法则}}-24$$

的错误结果.其原因何在?这是因为四阶及四阶以上的行列式如果沿用"对角线法则"来定义,它将失去二阶和三阶行列式的展开式中"每一项都是取自不同行不同列的元素的乘积"这一重要特征,比如:在下面的四阶行列式

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

中,乘积$(-1)a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$满足取自不同行不同列,但$a_{14}$,$a_{23}$,$a_{31}$及$a_{42}$却不在类似于三阶行列式展开式的对角线上,也可以说,n阶行列式的定义对于二、三阶行列式而言,恰好符合对角线法则,而对角线法则却不适用于四阶及四阶以上的行列式.

【问 1-2】 在什么情况下用定义计算行列式较方便?

答 只有当行列式的结构较简单或阶数不超过三时,才考虑用定义来计算.从理论上讲,任何一个行列式都可用定义来计算,但是,当一个行列式的阶数较高时,若用定义计算,则运算量可能会很大.例如,一个20阶的行列式,若用定义计算,需要作$19\times20!$次的乘法.因此,对于较高阶行列式,一般都是利用行列式的性质,将其化为易于计算的行列式.至于用什么方法简化行列式,采用什么途径来计算,要根据具体行列式的特点而定.常用的方法有:提公因子(数)法,按某行(列)展开,化作三角行列式;逐行相加(减),拆项法,以及递推公式法与数学归纳法等.

【问 1-3】 "两个相等的行列式,它们的阶数一定相等"的说法对吗?

答 不一定.这是因为,两个行列式相等指的是行列式的值相等,这与行列式的阶数无关.

例如,$D_1=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\5&4&3\end{vmatrix}=6$,$D_2=\begin{vmatrix}4&1\\2&2\end{vmatrix}=6$,这两个行列式相等,但阶数

不同.

【问 1-4】 当 n 阶行列式 D 中零元素的个数大于 $n(n-1)$ 时,是否可以断言此行列式 D 的值一定等于 0?

答 一定. n 阶行列式 D 中共有 n^2 个元素,若 n^2 个元素中等于 0 的元素的个数大于 $n(n-1)$,则不等于 0 的元素的个数就小于 $n^2-n(n-1)=n$ 个,即 n 阶行列式 D 中不等于 0 的元素最多有 $n-1$ 个. 从行列式的定义中,可以推得,行列式每一项都是取自不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 于是,每一项中至少有一个零因子,因此每一项都是 0,从而,D 的值也必然等于 0.

例如,在四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 中,共有 13 个零元素,其值显然为 0.

【问 1-5】 请介绍一下行列式中余子式与代数余子式有何特点? 有何联系?

答 元素 a_{ij} 的余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} 与 a_{ij} 所在的位置有关,与 a_{ij} 本身的取值无关,与 a_{ij} 所在行、列的其他元素也无关,只与 i 行、j 列以外的其他元素有关.

二者的联系是 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,且当 $i+j$ 为偶数时,二者相等;当 $i+j$ 为奇数时,二者互为相反数.

例如,行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ 中第一行元素 7 的余子式与代数余子式分别为

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-27, \quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=27, \quad M_{12}=-A_{12};$$

第三行元素 5 的余子式与代数余子式分别为

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=35, \quad A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=35, \quad M_{31}=A_{31}.$$

【问 1-6】 若行列式中每一列的元素之和均为零,是否可以断言该行列式

的值为零?

答 是.将行列式中除第一行外的各行元素均加到第一行的对应元素上,则由行列式中每一列的元素之和均为零可知,第一行元素将全部变为零,因此该行列式的值必为零.

【问 1-7】 如果一个 $n(n>1)$阶行列式中元素均为$+1$或-1,则行列式的值是否一定为偶数?

答 一定.根据行列式的性质,若将该行列式的任意一行加到另外一行对应元素上去,得到的行列式中一定有一行元素全为偶数(零也是偶数),则该行元素可提出公因子 2,剩下的行列式元素都是整数,其值也是整数,乘以 2 后必定是偶数,故行列式的值一定为偶数.

【问 1-8】 下面计算是否正确?若不正确,请加以改正.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -6.$$

答 不正确.

错误的原因是将行列式的按行(列)展开与代数余子式的计算方法混淆.在上面的计算中,将行列式按第一列展开,但没有乘以元素 4.正确算法应为

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 4\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = -24.$$

【问 1-9】 下面计算是否正确?若不正确,请加以改正.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times 2\times 3 = 6.$$

答 不正确.

行列式$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$不属于对角形行列式,因而不能直接使用对角线行列式的结论,正确算法应为将行列式按第一行展开,则有

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(0-6) = -6.$$

【问 1-10】 下面计算是否正确？若不正确，请加以改正.

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{2r_2-r_1} \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 32.$$

答 不正确.

在行列式的计算中，$2r_2-r_1$ 表示先将第二行元素扩大 2 倍，再将第一行的元素乘以 -1 加到第二行对应元素上. 行列式的值在这一过程中，将扩大了 2 倍，因此出现错误. 正确算法应为

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_1-2r_2]{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16.$$

【问 1-11】 下面计算是否正确？若不正确，请加以改正.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 24.$$

答 不正确.

在行列式的计算中，r_3-r_1 表示第三行减去第一行，即第一行的元素乘以 -1 再加到第三行上. 在这一过程中，第一行元素保持不变，改变的是第三行元素，因而正确算法应为

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_1]{r_2+2r_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -24.$$

例题解析

【例 1-1】 设有行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 9 & 7 & 5 \\ 10 & 9 & 5 & 9 \end{vmatrix}$，又已知 1 703，3 159，975，

10 959能被 13 整除，不计算行列式 D，证明 D 能被 13 整除.

分析 根据行列式 D 的各行元素的特征，在 D 中构造出元素 1 703，3 159，975，10 959.

证明
$$D=\begin{vmatrix}1&7&0&3\\3&1&5&9\\0&9&7&5\\10&9&5&9\end{vmatrix}\xlongequal[c_4+10c_3]{\substack{c_4+1\,000c_1\\c_4+100c_2}}\begin{vmatrix}1&7&0&1\,703\\3&1&5&3\,159\\0&9&7&975\\10&9&5&10\,959\end{vmatrix}.$$

又第四列元素 1 703，3 159，975，10 959 均能被 13 整除，故第四列元素含有公因子 13. 故行列式能被 13 整除.

【例 1-2】 已知四阶行列式 D 的第二行元素分别为 $-1,0,2,4$；第四行元素的余子式依次为 $2,4,a,4$，求 a.

分析 利用行列式某行元素与另外一行对应元素的代数余子式乘积之和为零这一性质.

解 由已知，$a_{21}=-1$，$a_{22}=0$，$a_{23}=2$，$a_{24}=4$，又 $A_{41}=-2$，$A_{42}=4$，$A_{43}=-a$，$A_{44}=4$，由行列式的性质得

$$D=(-1)\times(-2)+0\times4+2\times(-a)+4\times4=0,$$

所以

$$a=9.$$

【例 1-3】 已知 $D=\begin{vmatrix}1&2&-3&6\\4&2&1&7\\5&2&3&8\\-9&2&7&-2\end{vmatrix}$，试求 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$.

分析 根据代数余子式的特点，将 $A_{i3}(i=1,2,3,4)$转化为与其相等的另外一个行列式的代数余子式，再利用行列式的性质计算.

解法 1 把 $A_{13}+A_{23}+A_{33}+A_{43}$看做 $1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{43}$，这个值可以看做是行列式

$$D_1=\begin{vmatrix}1&2&1&6\\4&2&1&7\\5&2&1&8\\-9&2&1&-2\end{vmatrix}$$

的值.容易发现行列式 D_1 的第二列与第三列对应成比例,故 $D_1=0$.

解法 2　注意到行列式 D 的第二列元素均为 2,由行列式的性质可知,行列式某一列的元素与另外一列对应元素的代数余子式乘积之和等于零,因此有

$$2\cdot A_{13}+2\cdot A_{23}+2\cdot A_{33}+2\cdot A_{43}=0,$$

所以

$$1\cdot A_{13}+1\cdot A_{23}+1\cdot A_{33}+1\cdot A_{43}=0.$$

【例 1-4】　记函数 $f(x)=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&5&25\\1&x&x^2\end{vmatrix}$,证明至少存在一点 $\xi\in(2,5)$,使得 $f'(\xi)=0$.

分析　先求出 $f(x)$的表达式,再对其应用罗尔定理.

证明　因为

$$f(x)=\begin{vmatrix}1&2&4\\1&5&25\\1&x&x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&3&21\\0&x-2&x^2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&21\\x-2&x^2-4\end{vmatrix}=3(x^2-7x+10),$$

显然函数 $f(x)$在$[2,5]$上连续,在$(2,5)$内可导,且 $f(2)=f(5)=0$,故由罗尔定理可知,至少存在一点 $\xi\in(2,5)$,使得 $f'(\xi)=0$.

【例 1-5】　已知 $\begin{vmatrix}a_1+3b_1&b_1&2c_1\\a_2+3b_2&b_2&2c_2\\a_3+3b_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}=2$,计算 $D=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}$.

解　该行列式的第一列元素均可看成是两个元素之和,故行列式可以拆开.

$$\begin{vmatrix}a_1+3b_1&b_1&2c_1\\a_2+3b_2&b_2&2c_2\\a_3+3b_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1&b_1&2c_1\\a_2&b_2&2c_2\\a_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3b_1&b_1&2c_1\\3b_2&b_2&2c_2\\3b_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1&b_1&2c_1\\a_2&b_2&2c_2\\a_3&b_3&2c_3\end{vmatrix}=2D=2,$$

因此所求行列式值为

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=1.$$

【例 1-6】 将多项式 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}$ 用 ax^2+bx+c 形式表示出来.

解 根据行列式性质,将行列式按第三行展开,有

$$f(x)=1\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+x\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+x^2\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=8x^2+2x-20.$$

【例 1-7】 求 x,使得 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -x & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 3x & 0 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}$.

分析 分别求出两个行列式的表达式,再求解.

解 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -x & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}=3x,$$

又

$$\begin{vmatrix} 3x & 0 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix}=3x(x-1),$$

由已知条件可得

$$3x=3x(x-1),$$

所以

$$x_1=0,\quad x_2=2.$$

【例 1-8】 求方程 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \cdots & (n-1)^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix}=0$ 的实数

根.

解 由行列式定义知 $f(x)=0$ 为 $n-1$ 次方程，因而最多有 $n-1$ 个实根.

又当 x 分别取 $1,2,\cdots,n-1$ 时，行列式的前 $n-1$ 列中均有一列元素与第 n 列的元素对应相等，此时行列式值为零，故方程 $f(x)=0$ 共有 $n-1$ 个实根，它们分别为 $x=1,2,\cdots,n-1$.

【例 1-9】 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}$.

分析 注意到各列加到第一列后出现公因子.

解 将行列式第二列，第三列，…，第 n 列各元素均加到第一列的对应元素上去，提出公因子 $((n-1)x+a)$ 后，再将第一行各元素乘以 -1 后分别加到第二行，第三行，…，第 n 行的对应元素上去，即

$$
\begin{aligned}
D_n &= \begin{vmatrix} a & x & x & \cdots & x \\ x & a & x & \cdots & x \\ x & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} (n-1)x+a & x & x & \cdots & x \\ (n-1)x+a & a & x & \cdots & x \\ (n-1)x+a & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ (n-1)x+a & x & x & \cdots & a \end{vmatrix} \\
&= [(n-1)x+a]\begin{vmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 1 & a & x & \cdots & x \\ 1 & x & a & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x & x & \cdots & a \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$