

师专数学科函授教材

代 数

上 册

温州师专函授部编

师专数学科函授教材

代 数

上 册

温州师专函授部编

1979. 1

说 明

《代数》一书是我部受省教育厅委托编写的师专数学科函授教材。全书十三章，分三册。上册：集合与对应，实数体，代数式的恒等变换，代数方程。中册：不等式，二进制与逻辑代数初步，初等函数，复数体与一元 n 次方程。下册：行列式、线性方程组与矩阵初步，排列与组合，概率与统计初步，数列与极限，整数性质初步。

在编写过程中，我们注意到以下几点：（1）凡是《全日制十年制中学数学大纲》中规定的代数内容都有所提及，但尽量避免重复，并在理论上适当提高、加深，知识面也有所加宽。（2）尽可能以集合、对应等思想渗透、处理各章内容。在注意到科学性、系统性的同时，还注意知识归纳，使各章保持一定的独立性，以便选择学习。（3）叙述上力求通顺易懂。关键地方的推理、演算、论述比较详细。并配有例题、习题，以便自学。

本书也可作为教师进修班，短师班的教材（有些章节可以不学）。也可供中学教师教学中的参考。

因我们对《大纲》精神体会不深，时间匆促，人力有限，书中谬误和不妥之处定然不少，请大家批评指正。

省教育学院、温州地区教育局曾先后组织审稿。浙南印刷厂承印出书，谨此一并致谢。

本书由华山、黄根荣老师共同执笔。许令誉老师协助出书。

温州师专函授部

1979年1月

目 录

(上册)

第一章 集合与对应

一、集 合

§ 1、1 集合的有关概念..... (1)

1. 集合及其表示法(1) 2. 集合和集合的相等、包含关系(4)

§ 1、2 集合的运算..... (6)

1. 集合的并(6) 2. 集合的交(10) 3. 集合的补(14) 4. 集合的差(17)

§ 1、3 集合代数简介..... (19)

习题一(1)(21)

二、对 应

§ 1、4 对应, 单值对应..... (23)

1. 对应(23) 2. 单值对应(25)

§ 1、5 一一对应, 逆对应..... (27)

1. 一一对应(27) 2. 逆对应(28)

§ 1、6 变换.....	(30)
---------------	------

习题一-(2)(34)

第二章 实数体

一、有理数体

§ 2、1 数环和数体.....	(36)
------------------	------

§ 2、2 有理数集合的性质.....	(40)
---------------------	------

习题二(1)(47)

二、实数体

§ 2、3 实数概念.....	(48)
-----------------	------

1. 实数的引入(48) 2. 实数大小的比较(51)

3. 实数的近似值(52) 4. 实数和数轴(54)

§ 2、4 实数的运算和实数集合的性质.....	(56)
--------------------------	------

1. 实数的运算(56) 2. 实数集合的性质(58)

§ 2、5 可数集合和连续集合.....	(60)
----------------------	------

1. 集合的势(60) 2. 可数集合和连续集合(62)

习题二(2)(68)

三、近似计算

§ 2、6 近似数及其精确度.....	(69)
---------------------	------

1. 近似数(69) 2. 近似数的精确度(70)

§ 2、7 近似数的计算.....	(77)
-------------------	------

1. 近似数的加、减法(78) 2. 近似数的乘、除法(80) 3. 近似数的混合运算(81)
- § 2、8 预定精确度的近似计算..... (83)
- 习题二(3)(85)

第三章 代数式的恒等变换

一、整 式

- § 3、1 代数式基本概念..... (88)
- § 3、2 整式四则运算..... (91)
 1. 整式的加法和减法(91) 2. 整式的乘法(92) 3. 整式的除法(93)
- § 3、3 多项式的主要性质..... (99)
- § 3、4 多项式的因式分解..... (104)
 1. 一般概念(105) 2. 多项式的因式分解(106)
 - 习题三(1)(114)

二、分 式

- § 3、5 最高公因式和最低公倍式..... (116)
 1. 最高公因式及其求法(116) 2. 最低公倍式及其求法(117);
- § 3、6 分式的概念和四则运算..... (118)
 1. 分式概念(118) 2. 分式的四则运算(120)
- § 3、7 部分分式..... (124)

习题三(2)(129)

三、根 式

§ 3、8 根式的概念和 四 则运算..... (130)

1. 根式概念(130) 2. 根式的运算(132)

§ 3、9 有 理 化 因 式..... (135)

§ 3、10 幂 的 扩 充..... (138)

1. 正整数指数幂的性质(138) 2. 零指数幂
和负整数指数幂(139) 3. 分数指数幂
(141) 4. 有理数指数幂的运算(144)

5. 无理数指数幂(146)

习题三(3)(149)

第四章 代 数 方 程

一、方 程

§ 4、1 等 式 及 其 性 质..... (151)

§ 4、2 方 程 基 本 概 念..... (153)

§ 4、3 方 程 的 同 解 变 换..... (156)

§ 4、4 一 元 一 次 方 程 和 一 元 二 次 方 程..... (167)

1. 一元一次方程的求解和解的讨论(167)

2. 一元二次方程的求解和解的讨论(169)

§ 4、5 分 式 方 程 和 无 理 方 程..... (172)

1. 分式方程(172) 2. 无理方程(174)

习题四(1)(176)

二、方程组

§ 4、6 方程组基本概念和同解变换..... (179)

§ 4、7 二元一次方程组..... (185)

§ 4、8 二元二次方程组..... (188)

1. 第一类型二元二次方程组的解法和解的组数(188)
2. 第二类型二元二次方程组的解法和解的组数(189)
3. 特殊二元二次方程组的解法(192)
4. 分式方程组和无理方程(196)

习题四(2)(197)

第一章 集合与对应

“集合”与“对应”是数学中两个基本的概念，是研究数学问题的基础和工具。初等数学中的许多概念都是建筑在这两个概念之上的，“集合”与“对应”在高等数学中的地位更为显著，它的出现在相当程度上简化了数学语言的叙述。另外，在自动化系统的逻辑设计中应用极广的逻辑代数，也和集合的概念有很紧密的联系。

本章将介绍“集合”与“对应”的一些基本知识，这有利于更深刻地理解中学的有关数学概念，并为今后学习逻辑代数打下基础。

一 集 合

§ 1.1 集合的有关概念

1、集合及其表示法

“集合”的概念和“数”的概念一样，是数学中最原始的基本概念之一。它不能用已知更简单的一些概念来精确定义，其含义只能用它的同义语或一些实例来描述：具有某种共同特征的一类事物的全体，就称为一个**集合**（简称为**集**）。构成这个集合的每一个事物，就称为这个集合的**元素**（简称为**元**）。

例如，某个班级的全体同学就组成一个集合，该集合的元素就是这个班级的每个同学。比3小的正整数组成一个集合，该集合的元素是1，2。所有平行四边形也可以组成一

个集合，凡是平行四边形都是该集合的元素。半径为 r ，圆心在 O 点的圆的圆周可以看成是平面上和点 O 距离等于 r 的那些点组成的一个集合。

任何一个事物对于某一集合来说，或者属于该集合，或者不属于该集合，不能模棱两可。同一集合中的元素要无重复。例如比 3 小的正整数集合是由“1”，“2”两数组成，而不是“1”，“1”，“2”三个数或其他数组成。

习惯上把由数组成的集合称为**数集**，把由点组成的集合称为**点集**。

集合一般用大写字母 $A, B, C, X, Y, \dots$ 表示；元素一般用小写字母 $a, b, c, x, y, \dots$ 表示。

有两种不同的表示集合的方法。

其一是列举法。就是把集合中元素一一列举出来，写在 $\{\}$ 内，例如比 3 小的正整数集合可表示为

$$A = \{1, 2\}$$

如果集合元素有无穷多个，则可以连续地列举出一部分，但必须一看就明白。例如

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\},$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

可以看出， N 是全体自然数的集合， Z 是全体整数的集合。

其二是描述法，就是在括号 $\{\}$ 中先写出元素符号 a ，然后记一个分号“；”，在分号后用一句简明的话或一个式子描述出集合元素 a 的共同特征。例如比 3 小的正整数集合可表示为

$$A = \{a; a \text{ 是比 3 小的正整数}\}$$

由方程 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 的根组成的集合可表示为

$$X = \{x, x^2 - 4x + 3 = 0\},$$

等等。

有时还可简略，例如

$$A = \{\text{比 } 3 \text{ 小的正整数}\},$$

$$B = \{\text{平行四边形}\},$$

$$N = \{\text{自然数}\}.$$

上述两种方法各有所长，采用哪一种方法好，要根据具体问题确定。

根据集合中元素所具有的共同特征，可以判别任一对象是否属于该集合。例如，5 属于 N ， $\frac{1}{2}$ 不属于 N 。

一般地说，如果 a 是属于集合 A 的一个元素，就记作

$$a \in A \quad (\text{读：} a \text{ 属于 } A)$$

如果 b 是不属于 A 的一个元素，则记作

$$b \notin A \quad (\text{读：} b \text{ 不属于 } A)$$

例如： $5 \in N$

$$\frac{1}{2} \notin N.$$

由有限个元素组成的集合称为**有限集**。例如前面的 A 、 X 是有限集；由无限个元素组成的集合称为**无限集**。例如上述的 N 、 Z 。

在有限集中，仅含有一个元素的集合称为**单元素集**，例如一元一次方程 $ax = b$ ，当 $a \neq 0$ 时，其解集是单元素集

$$X = \left\{ \frac{b}{a} \right\}$$

为了研究的方便，人们引进两种特殊的集合。

没有元素的集合叫**空集合**，用字母 O 表示*。例如，某次测验大家都及格，那么这次测验不及格者的集合就是空集。又如， $X = \{x; x + 1 = 2 + x\} = O$ **。

由一切元素组成的集合叫**全集合**，用字母 I 表示。

显然，空集合与全集合都是唯一的，至于它们的作用，将在下面陆续谈到。

2、集合和集合的相等、包含关系。

定义 如果集合 A 和集合 B 的元素完全相同，那么就说这两集合**相等**，记作：

$$A=B \quad (\text{读：} A \text{ 等于 } B)$$

例如

$$\{\text{比 } 5 \text{ 小的质数}\} = \{x; x^2 - 5x + 6 = 0\},$$

$$\{\text{无理数}\} = \{\text{无限不循环小数}\}$$

$$\{\text{到 } A、B \text{ 两点距离相等的点}\} = \{\text{线段 } AB \text{ 的垂直平分线上的点}\}.$$

将集合记法中各元素次序改变，集合仍相等，如

$$\{a, b, c, d, \} = \{b, c, d, a\}.$$

定义 如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即若 $a \in A$ ，则必有 $a \in B$ ，那么就说集合 B **包含**集合 A ，记作

$$A \subseteq B \quad (\text{读：} B \text{ 包含 } A, \text{ 或 } A \text{ 被包含于 } B \text{ 中})$$

或

$$B \supseteq A$$

* 有的书上用 $\emptyset$ 表示。

** 注意 O 和 $\{0\}$ 是不同的，例如 $X = \{x; x + 1 = 1 - x\} = \{0\}$ ，它是仅含一个元素的单元集合。

此时称B是A的**母集**，A是B的**子集**。例如

$$\{\text{有理数}\} \subseteq \{\text{实数}\},$$

$$\{\text{矩形}\} \subseteq \{\text{平行四边形}\}$$

如用图形来表示两个集合之间的包含关系，就是两个圆相含（图1—1）。

显然，每个集合均包含本身，即

$$A \subset A$$

这是因为左边集合A的元素必然是右边集合A的元素，也就是说，子集可与母集相等。

如果A是B的子集，而B中至少有一个不属于A的元素，则称B**真包含**A，记作

$$A \subset B \quad (\text{读: } B \text{ 真包含 } A, \text{ 或 } A \text{ 被真包含于 } B \text{ 中})$$

或
$$B \supset A$$

此时称A是B的**真子集**。例如

$$\{\text{有理数}\} \subset \{\text{实数}\}$$

$$\{\text{矩形}\} \subset \{\text{平行四边形}\}$$

显然，任何集合A是全集合I的真子集，即

$$A \subset I$$

我们还规定空集合O是任何非空集合A的真子集。即

$$O \subset A$$

特别有
$$O \subset I$$

例1 指出 $A = \{1, 2, 3\}$ 的所有子集合。

答 A的子集是： $O, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, \}$
 $\{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$

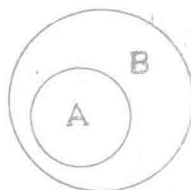


图 1—1

如果两个集合 A 、 B ，若有 $A \subset B, B \subset A$ ，则 $A = B$ 。这是因为 A 的每个元素都是 B 的元素，而 B 的每个元素也都是 A 的元素，因此 A 和 B 有相同的元素，即 $A = B$ 。这个性质告诉我们，若要证明两个集合相等，只要证明它们互相包含即可。

集合的相等、包含关系都有传递性，即

若 $A \subseteq B, B \subseteq C$ 。则 $A \subseteq C$ ；

若 $A = B, B = C$ 。则 $A = C$ 。

例如

$\{\text{自然数}\} \subset \{\text{整数}\} \subset \{\text{有理数}\} \subset \{\text{实数}\}$ ，

$\{\text{等边三角形}\} \subset \{\text{等腰三角形}\} \subset \{\text{三角形}\} \subset \{\text{多边形}\}$ 。

想一想：下面各对集合之间是什么关系：

$\{\text{代数式}\}$ 与 $\{\text{多项式}\}$ ；

$\{\text{合数}\}$ 与 $\{\text{大于2的偶数}\}$ ；

$\{\text{自然数}\}$ 与 $\{\text{质数}\}$ ；

$\{\text{等边三角形}\}$ 与 $\{\text{正三角形}\}$ ；

$\{\text{各种类型的计算工具}\}$ 与 $\{\text{电子计算机}\}$ 。

§ 1、2 集合的运算

我们知道，对于“数”可以进行运算，类似地，对于“集合”也可进行运算。在数学研究中，往往要求由几个集合的元素合并起来所组成的集合；有时要求由几个集合的公共元素所组成的集合；或者要求由不属于集合 A 的那些元素所组成的集合，这些都看作是集合间的运算。下面分别予以讨论。

1、集合的并

设集合

$$A = \{\text{正偶数}\}$$

$$B = \{\text{正奇数}\}$$

现将这两个集合的元素合并起来组成一个新集合，则这个新集合就是

$$N = \{\text{自然数}\}$$

显然， N 中任一元素（正奇数或正偶数）属于 A 或属于 B ，由此引入集合的并集定义：

定义 由集合 A 和集合 B 的全部元素合并起来所组成的集合叫作集合 A 和集合 B 的**并集**，记作：

$$A + B \quad (\text{读：} A \text{ 并 } B)$$

其中“+”为并运算的符号*。因此

$$A + B = \{x, x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

例 2 设 $A = \{\text{有理式}\}$ ， $B = \{\text{无理式}\}$ 。

$$\text{则 } A + B = \{\text{代数式}\}.$$

例 3 设 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ， $B = \{3, 4, 5\}$ 。

$$\text{则 } A + B = \{1, 2, 3, 4, 5\}^{**}.$$

例 4 设 $A = \{x, 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x, 1 \leq x \leq 3\}$

$$\text{则 } A + B = \{x, 0 \leq x \leq 3\}$$

例 5 设 $A = \{\text{平行四边形}\}$ ， $B = \{\text{四边形}\}$ 。

$$\text{则 } A + B = \{\text{四边形}\}$$

若用图形表示两集合的并集，就是如图 1 - 2 中两圆的

* 并运算符号也可用“ $\cup$ ”。

** 根据 § 1、1 中关于同一集合中元素不能重复的规定，对于 A 和 B 中的公共元素， $A + B$ 中只能取一个，因此，此例中 $A + B$ 不是 $\{1, 2, 3, 4, 3, 4, 5\}$ 。

阴影所示。其中(1)表示例2, (2)表示例3、4, (3)表示例5。

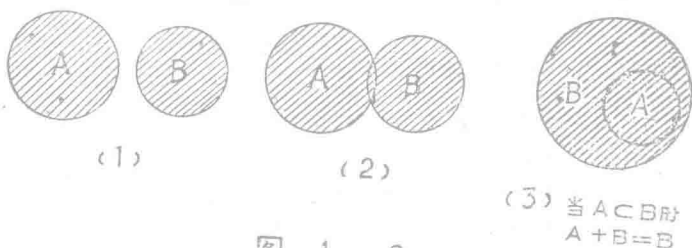


图 1—2

从图1—2可知,二集合求并,则二集合都是并集的子集,即:

$$A \subseteq A+B, B \subseteq A+B$$

例6 在集合的并运算 $A+B$ 中,试求 A, B 表示空集 O ,全集 I 时的结果。

解

若 $A=B=O$	则 $O+O=O$
若 $A=O, B=I$	则 $O+I=I$
若 $A=I, B=O$	则 $I+O=I$
若 $A=B=I$	则 $I+I=I$

根据空集、全集及并的定义,上述四个等式显然成立。

当求并的集合很多时,可用如下记号表示

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

两个有包含或相等关系的集合和第三个集合的并有如下性质:

(i) 如果 $A \subseteq B$, C 是任一集合, 那么 $A + C \subseteq B + C$;

(ii) 如果 $A = B$, C 是任一集合, 那么 $A + C = B + C$ 。

证明: (i) 设 $a \in A + C$

则 $a \in A$ 或 $a \in C$ (并的定义)

当 $a \in A$ 时, $\because A \subseteq B, \therefore a \in B$ (包含定义)

因而 $a \in B + C$ (并的定义)

当 $a \in C$ 时, 则也有 $a \in B + C$ (并的定义)

因此不论 $a \in A$ 或 $a \in C$, 都有 $a \in B + C$,

$\therefore A + C \subseteq B + C$ (包含定义)

(ii) 由 (i) 已证得 $A + C \subseteq B + C$, 同理可证得

$B + C \subseteq A + C$,

$\therefore A + C = B + C$ (证毕)

集合的并运算有如下运算律:

(i) **交换律** $A + B = B + A$

因为等号两边的集合都由属于 A 或属于 B 的元素所组成。

(ii) **结合律** $(A + B) + C = A + (B + C)$

因为等号两边的集合都由属于 A 或属于 B 或属于 C 的元素所组成, 显然, 它们都与 $A + B + C$ 相等, 即

$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C)$

同时根据交换律, 可以任意交换集合的次序, 如:

$A + B + C = A + C + B = B + C + A$

这种省略括号及交换集合次序的做法可推广到有限多个集合上去。

(iii) **等幂律** $A + A = A$

因为 $A + A$ 的元素与 A 的元素完全相同, 这个性质也可推广到有限多个集合上去。