师专数学科函授教材

代数

上册

温州师专函授部编

师专数学科函授教材

代　　　数

上 册

温 州 师 专 函 授 部 编

1979.1

说　明

《代数》一书是我部受省教育局委托编写的师专数学科函授教材。全书十三章，分三册。上册：集合与对应，实数体，代数式的恒等变换，代数方程。中册：不等式，二进制与逻辑代数初步，初等函数，复数体与一元n次方程。下册：行列式、线性方程组与矩阵初步，排列与组合，概率与统计初步，数列与极限，整数性质初步。

在编写过程中，我们注意到以下几点：（1）凡是《全日制十年制中学数学大纲》中规定的代数内容都有所提及，但尽量避免重复，并在理论上适当提高、加深，知识面也有所加宽。（2）尽可能以集合、对应等思想渗透、处理各章内容。在注意到科学性、系统性的同时，还注意知识归纳，使各章保持一定的独立性，以便选择学习。（3）叙述上力求通顺易懂。关键地方的推理、演算、论述比较详细。并配有例题、习题，以便自学。

本书也可作为教师进修班，短师班的教材（有些章节可以不学）。也可供中学教师教学中的参考。

因我们对《大纲》精神体会不深，时间匆促，人力有限，书中谬误和不妥之处定然不少，请大家批评指正。

省教育学院、温州地区教育局曾先后组织审稿。浙南印刷厂承印出书，谨此一并致谢。

本书由华山、黄根荣老师共同执笔。许令誉老师协助出书。

温州师专函授部

1979年1月

目　　录

（上册）

第一章　集合与对应

一、集　合

二、对　应

第二章　实　数　体

一、有理数体

二、实数体

三、近似计算

第三章 代数式的恒等变换

一、整 式

二、分 式

三、根 式

第四章 代数方程

一、方 程

二、方程组

第一章　集合与对应

“集合”与“对应”是数学中两个基本的概念，是研究数学问题的基础和工具。初等数学中的许多概念都是建筑在这两个概念之上的，“集合”与“对应”在高等数学中的地位更为显著，它的出现在相当程度上简化了数学语言的叙述。另外，在自动化系统的逻辑设计中应用极广的逻辑代数，也和集合的概念有很紧密的联系。

本章将介绍“集合”与“对应”的一些基本知识，这有利于更深刻地理解中学的有关数学概念，并为今后学习逻辑代数打下基础。

一　集　合

§1、1　集合的有关概念

1、集合及其表示法

“集合”的概念和“数”的概念一样，是数学中最原始的基本概念之一。它不能用已知更简单的一些概念来精确定义，其含义只能用它的同义语或一些实例来描述：具有某种共同特征的一类事物的全体，就称为一个**集合**（简称为**集**）。构成这个集合的每一个事物，就称为这个集合的**元素**（简称为**元**）。

例如，某个班级的全体同学就组成一个集合，该集合的元素就是这个班级的每个同学。比3小的正整数组成一个集合；该集合的元素是1，2。所有平行四边形也可以组成一

个集合，凡是平行四边形都是该集合的元素。半径为 r，圆心在o点的圆的圆周可以看成是平面上和点o距离等于 r的那些点组成的一个集合。

任何一个事物对于某一集合来说，或者属于该集合，或者不属于该集合，不能模棱两可。同一集合中的元素要无重复。例如比 3 小的正整数集合是由“1”，“2”两数组成，而不是“1”，“1”，“2”三个数或其他数组成。

习惯上把由数组成的集合称为**数集**，把由点组成的集合称为**点集**。

集合一般用大写字母A，B，C，X，Y，…表示，元素一般用小写字母a，b，c，x，y，…表示。

有两种不同的表示集合的方法。

其一是列举法。就是把集合中元素一一列举出来，写在{}内，例如比 3 小的正整数集合可表示为

$$A=\{1,\ 2\}$$

如果集合元素有无穷多个，则可以连续地列举出一部分，但必须一看就明白。例如

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n,\ \cdots\},$$

$$Z=\{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}。$$

可以看出，N 是全体自然数的集合，Z 是全体整数的集合。

其二是描述法，就是在括号{}中先写出元素符号 a，然后记一个分号“；”，在分号后用一句简明的话或一个式子描述出集合元素 a的共同特征。例如比 3 小的正整数集合可表示为

$$A=\{a;\ a\text{是比 3 小的正整数}\}$$

由方程$x^2-4x+3=0$的根组成的集合可表示为

$$X=\{x;\ x^2-4x+3=0\},$$

等等。

有时还可简略，例如

A＝{比 3 小的正整数}，

B＝{平行四边形}，

N＝{自然数}。

上述两种方法各有所长，采用哪一种方法好，要根据具体问题确定。

根据集合中元素所具有的共同特征，可以判别任一对象是否属于该集合。例如，5 属于 N，$\frac{1}{2}$不属于N。

一般地说，如果a是属于集合A 的一个元素，就记作

$a\in A$　　　　（读：a属于A）

如果b是不属于A的一个元素，则记作

$b\overline{\in} A$　　　　（读：b不属于A）

例如：$5\in N$

$\frac{1}{2}\overline{\in}N$。

由有限个元素组成的集合称为**有限集**。例如前面的 A、X是有限集，由无限个元素组成的集合称为 **无限集**。例如上述的N，Z。

在有限集中，仅含有一个元素的集合称为**单元素集**，例如一元一次方程$ax=b$，当$a\neq 0$时，其解集是单元素集

$$X=\left\{\frac{b}{a}\right\}$$

为了研究的方便，人们引进两种特殊的集合。

没有元素的集合叫**空集合**，用字母O表示*。例如，某次测验大家都及格，那么这次测验不及格者的集合就是空集。又如，X={x；x+1=2+x}=O**。

由一切元素组成的集合叫**全集合**，用字母I表示。

显然，空集合与全集合都是唯一的，至于它们的作用，将在下面陆续谈到。

2、集合和集合的相等、包含关系。

定义 如果集合A和集合B的元素完全相同，那么就说这两集合**相等**，记作：

$$A=B \quad （读：A等于B）$$

例如

{比5小的质数}={x；$x^2-5x+6=0$}，

{无理数}={无限不循环小数}

{到A、B两点距离相等的点}={线段AB的垂直平分线上的点}。

将集合记法中各元素次序改变，集合仍相等，如

{a，b，c，d，}={b，c，d，a}。

定义 如果集合A的每一个元素都是集合B的元素，即若$a\in A$，则必有$a\in B$，那么就说集合B**包含**集合A，记作

$$A\subseteq B \quad （读：B包含A，或A被包含于B中）$$

或 $$B\supseteq A$$

---

* 有的书上用∅表示。

** 注意O和{0}是不同的，例如X={x；x+1=1-x}={0}，它是仅含一个元素的单元集合。

此时称B是A的**母集**，A是B的**子集**。例如

$$\{有理数\} \subseteq \{实数\},$$

$$\{矩形\} \subseteq \{平行四边形\}$$

如用图形来表示两个集合之间的包含关系，就是两个圆相含（图1—1）。

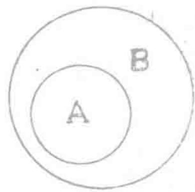

图 1—1

显然，每个集合均包含本身，即

$$A \subset A$$

这是因为左边集合A的元素必然是右边集合A的元素，也就是说，子集可与母集相等。

如果A是B的子集，而B中至少有一个不属于A的元素，则称B**真包含**A，记作

$$A \subset B \quad (读：B真包含A，或A被真包含于B中)$$

或 $\qquad B \supset A$

此时称A是B的**真子集**。例如

$$\{有理数\} \subset \{实数\}$$

$$\{矩形\} \subset \{平行四边形\}$$

显然，任何集合A是全集合I的真子集，即

$$A \subset I$$

我们还规定空集合O是任何非空集合A的真子集。即

$$O \subset A$$

特别有 $\qquad O \subset I$

例1 指出A＝{1，2，3}的所有子集合。

答 A的子集是：O，{1}，{2}，{3}，{1，2，}{1，3}，{2，3}，{1，2，3}

如果两个集合A、B，若有$A\subset B$，$B\subset A$，则$A=B$。这是因为A的每个元素都是B的元素，而B的每个元素也都是A的元素，因此A和B有相同的元素，即$A=B$。这个性质告诉我们，若要证明两个集合相等，只要证明它们互相包含即可。

集合的相等、包含关系都有传递性，即

若$A\subseteq B$、$B\subseteq C$。则$A\subseteq C$；

若$A=B$、$B=C$。则$A=C$。

例如

{自然数}$\subset${整数}$\subset${有理数}$\subset${实数}，

{等边三角形}$\subset${等腰三角形}$\subset${三角形}$\subset${多边形}。

想一想：下面各对集合之间是什么关系：

{代数式}与{多项式}；

{合数}与{大于2的偶数}；

{自然数}与{质数}；

{等边三角形}与{正三角形}；

{各种类型的计算工具}与{电子计算机}。

§1、2 集合的运算

我们知道，对于“数”可以进行运算，类似地，对于“集合”也可进行运算。在数学研究中，往往要求由几个集合的元素合并起来所组成的集合；有时要求由几个集合的公共元素所组成的集合；或者要求由不属于集合A的那些元素所组成的集合，这些都看作是集合间的运算。下面分别予以讨论。

1、集合的并

设集合

$A=\{$正偶数$\}$

$B=\{$正奇数$\}$

现将这两个集合的元素合并起来组成一个新集合，则这个新集合就是

$N=\{$自然数$\}$

显然，N中任一元素（正奇数或正偶数）属于 A或属于B，由此引入集合的并集定义：

定义 由集合A和集合B 的全部元素合并起来所组成的集合叫作集合A和集合B的**并集**，记作：

$A+B$ （读：A并B）

其中“+”为并运算的符号 *。因此

$A+B=\{x;\ x\in A$或$x\in B\}$

例 2 设$A=\{$有理式$\}$，$B=\{$无理式$\}$。

则$A+B=\{$代数式$\}$。

例 3 设$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{3, 4, 5\}$。

则$A+B=\{1, 2, 3, 4, 5\}$ * *。

例 4 设$A=\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x;\ 1\leqslant x\leqslant 3\}$

则$A+B=\{x;\ 0\leqslant x\leqslant 3\}$

例 5 设$A=\{$平行四边形$\}$，$B=\{$四边形$\}$。

则$A+B=\{$四边形$\}$

若用图形表示两集合的并集，就是如图 1 - 2 中两圆的

---

* 并运算符号也可用“$\bigcup$”。

* * 根据 § 1、1 中关于同一集合中元素不能重复的规定，对于A和B中的公共元素，A+B中只能取一个，因此，此例中A+B不是$\{1, 2, 3, 4, 3, 4, 5\}$。

阴影所示。其中（1）表示例2，（2）表示例3、4，（3）表示例5。

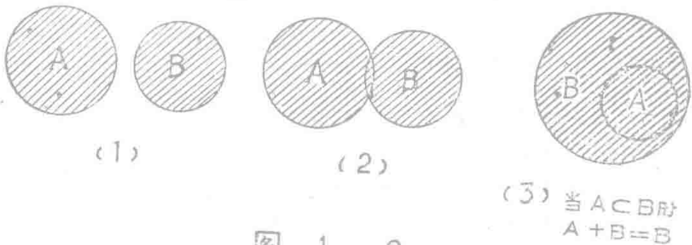

图 1—2

从图1—2可知，二集合求并，则二集合都是并集的子集，即：

$$A\subseteq A+B,\ B\subseteq A+B$$

例6 在集合的并运算A+B中，试求A、B表示空集O，全集I时的结果。

解 若$A=B=O$ 则$O+O=O$

若$A=O$，$B=I$ 则$O+I=I$

若$A=I$，$B=O$ 则$I+O=I$

若$A=B=I$ 则$I+I=I$

根据空集、全集及并的定义，上述四个等式显然成立。

当求并的集合很多时，可用如下记号表示

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

两个有包含或相等关系的集合和第三个集合的并有如下性质：

(i) 如果$A \subseteq B$，C是任一集合，那么 $A+C \subseteq B+C$；

(ii) 如果$A=B$，C是任一集合，那么 $A+C=B+C$。

证明： (i) 设$a \in A+C$

则$a \in A$或$a \in C$ （并的定义）

当$a \in A$时，$\because A \in B$，$\therefore a \in B$ （包含定义）

因而 $a \in B+C$ （并的定义）

当$a \in C$时，则也有 $a \in B+C$ （并的定义）

因此不论$a \in A$或$a \in C$，都有$a \in B+C$，

$\therefore \quad A+C \subseteq B+C$ （包含定义）

(ii) 由 (i) 已证得$A+C \subseteq B+C$，同理可证得

$B+C \subseteq A+C$，

$\therefore A+C=B+C$ （证毕）

集合的并运算有如下运算律：

(i) **交换律** $A+B=B+A$

因为等号两边的集合都由属于A或属于B的元素所组成。

(ii) **结合律** $(A+B)+C=A+(B+C)$

因为等号两边的集合都由属于A或属于B或属于C的元素所组成，显然，它们都与$A+B+C$相等，即

$$A+B+C=(A+B)+C=A+(B+C)$$

同时根据交换律，可以任意交换集合的次序，如：

$$A+B+C=A+C+B=B+C+A$$

这种省略括号及交换集合次序的做法可推广到有限多个集合上去。

(iii) **等幂律** $A+A=A$

因为$A+A$的元素与A的元素完全相同，这个性质也可推广到有限多个集合上去。