中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座2010

席南华　主编

科学出版社

中国科学院数学与系统科学研究院
中国科学院华罗庚数学重点实验室

数学所讲座 2010

席南华　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

中国科学院数学研究所一批中青年学者发起组织了数学所讲座，介绍现代数学的重要内容及其思想、方法，旨在开阔视野，增进交流，提高数学修养。本书根据 2010 年八个讲座的讲稿整理而成，内容涉及数与形的关系、数和形的认识、分析数学、数理逻辑、表示论、数学物理等。

本书可供数学专业的高年级本科生、研究生、教师和科研人员阅读参考，也可作为数学爱好者提高数学修养的学习读物。

图书在版编目(CIP)数据

数学所讲座 2010/席南华主编. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-033961-4

I. ①数… II. ①席… III. ①数学－普及读物 IV. ①O1－49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012) 第 063219 号

责任编辑：赵彦超／责任校对：宋玲玲
责任印制：钱玉芬／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 5 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2012 年 5 月第一次印刷 印张：11 3/4
字数：220 000

定价：39.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序

学术交流对促进研究工作、培养人才有着十分重要的作用，尤其对以学者个人思维为主要研究方式的数学研究，作用更显突出。国际上，学术水平很高、人才辈出的研究机构与大学，也总是学术交流活动 (Seminar，Colloquium，Workshop) 十分活跃的地方。

国内现代科学的发展已有百年历史，学术交流也伴随着产生和发展。近三十多年改革开放的进程，大大加速了学术交流与科学的发展。从数学学科来说，许多研究机构与大学涉及专门领域的讲座或专题讨论班(Seminar) 一般进行得比较好，对参加者尤其是青年学者帮助较大，从而参加者的积极性也比较高。然而综合性的讨论班 (Colloquium) 情况就有显著的不同，听众常常感到完全听不懂，没有什么收获，不感兴趣。综合讨论班进行得不理想，原因可能是多方面的，例如，从大学到研究生阶段，基础就打得比较专门与单一；研究工作长期局限于自己的专业领域，对其他方面缺少了解与兴趣；演讲人讲得过于专业，没有深入浅出的本领；听讲人有实用主义的观点，如果演讲内容与自己的研究工作没有联系，报告对自己没有直接帮助，就对演讲不感兴趣，如此等等。长期下去，我们仅仅熟悉自己的研究领域，对数学的全貌与日新月异的发展缺乏了解。不同的领域之间，相当隔膜，甚至缺乏共同的语言。

这些情况，与出高质量的研究成果和高水平人才的目标是难以符合的，也难以形成国际上有吸引力与影响力的数学研究中心。为此，中国科学院数学研究所席南华院士与一批出色的中青年学者发起并组织了数学所讲座，正是一种适合我国当前情况的综合讨论班。进行了近两年，效果是很好的。演讲人虽然都是各领域的专家，却做了认真与精心的准备，将该领域的主要思想、成果、方法，用深入浅出、通俗易懂的方式介绍给大家。听众从白发苍苍的老教授到许多中青年学者以及广大的博士后、研究生，都十分踊跃参加，普遍感到开拓了视野，增进了交流，使学术气氛更为浓郁。

现在，演讲的学者花费了许多时间与精力，将演讲正式整理成文，由科学出版社出版，这是对我国数学发展很有意义的工作。认真阅读这些文章，将使我们对数学的有关领域有扼要的了解，对数学里的“真”与“美”有更多的感悟，提高数学修养，促进数学研究与人才培养工作。

杨　乐

2011 年 12 月

前　言

现代数学分支浩繁，尽管我们从事数学研究多年，对某个专门的方向有深切的了解，但感到对数学整体的认识还很欠缺，对全局的发展更是了解得不够。这种状况应该想法改变。作为举措之一，中国科学院数学研究所自 2010 年起组织了数学所讲座，介绍现代数学的重要内容及其思想、方法和影响，旨在扩展科研人员和研究生的视野，提高数学修养，以及加强相互交流，增强学术气氛。

讲座取得了良好的效果，大家感到从中获益很多。这让人觉得把每年的报告整理成文，让更多的人了解这些报告，是一件有意义的工作。本书的文章系根据 2010 年数学所讲座的八个报告整理而成，按报告的时间顺序编排。在整理过程中我们力求文章易读、流畅、平易近人、取舍得当。文章中数学表述的准确是需要的，但对严格性的追求适度，不以牺牲易读性和流畅为代价。是否做到了这几个方面需要读者来评判。

文章的选题，也就是报告的主题，有数与形的关系、数和形的认识、分析数学、数理逻辑、表示论、数学物理等。内容的选取反映了作者对数学的认识和偏好，但有一点是共同的，它们都是主流数学，有其深刻性。如果这些文章能对读者在认识现代数学上有益处，那会很令作者欣慰的。

编　者

2011 年 12 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

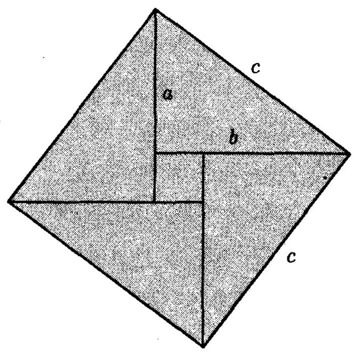
1 数与形——一个说不尽的话题

葛力明

1.1 引　　言

作为人类纯精神劳动产物的数学，是衡量人类智慧的一把尺子。数学不仅是科学的语言，是智慧生命交流的手段，还是我们用来了解世界、分析世界的工具。虽然不同的民族有不同的语言，但我们的“科学语言”—— 数学是相通的。正是有赖于这种由符号和图形构筑的抽象语言，复杂的思想和纷繁的逻辑才得以更加清晰地被表述并流传下来，这其中比较典型的例子是我国古代数学家赵爽为早期发现的勾股定理创制的一幅“勾股圆方图”，用形数结合的方法给出了勾股定理的详细证明。

符号解释：



$$\begin{aligned}
\text{正方形面积} &= c^2.\\
\text{小正方形面积} &= (b-a)^2\\
&= b^2 - 2ab + a^2.\\
\text{三角形面积} &= \frac{1}{2}ab.\\
\text{正方形面积} &= 4\times\text{三角形面积}\\
&\quad +\text{小正方形面积}.\\
c^2 &= b^2 + a^2.
\end{aligned}$$

多年以后，毕达哥拉斯重新发现了中国的勾股定理，受该定理的启发，他和他的学派发现了 $\sqrt{2}$ (即边长为 1 的正方形的对角线的长度)，并证明了 $\sqrt{2}$ 是无理数。这一证明和赵爽的勾股定理的证明一样简洁而深刻，是数学中思辨及逻辑推理的起源。

数学的理论起源于人们对自然数 1，2，3 等抽象符号及其运算法则所引发的逻辑思考。若用 $\mathbb{N}$ 表示全体自然数构成的集合，其上的排序过程就自然地诱导了 $\mathbb{N}$ 上的“加法”运算。之后，人们从实际需要出发，又引入了减法、乘法和除法等

运算，并逐步将自然数扩充到了有理数、实数、复数等。当然，数系的每一次扩充都经过了一个漫长的过程，而这其中往往夹杂了以几何观点对数字的重新审视(正如 $\sqrt{2}$ 的发现一样)，此中缘由大概也是人们总是对看得见摸得着的东西 —— 图形更加偏爱吧。数与形的第一次系统结合是通过笛卡儿坐标系建立起来的。笛卡儿把点和数对应起来，数系则与线或平面相对应，其中直线对应实数系，平面代表复数系。甚至对于一般的函数 $y=f(x)$，我们都可以通过图形来更为直观地了解其性态，如何处增加，何处减少，何处达到极大值、极小值等 (见图 1)。从此以后，数与形再也没有分开过，它们的结合贯穿了数学发展的全过程。

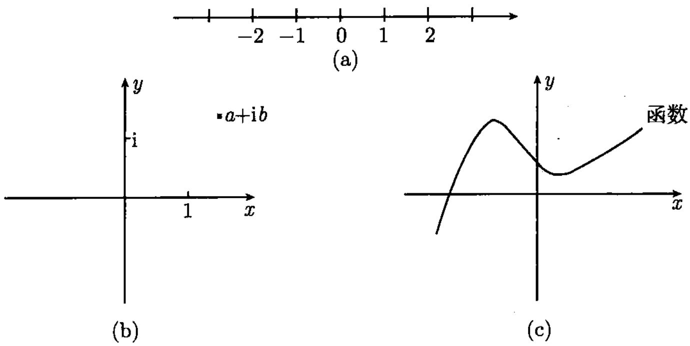


图 1　可将数字和函数在直角坐标系中表现为点和曲线

数学因其抽象和严格，所以需要特殊的表达和演绎方式，集合论和公理化系统也就成为当今人们普遍接受的一种数学表达。很多数学结构的产生完全源于数学家们的喜好和兴趣，或是对数学自身“美”的追求。数学理论的大部分内容，都是人类于近四百年中，在对一些类如 Fermat 大定理、哥德巴赫猜想等简单问题的好奇心的驱使下发明或发现的。某些问题的答案是在问题提出多年以后，人们运用了很多现代数学工具和各数学分支的深刻联系而获得的。这种联系就是“数”与“形”的有机结合，即如何在代数结构中看到几何，在几何结构中寻找代数不变量，而分析正是代数和几何之间的一座桥梁。

1.2　整数和圆周

自然数是数学中最简单也是最核心的研究对象。自然数有两种运算：加法和乘法。自然数带加法运算的结构较为简单，减法运算在自然数中不自封，要使减法运算封闭，我们把自然数扩充到整数，记为 $\mathbb{Z}$。整数 $\mathbb{Z}$ 在加法运算下构成一个交换群，我们将通过两种不同的观点来得到这个群对应的几何结构。

首先，直观上我们要用图形来描述整数，一定离不开一条实数轴 (我们把实

数全体记为 $\mathbb{R}$)，然后把数 $0, 1, -1$ 等用点等距地标在实轴上 (见图 1(a))。和整数一样，实数 $\mathbb{R}$ 上也有加法和乘法运算，$\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{R}$ 的加法子群诱导了实数上的一个等价关系：两个数等价当且仅当它们的差是整数。由此等价关系得到的商空间 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 可以自然地与单位圆周 S^1 对应起来，在数学中一个子结构和一个商结构合起来就是一个正合列：

$$\mathbb{Z} \;\rightarrow\; \mathbb{R} \;\rightarrow\; \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1.$$

因此，通过用 $\mathbb{R}$ 的一个过渡，我们可以将 S^1 视为整数加群 $\mathbb{Z}$ 的形。

其次，从表示论的角度来看，上述对应关系是很自然的。表示可看作抽象结构的具体实现，整数加群 $\mathbb{Z}$ 的不可约表示 (即 $\mathbb{Z}$ 的特征) 都是一维的，它们也自然地构成一个群，我们称之为 $\mathbb{Z}$ 的对偶群，记为 $\hat{\mathbb{Z}}$。通过如下对应关系，我们可以将对偶群 $\hat{\mathbb{Z}}$ 与 (复平面 $\mathbb{C}$ 上的) 单位圆周对应起来：

$$\lambda \in S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \longleftrightarrow \phi_\lambda \in \hat{\mathbb{Z}}, \quad \phi_\lambda(n) = \lambda^n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

同时，圆周 S^1(在复数的乘法运算下) 也是交换群，它的群对偶就是整数 (加法) 群。所以，整数虽是由无数个点构成的离散系统，但它却能跟圆周这个紧的连通空间自然地对应起来。并且我们将看到，这种对应关系在 (它们对应的) 代数意义下就是同构关系。

那么更一般代数结构的形又是什么呢？由代数几何知道，许多交换代数都有自身的几何结构。譬如，n 个变元的实系数多项式环 $\mathbb{R}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 的形就是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$；n 个变元的复系数多项式环 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ 对应的形就是 n 维复 (酉) 空间 $\mathbb{C}^n$。事实上，这些代数的极大理想空间可以看作它们的对偶，它们通常是一个拓扑空间或是一个流形，因此我们可以用对偶的语言将它们的形描述出来。但对于更一般的非交换代数结构又怎么办呢？此时，就需要借助分析理论来搭建数和形的桥梁。下面我们将用先前提到的例子来说明分析的桥梁作用。

图 2 是整数加群 $\mathbb{Z}$ 及其对偶群 S^1 自然导出的对应关系：

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{Z} \subset & \mathbb{C}\mathbb{Z} & \subset & l^1(\mathbb{Z}) & \subset & C^*(\mathbb{Z}) & \subset & L(\mathbb{Z}) & \subset & l^2(\mathbb{Z}) \\
 & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| \\
S^1 \subset & \mathbb{C}[z]_{S^1} & \subset & R(S^1)^3 & \subset & C(S^1) & \subset & L^\infty(S^1) & \subset & L^2(S^1) \\
\text{群} & \text{多项式代数} & & \text{Banach 代数} & & \text{群 } C^* \text{ 代数} & & \text{群 von Neumann 代数} & & \text{Hilbert 空间}
\end{array}$$

图 2

第一行是由群 $\mathbb{Z}$ 导出的代数，第二行是与几何对象 S^1 相关的函数代数 (其中 $R(S^1)$ 是 S^1 上 Fourier 系数绝对可和的函数全体，其他符号都是常用的)。两行之间的同构由 Fourier 变换诱导，并给出了从 $L^2(S^1)$ 到 $l^2(\mathbb{Z})$ 的等距同构 (即酉变

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

换)。可见，在此意义下，代数与几何的确是统一在一起的。所以，代数中蕴涵着关于拓扑和几何结构的信息，例如，$C(S^1)$ 的对偶 (即 $C(S^1)$ 的极大理想空间) 就是单位圆周。而通过上述对应，我们就可以得到许多如 $R(S^1)^* = L^\infty(S^1)$ 这样的对偶关系，还有更一般的 l^p(或 L^p) 和 $l^q\left(\text{或 } L^q\text{，这里 } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ 的对偶关系，这些都是分析的内容，我们在这里就不讨论了。通过这种对偶关系，在一种情形下是不可知的，在相应的对偶中就可能容易把握。

上面的图 1 中包含了许多数学思想，也是数学问题的源泉。最近我们还发现了一个有趣的现象，问题来源于 S^1 上函数和其 Fourier 系数的关系。函数和其 Fourier 系数的支撑集的相关性，有时也称为测不准原理。一般来说，判断两个函数是否相等，我们要检验它们几乎处处的值是否一样，或者看它们的 Fourier 系数是否完全一样。如果我们知道它们某些地方相等，而它们的 Fourier 系数也只知道部分相等，我们能否判断两函数是否一样？由图 1 我们知道，平方可积函数的 Fourier 系数是整数群上的平方可和序列，而整数群上存在平移不变的概率测度，所以我们可以用该测度来衡量整数子集的相对大小(比如奇数或偶数全体的测度为 $\frac{1}{2}$)。容易验证，两平方可积函数如果在 S^1 的一半 (如上半平面内的圆弧) 上相同，并且它们的 Fourier 系数在所有奇数上一样，则两函数几乎处处相等。有意思的是上面这种一半加一半的组合不能减少，即 S^1 上的一半和所有奇数的组合不能更少。但还有没有其他组合使得它们在各自的空间中的测度任意小？我们证明存在整数上的一个零测度集 X，两函数只要在某点 (如 S^1 上幅角为零的点) 的任意小的邻域内一样，而它们的 Fourier 系数在 X 上的值一样，则两函数相等。我们目前只能证明 X 的存在性，还没有具体的构造，我们相信这样的 X 在信号处理或解密中会有广泛的应用前景。

圆周上还有其他很有意思的分析。由于单位圆周是由实数商掉整数得到的，由加法诱导的平移：$x \to x+t$ 给出了 $L^2(S^1)$ 上的一个单参数 (等距) 变换群 $\{U_t\}:((U_t\xi)(x)=\xi(x+t), \xi\in L^2(S^1)$。任意连续的单参数变换群都由它的“极小生成元”决定，这可以通过如下 (在原点) 求导得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(U_t\xi)|_{t=0}(x) &= \lim_{t\to 0}\frac{(U_t\xi)(x)-(U_0\xi)(x)}{t}\\ &= \lim_{t\to 0}\frac{\xi(x+t)-\xi(x)}{t} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}(x).\end{aligned}$$

我们得到了 $\{U_t\}$ 的极小生成元为微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。通过计算该微分算子的特征根(或谱)$sp\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=2\pi\mathrm{i}\mathbb{Z}$，又自然地得到整数加群 $\mathbb{Z}$。

由此可见，从整数加群出发，利用平移变换得到了微分结构，然后再由该微分结构得到了原来的加法群结构。

1.3 自 然 数

现代数学的许多分支都是研究图 2 的推广：把整数群换成另一个群或把 S^1 替换成另一拓扑空间。类比于上述过程，我们讨论自然数 $\mathbb{N}$ 所对应的几何结构，并得到如下对应：

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathbb{C}\mathbb{N} & \subset & l^1(\mathbb{N}) & \subset & B(\mathbb{N}) & \subset & L(\mathbb{N}) & \subset & l^2(\mathbb{N}) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert & & \wr\Vert \\
\mathbb{C}[z]|_{\mathbb{D}} & \subset & H^1(\mathbb{D}) & \subset & H_c(\mathbb{D}) & \subset & H^\infty(\mathbb{D}) & \subset & H^2(\mathbb{D})
\end{array}$$

这里我们用 $\mathbb{D}$ 记复平面上的闭单位圆盘。此时的函数为什么不再是定义在单位圆周上，而扩充定义到了单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上呢？这是因为通过 Fourier 变换，$\mathbb{N}$ 导出的代数结构对应了 $\mathbb{D}$ 内的解析函数空间，也叫圆盘代数。因此，$\mathbb{N}$ 作为加法半群，其对应的形或几何结构就是单位圆盘。可见，$\mathbb{Z}$ 作为加法群的形状是一维的，是个实空间；$\mathbb{N}$ 作为加法半群的形状是二维的，是个复空间。

自然数 $\mathbb{N}$(不含 0) 还是一个乘法半群，记为 $\mathbb{N}^* = (\mathbb{N}, \times)$。前面已经看到无论是自然数还是整数，作为加法半群或加法群，它们的形或几何结构研究得都很透彻，那么 $\mathbb{N}^*$ 所对应的形或几何结构又是什么呢？

法国的 Bourbaki 学派还是从群的角度来研究自然数的乘法结构，他们发展了一套 Adéle 理论。众所周知，带加法结构的自然数由“1”生成，而乘法半群 $(\mathbb{N}, *)$ 由所有素数生成。如果仅仅根据 Grothendieck 的方法将自然数乘法半群扩充为群 $\mathbb{Q}_+^*$(正有理数群)，则素数的信息就消失了。为了重新找回这些失去的信息，我们将 $\mathbb{Q}_+^*$ 扩充到所有有理数 $\mathbb{Q}$，再局部化 (即在 p-adic 范数下的完备化) 得到 $\mathbb{Q}_p$，即所谓的“p-adic 数”。为得到所有素数的整体信息，就需要将所有的 $\mathbb{Q}_p$ 放在一起考虑。为了能够利用分析的工具，希望构造一个包含所有 $\mathbb{Q}_p$ 和全体实数 $\mathbb{R}(= \mathbb{Q}_\infty)$ 的局部紧空间，于是考虑它们的 (具有某种限制性条件的) 直积 $\mathbb{A} = \prod \mathbb{Q}_p$，即 Adéle 环。类似于先前寻找群 $(\mathbb{Z}, +)$ 和半群 $(\mathbb{N}, +)$ 的形的方法，我们考虑 Adéle 环 $\mathbb{A}$ 中所有可逆元构成的乘法群 $\mathbb{A}^*$ 商掉 $\mathbb{Q}^*$ 后所得的商群 $\mathbb{A}^*/\mathbb{Q}^*$，这就是所谓的 Idéle 类群。这样，这个局部紧的交换群就被视为 $\mathbb{N}^*$ 的“形”，我们需要一点分析来证实这一论断。

对于一般局部紧群 G，选定 G 上的一个 (左平移不变) 测度 $\mathrm{d}g$，考虑定义在 G 上的平方可积的函数全体形成的 Hilbert 空间 $L^2(G)$。类似于单位圆周上的做

法，可以给出 G 在这个 Hilbert 空间上的表示：

$$g_0 \to L_{g_0} : (Lg_0\xi)(g) = \xi(g_0^{-1}g), \qquad \xi \in L^2(G).$$

更一般地，对于 G 上性质比较好的函数 h，我们可以用这个函数沿上述表示做积分给出一个算子：

$$W(h) = \int_G L_g h(g)\mathrm{d}g.$$

可以看出，当 h 为 δ_g 函数时，就得到了 $W(\delta_g) = L_g$。

为什么要考虑这样的表示呢？因为这与 Riemann 猜测密切相关。Riemann 猜测是一个关于 ζ- 函数零点的论断，ζ- 函数在实部大于 1 处的取值可由下面的公式给出：

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots \\ &= \sum_n \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \text{(Euler 乘积公式)} \qquad (\mathrm{Re}\, s > 1).\end{aligned}$$

Riemann 证明了如下的函数方程：

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

从而得到了定义在整个复平面上 (除 0, 1 以外) 的函数 $\zeta(s)$。他猜测 ζ- 函数的所有非平凡零点 (全体负偶数称为平凡零点) 的实部都等于 $\frac{1}{2}$，这就是著名的 Riemann 猜测。ζ- 函数零点的信息和素数的分布有密切的关系，素数定理 (不大于 x 的素数个数和 $\frac{x}{\log x}$ 之比极限为 1) 的证明最早也是通过 ζ- 函数的零点的知识得到的。

我们再回到刚刚提到的 Adéle 环和 Idéle 群的构造。对于一类特殊群 (例如 $G = \mathbb{Q}_p^*$)，Atiyah 和 Bott 给出了下述迹公式：

$$\mathrm{Trace}(P_\Lambda W(h)) = 2h(1)\log\Lambda + \int \frac{h(x^{-1})}{|1-x|}\mathrm{d}x + o(1), \quad P_\Lambda = \hat{\chi}_{[0,\Lambda]}\chi_{[0,\Lambda]}.$$

迹公式的表面意义可看成是对应算子的特征根的和 (或积分)，但如果我们对所有算子都可以计算它们的特征根之和的话，其实我们也就知道了所有算子的特征根的分布。最近 Connes 证明了：对于 Idéle 类群，类似的 Atiyah-Bott 迹公式成立当且仅当 Riemann 猜测是肯定的。因此，Idéle 类群包含了素数的整体性质。

上述的处理方式只是一种哲学，我们下面把 $\mathbb{N}^*$ 的乘法半群结构和加法群 $\mathbb{Z}$ 的“几何”作一类比。我们看到加法半群 $\mathbb{N}$ 对应的形为单位圆盘，或许半群 $\mathbb{N}^*$ 的“形”也应有一个或多个复的结构与之对应。类比从 $\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{R}$ 得到 S^1 的方法，依

然将 $\mathbb{N}^*$ 看作 $\mathbb{R}_+$ 中的点，并用正实数 $\mathbb{R}_+$ 商掉 $\mathbb{N}^*$ 就得到了商空间 $\mathbb{R}_+/\mathbb{N}^*$，不过这个空间的拓扑结构却很难刻画。根据前面拓扑空间与代数之间的对应关系，我们讨论与这一空间对应的代数结构，即用函数空间 (或代数) 来代替空间本身。设 $S(\mathbb{R}_+)$ 为 $\mathbb{R}_+$ 上速降函数构成的函数空间，考虑其中函数关于乘法半群 $\mathbb{N}^*$ 做平均得到空间 $\mathcal{E}$：

$$\mathcal{E} = \left\{ E(f)(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(nx) : f \in S(\mathbb{R}_+) \right\}.$$

令 $\mathcal{H}_{\mathbb{N}^*}$ 为 $\mathcal{E}$ 在 Hilbert 空间 $L^2(\mathbb{R}_+)$ 中的正交补。借助函数代数, 我们将会发现这个空间中蕴涵着乘法半群 $\mathbb{N}^*$ 的几何结构。

在 $\mathbb{R}_+$ 上相对于乘法做平移变换，就给出了 $\mathbb{R}_+$ 作为乘法群的一个表示：

$$x_0 \to L_{x_0}:\ (L_{x_0}f)(x) = f(x_0^{-1}x), \qquad x_0 \in R_+.$$

类似于单位圆周上的情形，我们在 $\mathbb{R}_+$ 的乘法单位 1 处求导：

$$(Df)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{[(L_{1+\varepsilon} - L_1)f](x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(\frac{x}{1+\varepsilon}) - f(x)}{\varepsilon} = -x\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x),$$

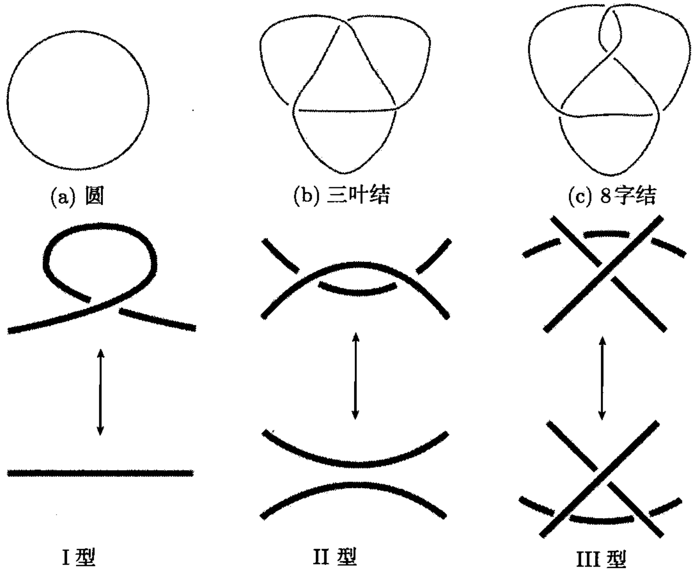
就可以得到微分算子 $D = -x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$。这个 $\mathcal{H}_{\mathbb{N}^*}$ 上的稠定算子 D 具有非常奇妙的性质：λ 是 D 的特征根当且仅当 λ 为 ζ- 函数的非平凡零点。

Riemann 的一大贡献是给数学的发展指明了一条路：从一个代数结构出发可以对应一个或多个“特征函数”(如从 $\mathbb{N}$ 到 $\zeta(s)$)，对这些函数的分析 (零点、值域等) 可以得到代数的结构性质。这种把一种问题归结到另一类问题，从而可以综合利用各学科特性来解决问题的方法应该是未来数学发展的趋势，因此数学不同学科的交叉和综合也是将来数学学习和研究的最重要手段。

1.4 扭结——圆周的变形

一根线在空间中缠绕并首尾相接就得到一个扭结，它们可以借助二维图形表示出来 (如图 3(a), (b), (c))。那么怎样区分两个不同的扭结呢？Reidemeister 证明了：两个扭结同构当且仅当可以通过以下三种变换 (图 3(d)) 把其中一个变为另一个。所以任何扭结不变量都必须在这三种变换下保持不变。

最早的扭结不变量是 100 多年前由 Alexander 引进的 Alexander 多项式。之后的 100 余年里，扭结的分类没有太大进展。20 世纪 80 年代初，Jones 引入了新的扭结不变量——Jones 多项式 $V_L(t)$，如三叶形及其镜面反射所对应的 Jones 多项式分别为



(d) Reidemeister变换

图 3　扭结和 Reidemeister 变换

$$V_{\text{三叶形}}(t) = t + t^3 - t^4,$$
$$V_{\text{三叶形}^*}(t) = t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}.$$

任何一个扭结不变量，都要满足一个 Skein 等式，即如果三个 (如图 4) 扭结 L_+, L_- 和 L_0 整体一样，而只在某个局部有如图 4 中标示的差别，它们对应的不变量需要满足的一个关系。Jones 多项式所满足的 Skein 等式为 $t^{-1}V_{L_+} - tV_{L_-} = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V_{L_0}$。

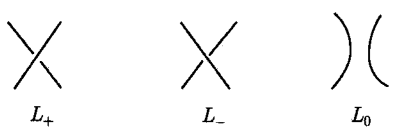


图 4　L_+

Jones 多项式不仅在扭结分类和三维拓扑空间分类等问题中有重要应用，它后来也成为其他不变量之母，在数学物理、生命科学等很多学科中得到了广泛应用。Jones 多项式的发现源于 Jones 在算子代数方面的工作，其想法非常简单。

1.5　代数中的“连通性”

对于群的研究存在俄罗斯流派和欧美流派，前者是从表示论的角度来研究群，

即寻找群的对偶，也就是它的“形”；而以美国和法国等为代表的欧美学派，采取了截然不同的方法，他们的研究重点不再是群的对偶，而是把群扩充为群代数来进行研究。根据先前整数加群的例子可以看到，许多几何的信息确实蕴涵在相应的代数之中。因此，群代数 (一般是非交换代数) 的结构中蕴涵了和群相关的几何结构，这也是非交换几何的出发点之一。“算子代数”是一门在群代数上做分析的学科，是非交换几何的研究对象。

作为整数群的推广，设 G 是一个可数离散群，令 $l^2(G)$ 表示以群元素为规范正交基，系数平方可和的 (形式) 无限和全体构成的复 Hilbert 空间。考虑 G 在 $l^2(G)$ 上的左正则表示所生成的代数，称该代数在算子范数下的闭包为群 C^*- 代数，记为 $C^*(G)$；称它在弱算子拓扑下的闭包为群 von Neumann 代数，记为 $L(G)$。用 $\mathbb{C}G$ 表示群代数，$l^1(G)$ 在卷积下是一个 Banach 代数。类似于整数加群，对于一般的群也有以下包含关系：

$$G \subset \mathbb{C}G \subset \underbrace{l^1(G) \subset C^*(G) \subset L(G)}_{\text{算子代数}} \subset l^2(G)$$

一般来说，$l^2(G)$ 不是一个代数，而上面的其他空间都有代数结构，中间的三项是算子代数关心的对象。算子代数的基本问题 (和其他学科一样) 也是分类和表示，算子代数分类中最有效的不变量都是几何 (或拓扑) 的。这在交换代数的情形下可以从 Gelfand-Naimark 定理中看到：一个交换 C^*- 代数一定同构于某个局部紧 Hausdorff 空间上连续函数全体形成的代数，从而两个交换 C^*- 代数同构当且仅当它们对应的拓扑空间同胚。因此，人们一般认为非交换 C^* 代数是“非交换”的拓扑空间，在研究一般代数的时候，很自然地就要借鉴拓扑与几何理论。如果一个拓扑空间是连通的，则连续函数不能只取 0，1 两个数。因此，拓扑空间的连通性可由函数代数中的特征函数来刻画。特征函数在一般代数中的推广就是幂等元或投影。C^*- 代数 $\mathcal{A}$ 的 K_0 群，就是由有限生成的投射 $\mathcal{A}$ 模的等价类生成的，也就是由 $M_n(\mathcal{A})$ 里面的投影等价类生成的。而 $\mathcal{A}$ 的 K_1 群更为简单，即为 $\mathcal{A}$ 的酉群商掉单位元的道路连通分支后所得到的商群。当 $\mathcal{A}$ 为交换 C^*- 代数时，这样得到的 K 群与它对应拓扑空间的 K 群是一样的。K- 理论在拓扑空间的分类中是一个重要的不变量，它在算子代数的分类中也十分重要，很惊奇地，它在研究古典拓扑问题 (如著名的 Novikov 猜测等) 中起到了不可或缺的作用。

1.6 代数和子代数

我们知道群和子群的阶有倍数关系，即使是无限群，相对于它的任意一个子

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com