

# 量子群智能 Quantum Swarm 及其在通信技术 Communication 中的应用 Application

高洪元 刁鸣 著

中国工信出版集团



电子工业出版社  
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY  
<http://www.phei.com.cn>

# 量子群智能及其在通信 技术中的应用

高洪元 刁鸣 著

电子工业出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

## 内 容 简 介

本书共分9章, 主要内容包括量子粒子群、量子蛙跳算法、量子蜂群、量子细菌觅食、量子神经网络、量子文化算法、量子文化群智能、量子膜群算法、多目标量子膜群算法、多用户检测、频谱分配、决策引擎、频谱感知、冲击噪声测向、非圆信号测向等智能计算或通信技术中的热点和难点问题。

本书可使读者在了解和学习量子群智能和通信技术最新科研成果的同时, 在量子群智能和通信技术两个方向得到启发, 也可作为相关学科的教材和科研用书。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。  
版权所有, 侵权必究。

### 图书在版编目(CIP)数据

量子群智能及其在通信技术中的应用 / 高洪元, 刁鸣著. —北京: 电子工业出版社, 2016.6

ISBN 978-7-121-28814-2

I. ①量… II. ①高… ②刁… III. ①量子群—智能技术—应用—通信技术 IV. ①TN91

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第101124号

策划编辑: 董亚峰

责任编辑: 董亚峰

特约编辑: 田学清 赵海红

印 刷: 三河市华成印务有限公司

装 订: 三河市华成印务有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱

邮编: 100036

开 本: 720×1000 1/16 印张: 15.25 字数: 304千字

版 次: 2016年6月第1版

印 次: 2016年6月第1次印刷

定 价: 48.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888, 88258888。

质量投诉请发邮件至 [zltz@phei.com.cn](mailto:zltz@phei.com.cn), 盗版侵权举报请发邮件到 [dbqq@phei.com.cn](mailto:dbqq@phei.com.cn)。

本书咨询联系方式: QQ3502629。

# 前 言

无线通信是当今科学技术发展最活跃的领域。在无线通信飞速发展的今天，频谱资源和系统性能都难以跟上实际需求的快速增长，成为制约无线通信持续发展的主要因素。研究通信系统的关键技术对合理分配频谱资源、确定系统参数和满足系统多目标要求有深远意义。因此，本书根据智能计算的最新进展，在量子群智能理论的基础上进行学科交叉，介绍了量子群智能频谱分配、频谱感知、多用户检测、测向和决策引擎等具有重要的理论价值和现实意义的通信关键技术。基于量子群智能的通信关键技术是当前智能计算和通信领域的研究热点，在工业和国防科技领域具有广阔的应用前景。希望本书的出版将对量子群智能和通信技术的持续发展起到推进作用。

本书阐述了作者及其团队在量子群智能领域的学术研究成果及其在通信技术中的应用，阐明了在通信技术中使用量子群智能的可行性、有效性及其对后续科研思路的启发。量子群智能在通信技术中的应用是智能计算与通信技术领域结合的一个前沿和富有挑战性的研究方向，它以量子群智能理论为基础，侧重于介绍如何设计目标函数去解决通信技术中所面对的技术难题，如何根据工程问题设计量子群智能算法去快速可靠地解决工程优化问题。本书在介绍量子智能相关理论的基础上，阐述了智能计算的新发展——量子群智能计算，内容主要包括：量子粒子群算法、量子蛙跳算法、量子蜂群算法、量子细菌觅食算法、量子神经网络、量子文化算法、量子文化群智能、量子膜群算法和多目标量子膜群算法。并且给出了量子群智能在通信技术中的具体应用，解决了多用户检测、频谱分配、决策引擎、频谱感知、冲击噪声测向和非圆信号测向等通信技术中的热点和难点问题。同时介绍了当前量子群智能及其应用的一些最新技术，如多目标频谱分配、量子膜群、量子文化群、智能非圆测向和智能冲击

噪声环境测向等通信技术和智能计算领域的热点问题，做到理论和具体应用的有机结合。

本书内容安排尽可能考虑适合高等学校相关专业研究生及博士生的实际研究和教学要求，做到深入浅出、重点突出，读者可以在相对较短的时间内入门并深入进去。本书可使读者在了解和学习量子群智能和通信技术最新科研成果的同时，在量子群智能和通信技术两个方向得到启发。本书可作为相关学科研究人员的教学和科研参考用书。

本书第 4、8、9 章的部分内容由刁鸣教授撰写，其他章节内容由高洪元副教授撰写。在著作写作过程中，感谢硕士研究生李晨琬、杜亚男、李佳、刘丹丹和梁炎松在文献和文稿整理方面所付出的工作和努力。由于量子群智能和通信技术发展迅猛、应用广泛，再加上作者的水平有限，难免存在缺点和不足之处，敬请读者批评指正！尽管本书主要探讨量子群智能算法在通信技术中的应用，但是书中的一些量子群智能算法可以移植应用到其他工程领域，本着相互学习、相互促进的初衷，欢迎读者使用如下邮箱进行沟通与交流：[gaohongyuan@hrbeu.edu.cn](mailto:gaohongyuan@hrbeu.edu.cn)。

本专著获得了如下基金的资助：国家自然科学基金(No.61102106, No.61571149)、中国博士后科学基金特别资助(No.2015T80325)、中国博士后科学基金 1 等资助(No.2013M530148)、黑龙江省博士后科学基金(No.LBHZ13054)和中央高校基本科研业务费(No.HEUCF150817)，在此表示衷心感谢。本专著的撰写主要在访学期间完成，特此感谢中国留学基金委的资助。

高洪元

# 目 录

第 1 章 绪论.....	1
1.1 量子群智能计算简介.....	1
1.2 单目标和多目标优化问题.....	3
1.2.1 单目标优化问题的数学模型.....	5
1.2.2 单目标约束优化问题的求解方法.....	5
1.2.3 多目标优化问题的数学模型.....	7
1.2.4 多目标优化方法简介.....	9
1.3 智能计算在通信技术中的应用.....	11
1.3.1 简介.....	11
1.3.2 展望.....	15
1.4 本书内容和结构安排.....	17
参考文献.....	19
第 2 章 用于离散优化问题的量子群智能计算.....	29
2.1 量子粒子群算法.....	30
2.1.1 双链编码的量子粒子群算法.....	30
2.1.2 单链编码的量子粒子群算法.....	32
2.1.3 性能测试.....	34
2.2 量子蜂群算法.....	37
2.2.1 双链编码的量子蜂群算法.....	37
2.2.2 单链编码的量子蜂群算法.....	40
2.2.3 性能测试.....	42
2.3 量子细菌觅食算法.....	43

2.3.1	双链编码的量子细菌觅食算法 .....	43
2.3.2	量子细菌觅食算法的收敛性分析 .....	46
2.3.3	性能测试 .....	49
2.4	小结 .....	50
	参考文献 .....	50
<b>第3章</b>	<b>用于连续优化问题的量子群智能计算 .....</b>	<b>52</b>
3.1	量子蛙跳算法 .....	53
3.1.1	混合蛙跳算法 .....	53
3.1.2	量子蛙跳算法 .....	55
3.1.3	性能测试 .....	58
3.2	量子文化蛙跳算法 .....	60
3.2.1	量子规范知识 .....	60
3.2.2	量子文化蛙跳算法的实现 .....	61
3.2.3	性能测试 .....	64
3.3	量子细菌觅食算法 .....	65
3.3.1	细菌觅食算法 .....	66
3.3.2	量子细菌觅食优化算法 .....	69
3.3.3	性能测试 .....	71
3.4	小结 .....	73
	参考文献 .....	74
<b>第4章</b>	<b>基于量子智能算法的多用户检测 .....</b>	<b>76</b>
4.1	多用户检测的数学模型 .....	78
4.1.1	噪声模型 .....	78
4.1.2	高斯噪声下的多用户检测数学模型 .....	79
4.2	高斯噪声环境的典型多用户检测方法 .....	83
4.2.1	传统检测器 .....	83

4.2.2	最优多用户检测器 .....	84
4.2.3	Hopfield 神经网络多用户检测器 .....	86
4.3	基于免疫克隆量子算法的多用户检测 .....	87
4.3.1	神经网络制备疫苗的方法框架 .....	88
4.3.2	基于免疫克隆量子算法的多用户检测器 .....	89
4.3.3	试验仿真 .....	93
4.4	量子 Hopfield 神经网络的多用户检测设计 .....	95
4.4.1	量子 Hopfield 神经网络 .....	96
4.4.2	基于量子神经网络的多用户检测 .....	98
4.4.3	基于量子神经网络的多用户检测器仿真 .....	99
4.5	量子蜂群算法的鲁棒多用户检测 .....	100
4.5.1	鲁棒多用户检测器 .....	101
4.5.2	新量子蜂群算法 .....	102
4.5.3	基于量子蜂群算法的鲁棒多用户检测 .....	104
4.5.4	试验仿真 .....	105
4.6	小结 .....	107
	参考文献 .....	107
<b>第 5 章</b>	<b>基于量子群智能的认知无线电决策引擎 .....</b>	<b>112</b>
5.1	认知无线电决策引擎模型和三种典型的决策引擎 .....	114
5.1.1	智能计算的认知决策引擎 .....	114
5.1.2	基于智能计算的认知决策引擎方法 .....	117
5.2	单目标膜量子蜂群算法及其在决策引擎上的应用 .....	123
5.2.1	膜结构简介 .....	123
5.2.2	膜量子蜂群优化算法 .....	124
5.2.3	膜量子蜂群优化算法的性能测试 .....	128
5.2.4	基于膜量子蜂群算法的认知无线电决策引擎 .....	130
5.2.5	决策引擎试验仿真 .....	131



5.3	基于量子细菌觅食算法的绿色认知无线电参数调整 .....	134
5.3.1	绿色认知无线电参数调整模型 .....	135
5.3.2	量子细菌觅食算法的绿色认知无线电参数调整 .....	137
5.3.3	试验仿真 .....	138
5.4	小结 .....	141
	参考文献 .....	142
<b>第6章</b>	<b>基于量子群智能的频谱分配 .....</b>	<b>146</b>
6.1	频谱分配模型 .....	147
6.1.1	图论着色模型 .....	147
6.1.2	单目标频谱分配 .....	149
6.1.3	多目标频谱分配 .....	150
6.2	基于量子粒子群算法的单目标频谱分配 .....	151
6.2.1	基于单链量子粒子群算法的认知无线电频谱分配 .....	151
6.2.2	仿真结果分析 .....	152
6.3	基于多目标膜量子蜂群的多目标频谱分配 .....	155
6.3.1	膜量子蜂群的基本演进规则 .....	156
6.3.2	膜量子蜂群的膜框架 .....	158
6.3.3	基于多目标膜量子蜂群算法的多目标频谱分配技术 .....	161
6.3.4	频谱分配实验仿真 .....	163
6.4	小结 .....	167
	参考文献 .....	168
<b>第7章</b>	<b>量子群智能的频谱感知技术 .....</b>	<b>171</b>
7.1	线性协作频谱感知模型 .....	172
7.2	合作式频谱感知的基本算法 .....	174
7.2.1	基于修正偏差因子的频谱感知方法 .....	174
7.2.2	基于粒子群算法的频谱感知 .....	175

7.2.3	计算机仿真 .....	177
7.3	基于连续量子细菌觅食算法的频谱感知技术 .....	178
7.3.1	量子细菌觅食算法的频谱感知 .....	178
7.3.2	计算机仿真 .....	181
7.4	小结 .....	184
	参考文献 .....	184
<b>第 8 章</b>	<b>基于量子智能计算的 DOA 估计 .....</b>	<b>187</b>
8.1	经典 DOA 估计模型和算法 .....	188
8.1.1	DOA 估计模型 .....	188
8.1.2	经典测向算法 .....	189
8.1.3	基于量子蛙跳算法的测向方法 .....	190
8.1.4	试验仿真 .....	191
8.2	基于高阶累积量和文化量子算法的测向方法 .....	192
8.2.1	基于高阶累积量的广义加权子空间拟合算法 .....	193
8.2.2	文化量子算法 .....	196
8.2.3	基于文化量子算法的广义高阶加权信号子空间拟合测向 .....	199
8.2.4	试验仿真 .....	200
8.3	基于量子文化蛙跳算法的非圆信号 DOA 估计 .....	203
8.3.1	非圆极大似然算法 .....	203
8.3.2	基于量子文化蛙跳算法的极大似然测向 .....	204
8.3.3	试验仿真 .....	206
8.4	小结 .....	207
	参考文献 .....	208
<b>第 9 章</b>	<b>冲击噪声环境下的量子智能计算 DOA 估计 .....</b>	<b>211</b>
9.1	冲击噪声环境下的测向模型 .....	212
9.1.1	三种低阶矩 .....	212

9.1.2	三种低阶矩的对比 .....	213
9.2	基于量子文化细菌觅食算法的无穷范数最大似然测向方法.....	215
9.2.1	量子文化细菌觅食算法 .....	215
9.2.2	量子文化细菌觅食算法的无穷范数极大似然测向.....	218
9.2.3	试验仿真 .....	221
9.3	基于量子粒子群的动态测向方法 .....	225
9.3.1	冲击噪声下的动态测向模型 .....	225
9.3.2	连续量子粒子群优化算法 .....	226
9.3.3	量子粒子群优化算法的动态测向方法.....	228
9.3.4	试验仿真 .....	229
9.4	小结 .....	231
	参考文献.....	232

# 第 1 章

## 绪 论

### 1.1 量子群智能计算简介

随着科学技术的不断发展和学科间的互相交叉渗透，许多领域的研究问题和方法也变得越来越复杂，许多课题也不再局限于用一个领域的理论和方法去解决，这在信息科学领域尤为突出。面对复杂的研究问题，当传统方法在工程应用中陷入困境的时候，其促使人们不断从自然界寻找灵感，更加艺术地寻求解决问题的新方法和新手段。正是在这样的背景下，智能计算在理论研究和工程应用领域得到重视并逐渐发展起来。

长久以来，科学家通过向自然界学习并从中获得灵感，提出新的计算理论，促进了启发式计算的兴起，涌现出诸多受生物启发的计算方法，如神经网络、禁忌搜索、演进算法和群智能等。这些方法通过模拟生物的行为或物理现象进而抽象出数学模型，去解决理论计算和工程领域中遇到的问题。随着人类文明的进步，物理科学、生物科学及信息科学的进一步发展，科学家对生物智能和启发式算法的认识不断深入，越来越多的研究人员认识到对生物系统行为和社会行为的模拟可以获得解决众多复杂问题的方法。受自然界和人类社会活动的启发不断涌现出新的智能计算方法，如利用 DNA 计算、细胞膜计算、量子计

算、文化算法、群集智能和人工免疫系统等，将这些计算方法统称为智能计算 (Intelligence Computing, IC)。实际上，智能计算是一门包括物理学、数学、计算机科学、电子、信息、通信、生理学、社会学、进化理论和心理学等学科在内的综合科学<sup>[1]</sup>。因此，将各研究领域的经典理论和智能计算理论相结合，提出的理论就能为解决工程问题建立有效的智能系统，并可为理论研究提供新方法，对各个科学领域的发展起到推进作用。

当前，一种被称作群智能的典型智能计算算法受到科研人员的广泛关注，这种群智能的优化算法也可被称为启发式算法，它是受生物群体性行为的启发而设计提出的。这类算法于在 20 世纪 90 年代兴起，被广泛应用于解决复杂的组合优化问题及高维优化问题。由于大部分群智能算法的演进过程是独立于初始解并自由演化的，所以它能够克服传统优化算法及确定性优化方法的一些缺点，如陷入局部最优值或者获得边缘化解等。因此，一些学者把研究焦点放在了群智能算法上，如粒子群算法<sup>[2,3]</sup>、人工蜂群算法<sup>[4]</sup>、细菌觅食算法<sup>[5]</sup>和混合蛙跳算法<sup>[6]</sup>等，这些算法通过对群体生物的群体性觅食行为进行模拟而具有较好的寻优能力，因而被广泛应用于许多工程领域。这些算法具有不同的特点，在解决一些优化问题时能够获得令人满意的解。但是在求解一些复杂优化问题时存在收敛速度与收敛精度之间的矛盾，在求解高维问题时，需要较大的种群规模和较多的迭代次数，这无疑增加了计算量及运行时间。因此，设计高效、稳定且适用性广的算法是十分必要的。

量子计算智能是受物理学中量子计算和量子机制的启发所产生的智能优化算法。量子计算 (Quantum Computation, QC) 于 1982 年首先由 Richard Feynman 提出，现已成为各国学者紧密关注的前沿学科<sup>[7]</sup>。量子计算已经在保密通信、密码系统和数据库搜索等领域得到成功的应用<sup>[8,9]</sup>。虽然在 1999 年美国已经研制出量子计算设备的原型，但其在实际应用上和技术上仍然是一个巨大的挑战，然而关于量子计算令人激动的原因是它引起思考物理学基本定律所获得的心得，以及它为其他科学的发展所带来的独创性的思想和灵感<sup>[10]</sup>。

量子计算生动地说明了智能计算的研究也可以建立在一个物理过程的模拟之上，量子机理和特性会为智能计算的研究开辟新的途径，有效利用量子理论

的原理和概念，将会在实际应用中取得明显优于传统智能计算模型的结果<sup>[11]</sup>，这是因为量子计算智能（Quantum Computational Intelligence, QCI）的出现结合了量子计算和传统智能计算各自的优势<sup>[12,13]</sup>。量子计算与进化算法的结合从 20 世纪 90 年代后期开始。Han 等提出了遗传量子算法<sup>[14]</sup>和量子衍生进化算法<sup>[15]</sup>，他们将量子编码引入遗传进化过程，利用量子旋转门实现量子染色体的进化，并且给出了量子旋转角的确定方法，并以量子旋转门进化，通过量子态测量实现了 0/1 背包问题的求解，其性能与传统的遗传算法相比有优势。此后，由于量子计算的并行性特点，使量子进化算法具有很多优点，如种群规模小也不影响算法性能、迭代次数少且全局寻优能力强、在进化过程中有效利用了个体过去的历史信息等，因此吸引了众多研究者对量子进化算法进行改进和完善，并在工程问题上进行了应用研究的探索，并用实验结果证明其性能更加良好<sup>[16-20]</sup>。文献[21,22]通过对具体工程问题的研究并结合一些其他的仿生机制对算法进行改进，获得了较理想的性能。这类量子启发式算法与传统进化算法相比，搜索能力显著增强，且运算量和运算时间都极大地缩减，应用在各领域的工程问题上都能获得较为理想的性能。因此，对量子计算及群智能进化算法进行深入研究，设计出全新的量子群智能算法具有重要的意义<sup>[23-25]</sup>。深入研究量子机理，结合最新的智能计算成果同时使用量子旋转门实现的演化过程设计出量子编码的演化计算新方法，将具有很高的理论价值和发展潜力<sup>[26,27]</sup>。

## 1.2 单目标和多目标优化问题

对于优化问题来说，一般主要由目标函数、未知变量和约束条件 3 个基本要素构成。它们的概念详细阐述如下<sup>[28]</sup>。

(1) 目标函数：就是要求解的优化问题的函数表示，即要求被最大化或者最小化的函数。

(2) 未知变量：就是目标函数中未知的变量，通过自身取值变化而引起目标函数值变化的变量，求解优化问题的目标也就是希望能够找到满足目标函数最大化或者最小化所对应的最优变量取值。

(3) 约束条件：就是在寻找使得目标函数最大化或最小化的未知变量时，限制未知变量取值条件的约束。基本上每个优化问题都要定义一组边界约束，并给出每个变量的定义域范围。

所以一个优化问题的求解过程就可以理解为：在满足给定约束条件的未知变量的可行区域中，通过一定的方式和方法寻找出那组能够使得目标函数达到最优的变量取值，并由此得出目标函数的最优值。当然这里的最优视具体情况而定，可以是函数的最大值，也可以是函数的最小值。那么，优化算法就是作为优化问题程序化时的求解方法，在指定约束条件的可选解集空间中搜索满足函数最大化或者最小化的最优解。

以上是对优化问题的基本概念介绍，现在基于优化问题的 3 个组成要素的不同特征，分别介绍优化问题最常见的 3 种分类方法。

(1) 从目标函数的维度来进行分类，根据目标函数的个数可以分为单目标优化问题和多目标优化问题。单目标优化问题顾名思义就是指优化问题中的目标函数只有一个，而如果目标函数有两个以上则称之为多目标优化问题。

(2) 根据未知变量类型的不同可以分为连续域优化问题和离散域优化问题。所谓连续域优化问题就是指未知变量的定义域取值为连续域的，同理离散域优化问题就是指未知变量的定义域取值为离散域的。

(3) 根据有无约束条件的情况可分为无约束条件的优化问题和有约束条件的优化问题。

接下来以最小值优化为例介绍单目标优化问题和多目标优化问题，同时了解优化问题的基本术语。最大值优化问题可依此类推。

## 1.2.1 单目标优化问题的数学模型

### 1. 单目标函数优化问题的数学描述

令  $S \subseteq R^n$  代表  $n$  维的搜索空间, 令  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n] \in S$  表示一个决策向量,  $x_i \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  代表边界约束。令  $f(\mathbf{x})$  为目标函数, 以最小化为例, 则单目标优化问题可以描述为

$$\min f(\mathbf{x}), x_i \in [x_i^{\min}, x_i^{\max}], i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2.1)$$

### 2. 单目标约束优化问题

在科学与工程领域中, 许多极值问题的求解往往受到各种现实因素的制约, 这些制约通常由一系列约束条件来描述。求解带有约束条件的极值问题被称为约束优化问题, 具体可由下述一般形式的非线性规划来表示:

$$\min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}), \text{st: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, s; h_j(\mathbf{x}) = 0, j = s+1, s+2, \dots, p \quad (1.2.2)$$

其中,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  是  $n$  维实向量,  $f(\mathbf{x})$  为目标函数,  $g_i(\mathbf{x})$  表示第  $i$  个不等式约束,  $h_j(\mathbf{x})$  表示第  $j$  个等式约束, 决策变量  $x_i$  在区间  $[x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  中取值,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。  $S = \prod_{i=1}^n [x_i^{\min}, x_i^{\max}]$  表示搜索空间,  $S$  中所有满足约束条件的可行解构成的可行域记为  $\Omega \subseteq S$ 。

## 1.2.2 单目标约束优化问题的求解方法

由于约束条件的存在, 使得约束极值问题的求解要比无约束优化问题的求解复杂、困难得多。对于约束极小化问题来说, 不仅要使目标函数值在迭代过程中不断减小, 而且还要注意解的可行性。为了简化约束优化问题的寻优过程, 通常可采用如下思路来构造算法: 将约束优化问题转化为无约束优化问题, 将复杂问题转化为简单问题。下面对 3 种代表性方法进行简单介绍。



### 1. 基于罚函数的方法

(1) 静态罚函数法：考虑如下非线性规划问题

$$\min_{\mathbf{x} \in S} f(\mathbf{x}), \text{st: } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i=1, 2, \dots, m \quad (1.2.3)$$

适应度函数定义为： $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x})$ 。

惩罚项  $p(\mathbf{x})$  定义为：若  $\mathbf{x}$  可行，则  $p(\mathbf{x}) = 0$ ；否则  $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m r_i g_i(\mathbf{x})$ 。由于对于每个约束又可分为几个违反级，所以按照违反级， $r_i$  是相应变化的约束  $i$  的惩罚系数。

(2) 动态罚函数法：该方法使用了与时间（迭代次数、代数等） $t$  有关的罚函数，在第  $t$  代个体的适应度函数设置为

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + (ct)^\alpha \sum_{i=1}^m d_i^\beta(\mathbf{x}) \quad (1.2.4)$$

其中， $c, \alpha, \beta$  为可调参数， $d_i(\mathbf{x})$  在  $\mathbf{x}$  为可行解时取 0，在  $\mathbf{x}$  为不可行解时取约束违反量的绝对值。

### 2. 基于搜索容许解的方法

如行为记忆法，该方法逐步处理约束，每次处理一个，使得种群中满足该约束的个体达到预先规定的比例，如在处理第  $j$  个约束的时候，要保持前  $j-1$  个约束均满足，这样使得最后种群中有足够多的可行解。相关的方法还有容许点优先法等。

### 3. 多目标方法

多目标方法的特点是：既不使用传统的罚函数，也不区分可行解和不可行解。有的算法将约束优化问题转化为两个目标优化问题，其中一个为原问题的目标函数，另一个为违反约束条件的程度函数。利用 Pareto 优于关系，定义个体 Pareto 序值以便对个体进行排序选优。有的算法采用序值阶段选择策略，第一阶段，当种群中没有可行解时，按照约束违反度对种群中的个体进行排序，