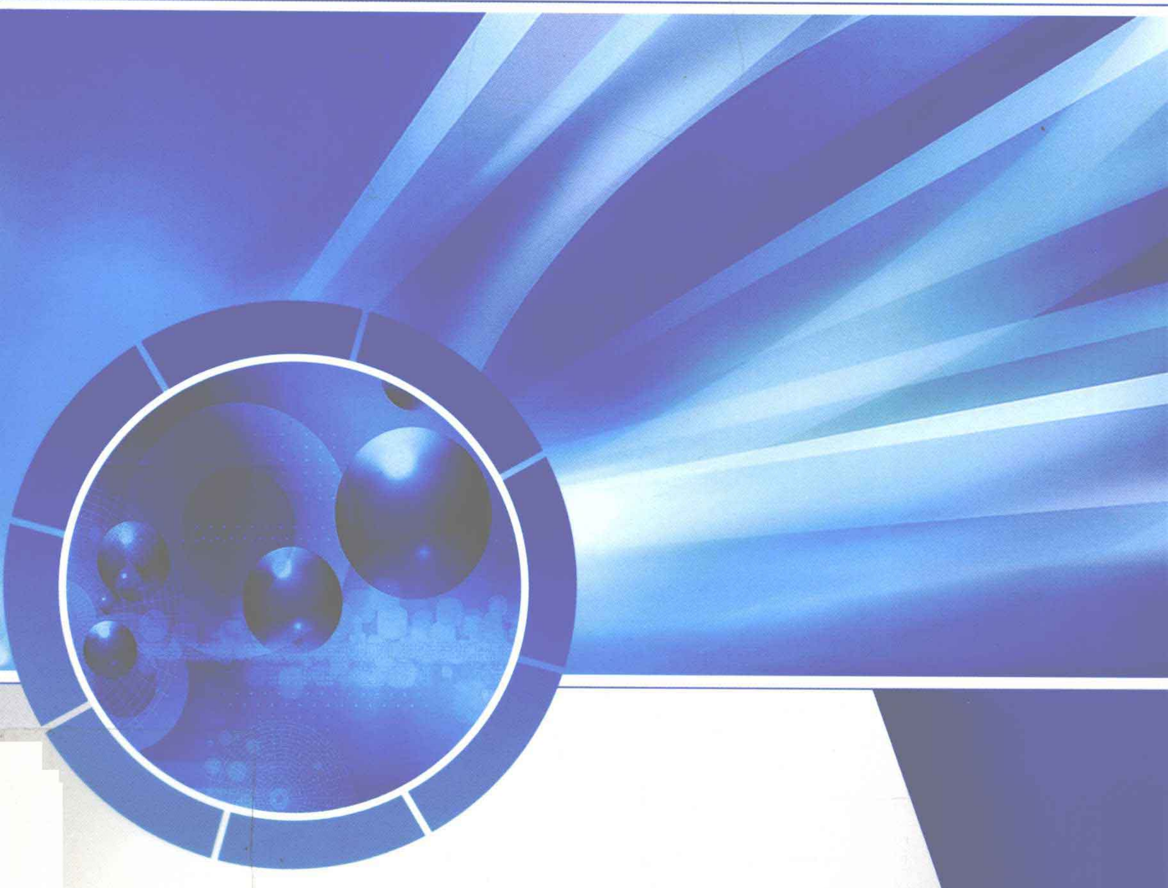
中国科学院“十一五”规划教材

经·济·应·用·数·学·基·础·系·列

概率论与数理统计

文 平 主 编
秦伶俐 梁晓辉 倪科社 副主编



科学出版社
www.sciencep.com

中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列

概率论与数理统计

主　编　文　平

副主编　秦伶俐
　　　　梁晓辉
　　　　倪科社

科学出版社

北　京

内 容 简 介

由于随机现象存在的普遍性，描述、分析和研究现实世界中的随机性显得非常重要，本书主要介绍了这方面的基本知识和方法，其内容由概率论与数理统计两部分组成. 概率论部分主要介绍了随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征与大数定律及中心极限定理等内容. 数理统计部分主要介绍了数理统计的基本概念、参数估计、假设检验及回归分析等内容. 书中部分章节增加了经济应用模型和Mathematica5. 0 在概率论与数理统计中的应用.

本书可作为高等学校经济类与管理类各专业学生的教学用书及理工科相关专业学生的教学参考书，也可供经济管理类专业技术人员参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/文平主编. 一北京：科学出版社，2010. 8
(中国科学院"十一五"规划教材·经济应用数学基础系列)
ISBN 978-7-03-028518-8

Ⅰ.①概… Ⅱ.①文… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 151863 号

责任编辑：王春福 李鹏奇 唐保军 / 责任校对：刘小梅
责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2010 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2010 年 8 月第一次印刷 印张：17 1/4
印数：1—11 000 字数：333 000

定价：24. 00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

中国科学院“十一五”规划教材·经济应用数学基础系列

丛书编委会

总　　序

随着科学技术的迅猛发展和经济建设的快速腾飞，数学与各门学科的联系变得更加紧密，在人类实践活动中的应用也更加广泛和深入.不仅自然科学和工程技术离不开数学，财经科学、管理科学及其他社会科学同样离不开数学.

20 世纪 80 年代以来，我国高校按照教育部的要求，普遍为经济管理类各专业的本科学生开设了包括微积分、线性代数、概率论与数理统计等在内的经济应用数学基础课程.在多年的经济数学教学实践中，曾经涌现出一批具有时代特色的优秀教材，这些教材对培养合格的财经管理人才发挥过重要作用.近年来随着招生规模的不断扩大，我国已迅速进入高等教育的大众化时代.新的时代呼唤经济数学教材的改革和创新.如何为全日制经济类与管理类本科生编写一套既适合学生现状又兼顾考研需要、既传授数学思想又突出实际应用、既介绍经典理论又穿插现代理念、既适当研究解题技巧又学会使用数学软件的教材，是编者多年的夙愿，当然也是一件很有意义的事情.

基于上述想法，我们按照教育部“经济类与管理类本科数学基础课程教学大纲及要求”，深入研究了国内外经济数学教育教学改革动态，借鉴了许多优秀教材的内容结构和处理方法，并结合编者长期从事经济数学教学的经验体会编写了这套系列教材，包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》、《经济与金融分析数学基础》，共四册.

本系列教材的前三册(《微积分》,《线性代数》,《概率论与数理统计》)的读者对象是经济类和管理类的一、二年级本科生.上述教材在编写思想、结构安排、内容取舍、教学方法等方面做了一些新的尝试，其共同特点如下：

一、努力体现分层次教学的思想.针对不同层次学生的学习要求，对教学内容和课后习题两个方面进行了处理.将内容分为必学内容和选学内容(加 * 号区分)，习题依照难易程度划分为(A)、(B)两组.教材综合考虑了财经类各专业学习该课程和后续课程的需要、报考研究生的需要以及将来从事有关实际工作的需要.文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和证明思路的叙述力求准确和富有启发性.

二、突出数学的经济应用.教材引入了简单的经济(管理)应用模型，目的在于加强对学生数学应用能力的培养，引导学生学以致用，提高学生学习经济数学的兴趣.例如《微积分》中介绍了常用的边际分析与弹性分析等经济学经典模型，《线性代数》中介绍了投入产出分析等线性模型，《概率论与数理统计》中介绍了彩票模型及报童问题等随机模型.

三、穿插数学建模的思想和方法，尝试使课程内容与数学软件使用有机结合.书中运用 Mathematica 5.0 编排了若干数学实验，由此也就适当弱化了对某些复杂计算技巧的介绍.

本系列教材的第四册(《经济与金融分析数学基础》)内容是前三册数学基础知识的自然延伸、提高和综合应用，读者对象为经济类、管理类、统计类、应用数学类高年级本科生及研究生.该书在内容取舍、体系结构安排及写作风格上都做了新的尝试，突出经济(金融)分析中实际问题的需要，重点放在如何运用数学的语言及模型反映经济(金融)分析及管理理论与实践中所面临的问题，而不刻意强调数学本身的系统性和严谨性.

本系列教材集中了众多专家学者及一线教师的智慧和力量，王春福主任，李鹏奇副编审以及科学出版社的许多朋友为本套书的出版付出了辛勤劳动，在此一并表示感谢.

限于编者的知识水平，书中不当之处在所难免，敬请读者批评指正.

丛书编委会

2010 年 6 月

前　　言

概率论与数理统计是研究随机现象及其规律性的一门数学分支学科. 由于随机现象存在的普遍性，概率论与数理统计知识在科技、经济以及管理等领域得到了广泛的应用. 我们根据教育部颁发的高等学校财经类专业《概率论与数理统计教学大纲》编写了这本教材. 本书可作为高等学校经济类与管理类各专业的教学用书及理工科相关专业的教学参考书，也可供经济管理类专业技术人员参考使用.

本书由两部分组成：第一部分(第 1～5 章)为概率论部分，包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理. 第二部分(第 6～9 章)为数理统计部分，包括数理统计的基本知识、参数估计、假设检验、回归分析.

本书的特点主要体现在以下几个方面.

一是体现了分层次教学的思想. 针对不同层次学生的学习要求，我们在教学内容和习题两个方面进行了处理. 将内容分为必学内容和选学内容(加 * 号的部分)，习题则分为(A)、(B)两组，以满足各专业学习该课程和后续课程的需要、报考研究生的需要以及将来从事有关实际工作的需要. 二是突出随机数学特色，增加了经济应用模型，其目的在于让学生掌握数学建模的基本思想和方法，引导学生学以致用，以加强数学应用能力的培养，提高学生学习本课程的兴趣. 三是尝试通过数学实验，使传统内容与数学软件有机结合. 书中介绍了 Mathematica5.0 在概率论与数理统计中的应用，以引导学生利用计算机解决实际问题. 四是降低起点和难度. 降低起点是只要求读者具有微积分和线性代数的初步知识，降低难度则是在如何易学上下工夫. 在文字叙述上尽量为初学者着想，对基本概念和定理证明的表述力求准确和富有启发性. 五是从提出实际(经济)问题入手引入数学概念，逐步介绍方法和工具，最后解决所提出的问题，使学生了解应用背景，尽快达到学以致用的目标.

本书第 1～3 章由秦伶俐编写，第 4～6 章及数学实验由梁晓辉编写，第 7～9 章由文平编写. 倪科社参加了第 1～5 章的编写，洪燕君参加了第 6～9 章的编写. 全书由文平负责总纂.

本书在编写过程中得到了许多同行专家的支持和帮助，陈启宏教授、温田丁副教授、孙德荣副教授阅读了本书初稿，并提出了宝贵的修改意见或建议，在此表示衷心的感谢.

本书在编写时参考了大量的中外教材和文献资料，选用了某些内容和习题，在

此向有关编著者表示感谢.

由于作者水平有限，书中难免有不当之处，敬请广大读者批评、指正.

编　者
2010 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计作为数学的一个分支在许多领域(特别是在经济和管理领域)中有着广泛的应用. 随着我国经济与世界经济接轨，现代经济学理论越来越被人们所关注. 现代经济学理论的一个显著特点就是对经济发展的规律进行量化分析. 而无论是宏观经济的进程还是微观经济的波动都受着随机因素的影响，因此概率论与数理统计成为经济学和管理学的一门重要基础课程. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念.

1.1　随机事件

一、随机现象

自然现象和社会现象大致可分为两类：一类是在一定条件下必然出现的现象，称为确定性现象. 例如，在标准大气压下，100℃的水必然沸腾；在自然状态下，水从高处向低处流淌. 另一类则是在一定条件下人们事先无法准确预知其结果的现象，称为随机现象. 例如，抛掷一枚硬币，人们不能事先预知将出现正面还是反面；买卖股票，人们不能事先预知股市下一个交易日某支股票的价格.

虽然随机现象在一定的条件下可能出现这样或那样的结果，而且在每一次观测之前不能预知该次试验的确切结果，但经过长期的、反复的观察和实践，人们逐渐发现了所谓结果的“不能预知”只是对一次或少数几次观测而言的. 当在相同条件下进行大量重复试验和观测时，试验的结果就会呈现出某种规律性，这就是我们以后所讲的统计规律性. 概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科.

二、随机试验

历史上，研究随机现象统计规律最著名的试验是抛掷硬币的试验. 表 1-1 是历史上抛掷硬币试验的记录.

不难发现，尽管每次抛掷硬币事先无法准确预知将出现正面还是反面，但大量重复试验时，出现正面和出现反面的次数大致相等，即正面出现的频率大致为 0.5，并且随着试验次数的增加，频率会逐渐稳定于 0.5. 随机现象的这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有的规律性便是统计规律性. 这种规律性的存在

表 1-1　历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数 n	正面次数 n_H	正面频率 n_H/n
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

使得利用数学工具研究随机现象成为可能.

为了研究随机现象的统计规律,需要对随机现象进行重复观察,我们把对随机现象的观察称为试验,记为 E. 下面是一些试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2:将一枚硬币连续抛两次,观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_3:掷一颗骰子,观察出现的点数.

E_4:对某一目标进行射击,直至击中为止,观察射击次数.

E_5:观测某种电视机的寿命.

以上试验具有下列共同特点.

(1) 可重复性. 试验可在相同的条件下重复进行.

(2) 可观察性. 每次试验的可能结果不止一个,并可事先明确知道试验的所有可能结果.

(3) 不确定性. 进行试验之前不能确定哪一个结果会出现.

具有上述性质的试验称为随机试验,简称试验.

三、样本空间

随机试验的一切可能基本结果组成的集合称为样本空间,记为 $\Omega=\{\omega\}$,其中 ω 表示基本结果,又称为样本点. 认识随机现象首先要列出它的样本空间.

上述试验 $E_1,\cdots,E_5$ 所对应的样本空间 $\Omega_1,\cdots,\Omega_5$ 为

$$\Omega_1=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\};$$
$$\Omega_2=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\};$$
$$\Omega_3=\{1,2,3,4,5,6\};$$
$$\Omega_4=\{1,2,3,\cdots\};$$
$$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

四、随机事件

一般地,称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的随机事件,简称事件(严格来说,事件应该是 Ω 中满足一定条件的子集合组成的集合类中的元素). 用大写字母

$A,B,C,\cdots$表示事件. 设 A 是一个事件，当且仅当试验中出现的样本点 $\omega\in A$ 时，称事件 A 在该次试验中发生. 例如，在掷一颗骰子的试验中，事件 A 表示出现奇数点，即 $A=\{1,3,5\}$. 如果试验结果为 5 点，则说在该次试验中 A 发生了，如果试验结果为 2 点，则说在该次试验中 A 没有发生. 对一次试验来说，A 是一个可能发生也可能不发生的结果. 这就是随机事件的特点，它的发生具有偶然性.

由于样本空间 Ω 是其自身的最大子集，且包含了全体样本点，故任何一次试验必然会出现 Ω 中的某一样本点，也就是说，在任何一次试验中，Ω 必然会发生，所以我们又把 Ω 称为必然事件. 与之相反，空集$\varnothing$是样本空间 Ω 的最小子集，它不包含任何样本点. 任何一次试验出现的样本点都不属于$\varnothing$，因此，任何一次试验$\varnothing$都不发生，我们把$\varnothing$称为不可能事件. 必然事件和不可能事件已失去了“不确定性”，已不属于随机事件，但为了讨论问题方便起见，我们还是将它们作为随机事件处理，可以理解为随机事件的两个极端情况.

仅含有一个样本点的 Ω 的子集称为基本事件，其他事件可看成是由基本事件复合而成. 比如，掷一颗骰子，观察它出现的点数，共有 6 个基本事件:“点数为 1”，…，“点数为 6”. $A=\{1,3,5\}$可看成由基本事件“点数为 1”，“点数为 3”，“点数为 5”复合而成.

五、事件间的关系与运算

由于事件是样本空间的一个子集，因此事件间的关系与运算可按集合间的关系与运算来处理，下面给出这些关系和运算在概率论中的含义.

1. 包含关系

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或事件 A 包含于事件 B，或称 A 是 B 的子事件，记为 $A\subset B$. 显然，对于任意事件 A 都有

$$\varnothing\subset A\subset\Omega.$$

在掷一颗骰子的试验中，设 $A=\{$出现 6 点$\}=\{6\}$，$B=\{$出现偶数点$\}=\{2,4,6\}$，事件 A 发生必然导致事件 B 发生，所以 $A\subset B$.

2. 相等关系

若事件 A 包含事件 B，且事件 B 又包含事件 A，即 $B\subset A$ 且 $A\subset B$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

在掷一颗骰子的试验中，设 $B=\{$出现偶数点$\}$，$C=\{2,4,6\}$，显然，$B\subset C$ 且 $C\subset B$，所以 $B=C$.

3. 事件的并(和)

“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”这一事件称为事件 A 与事件 B 的并(或

和)，记为 $A\cup B$. $A\cup B$ 是由事件 A 与 B 中所有的样本点组成的新事件，这与集合的并集的含义是一致的，即 $A\cup B=\{\omega|\omega\in A$ 或 $\omega\in B\}$.

在掷一颗骰子的试验中，设 $C=\{2,4,6\}$，$D=\{5,6\}$，则 $C\cup D=\{2,4,5,6\}$.

类似地，"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件的并(或和)，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 至少有一个发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的可列并，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. **事件的交(积)**

"事件 A 与事件 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的交(或积)，记为 $A\cap B$，或 AB. 显然，$A\cap B$ 是由 A 与 B 的公共样本点构成的新事件，即 $A\cap B=\{\omega|\omega\in A$ 且 $\omega\in B\}$.

在掷一颗骰子的试验中 $D=\{5,6\}$，$G=\{1,3,5\}$，则 $D\cap G=\{5\}$.

类似地，"事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生这一事件"称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 这 n 个事件的交(或积)，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $A_1A_2\cdots A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

"可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生"这一事件称为 $A_1,A_2,\cdots$ 的可列交，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. **事件的差**

"事件 A 发生而事件 B 不发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的差，记为 $A-B$. $A-B$ 是由属于 A 而不属于 B 的样本点构成的新事件，即

$$A-B=\{\omega\mid\omega\in A \text{ 且 } \omega\notin B\}.$$

在掷一颗骰子的试验中，$D=\{5,6\}$，$G=\{1,3,5\}$，则 $G-D=\{1,3\}$.

6. **互不相容**

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，也就是说，AB 是不可能事件，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥.

在掷一颗骰子的试验中，$A=\{6\}$，$G=\{1,3,5\}$，$AG=\varnothing$，即事件 A 与 G 不可能同时发生，因此事件 A 与 G 是两个互不相容的事件.

设有事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，如果满足 $A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$ 且 $i,j=1,2,\cdots$，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 两两互不相容.

7. **对立事件**

"事件 A 不发生"这一事件称为事件 A 的对立事件(或逆事件)，记为 $\overline{A}$. 易见.

$\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$. 在一次试验中，如果 A 发生，则 $\overline{A}$ 一定不发生；如果 A 不发生，则 $\overline{A}$ 一定发生，也就是说 A 与 $\overline{A}$ 一定也只能发生其中之一，因而有

$$A\overline{A}=\varnothing,\quad A\cup\overline{A}=\Omega.$$

在掷一颗骰子的试验中，若 $A=\{6\}$，则 $\overline{A}=\{1,2,3,4,5\}$.

两个事件 A 与 B 互为对立事件的充要条件是 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$. 此时有 $\overline{A}=B$，$\overline{B}=A$.

显然，$A-B=A\overline{B}$.

为了给上述的含义以一个直观的几何解释，英国逻辑学家维恩（Venn）提供了一种工具，他使用图示法来表示事件之间的各种关系，称这种图形为维恩图，见图 1-1.

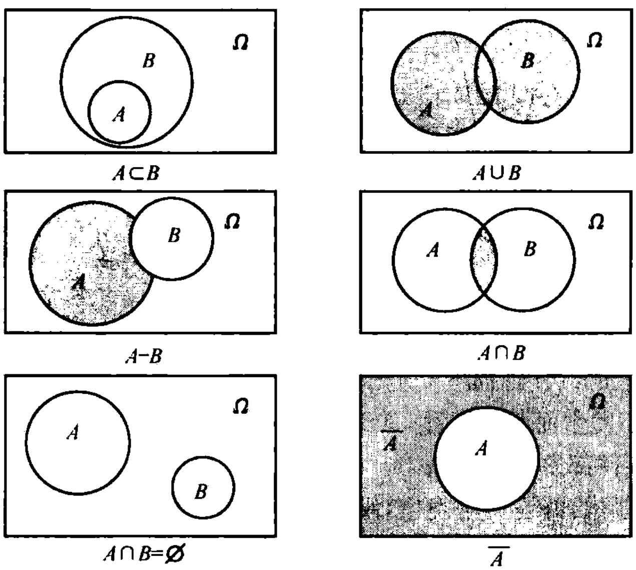


图 1-1

我们把事件间的关系与运算的两种解释对照列表如表 1-2 所示.

表 1-2

符 号	概率论的解释	集合论的解释
$A\subset B$	事件 A 发生必然导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 和集合 B 相等
$A\cup B$	事件 A 和事件 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 和事件 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 与事件 B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	A 的补集

六、事件的运算律

由集合的运算律，不难给出事件间的运算律.设 A,B,C 为同一随机试验 E 中的事件，则有：

(1) 交换律

$$A \cup B = B \cup A,\quad A \cap B = B \cap A.$$

(2) 结合律

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

(3) 分配律

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

(4) 对偶律

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

上述运算律可推广到有限个或可列个事件的情形.

例　设 A,B,C 为随机事件，则下列事件可表示为：

(1) A 发生而 B 与 C 都不发生，$A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$；

(2) A 与 B 发生而 C 不发生，$AB\overline{C}$ 或 $AB-C$；

(3) 三个事件都发生，ABC；

(4) 三个事件恰好有一个发生，$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$；

(5) 三个事件恰好有两个发生，$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(6) 三个事件中至少有一个发生，

$A \cup B \cup C$ 或 $A\overline{B}\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C \cup AB\overline{C} \cup A\overline{B}C \cup \overline{A}BC \cup ABC$；

(7) 三个事件都不发生，$\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ 或 $\overline{A\cup B\cup C}$ 或 $\Omega-(A\cup B\cup C)$；

(8) 三个事件中至少有一个不发生，$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$ 或 $\overline{ABC}$.

1.2　随机事件的概率

一、概率的统计定义

对于一个随机事件来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生.我们希望知道事件在一次试验中发生的可能性有多大，并且希望找到一个合适的数来度量事件在一次试验中发生的可能性大小.为此，首先引入频率，它描述了事件发生的