

万水MSC技术丛书

MSC Software

最新 MSC Nastran 2012 权威教程

# MSC Nastran

## 动力分析指南

田利思 李相辉 马越峰 赵明宇 编著  
姜元庆 李 伟 审校

赠1CD



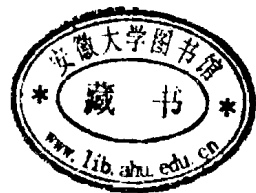
中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

万水 MSC 技术丛书

# MSC Nastran 动力分析指南

田利思 李相辉 马越峰 赵明宇 编著

姜元庆 李 伟 审校



中国水利水电出版社  
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

本书介绍 MSC Nastran 软件在动力学领域的基本理论和使用方法。内容包括动力学分析方法及 Nastran 基本功能介绍, 模态分析, 频率响应分析, 瞬态响应分析, 响应谱与随机响应分析, 复特征值分析, 使用超单元算法的正则模态分析, 动力学建模选项, 非线性正则模态, 动力优化设计, 试验-分析的相关性, 动力学设计分析方法 DDAM, 噪声分析, 非线性求解序列 SOL 400、隐式非线性求解序列 SOL 600、显式非线性求解序列 SOL 700 的基本理论、求解方法及其在动力学分析中的应用。本书配有详细的实例操作说明, 所选实例均使用 MSC Patran 作为前后处理器来创建分析模型和进行分析结果评估。本书配套光盘中含有实例的相关源文件, 以供学习之用。

本书可以作为汽车、航空航天、军工、电子、土木工程、造船、水利、石油、制造和建筑等行业工程技术人员应用 Nastran 软件进行仿真分析的基础教程, 也可作为理工科院校相关专业的学生、教师学习 Nastran 和 Patran 的参考书。

## 图书在版编目 (C I P) 数据

MSC Nastran 动力分析指南 / 田利思等编著. — 北京: 中国水利水电出版社, 2012. 3  
(万水 MSC 技术丛书)  
ISBN 978-7-5084-9527-9

I. ①M… II. ①田… III. ①有限元分析—应用软件, MSC. Nastran IV. ①0241.82-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 039827 号

策划编辑: 杨元泓 责任编辑: 宋俊娥 封面设计: 李 佳

书 名	万水 MSC 技术丛书 MSC Nastran 动力分析指南
作 者	田利思 李相辉 马越峰 赵明宇 编著 姜元庆 李 伟 审校
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路 1 号 D 座 100038) 网址: <a href="http://www.waterpub.com.cn">www.waterpub.com.cn</a> E-mail: <a href="mailto:mchannel@263.net">mchannel@263.net</a> (万水) <a href="mailto:sales@waterpub.com.cn">sales@waterpub.com.cn</a>
经 售	电话: (010) 68367658 (发行部)、82562819 (万水) 北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	北京万水电子信息有限公司
印 刷	北京蓝空印刷厂
规 格	184mm×260mm 16 开本 25.25 印张 622 千字
版 次	2012 年 3 月第 1 版 2012 年 3 月第 1 次印刷
印 数	0001—4000 册
定 价	62.00 元 (赠 1CD)

凡购买我社图书, 如有缺页、倒页、脱页的, 本社发行部负责调换  
版权所有·侵权必究

# 序

从 1963 年到 2011 年，在这整整 48 年当中，MSC 始终引领着 CAE 技术的发展和 CAE 产品的应用。2011 年，MSC Software 公司一如既往地在新产品和新功能方面做到了推陈出新——MSC 系列产品 Nastran 2011、Adams 2011、XFlow、Marc 2011、SimXpert 2011、Actran 和 SimManager 2011 等的陆续问世，都使得 MSC 进一步巩固了在业界的地位。这些产品的新版本不断涌现，让人们看到了一个重装登场的 CAE 武士。

MSC Software 公司大中华区一直重视对技术应用的推动和普及，同时更加关注用户的使用体验以及产品在市场当中的表现，关注中国本土化的一个服务，关注教育市场的培育。从 2010 年起，MSC Software 就在积极地做一些调整：在北京、上海、成都、深圳等办事处加强技术支持力量，同时在中国建立全球研发中心，扩充技术服务团队的力量，亦或是为用户提供行业解决方案，无不体现出 MSC Software 在从“技术输出者”向“系统推广者”方面过渡。

从 2011 年起，MSC Software 开展校园行动，免费向签约的高校赠送 MSC 公司旗舰产品的学生版软件，这些软件除节点略微有限制外，功能与商业版本是一致的，推动校园计划的主要目的是帮助广大的大学生，特别是工科学生提供一个学习和提高技能的环境，为以后走上社会参加工作奠定基础。

为了进一步加强对广大客户的服务，MSC Software 公司大中华区从 2011 年起，陆续组织全新系列中文教材的编写工作。希望所有这些书籍能够为广大读者学习 MSC Software 公司系列软件提供帮助。

一直以来 MSC Nastran 是 MSC Software 公司的旗舰产品，在市场拥有广泛的用户，而 2011 版本则开发了很多增强的功能，例如动力学分析、外噪音、转子动力学、隐式非线性、显式非线性、DDAM、试验与分析的相关性等技术。为了让用户能够尽快了解这些技术，并通过这些技术给自己的工作创造价值，因此作为系列丛书的推出计划，优先出版了 MSC Nastran 中文教材。

本书的编者长期使用 Nastran 进行科研和教学工作，积累了大量的软件使用经验和工程经验，熟悉用户培训的技术支持，了解用户的需求，本书基于 MSC 最新产品编写，提供了大量的实例，对读者而言是一本非常实用的书籍。编者在编写这本书的过程中，认真查阅资料，准备案例，付出了巨大的心血，在此我代表 MSC 大中华区全体同仁对编者表示深深的感谢。

MSC 软件公司 大中华区技术总监  
姜元庆

# 前 言

近年来，有限元仿真分析在工程领域中的应用得到了很大发展，各大理工院校、研究机构都开展了对有限元分析方法的深入研究。Nastran 解算器是当今最为著名的有限元求解程序，拥有最为广泛的用户群，其输入输出格式及计算结果已成为当前 CAE 界的工业标准。但当今市场上针对该部分内容的书并不是很多，为了便于广大用户更好地掌握和使用 MSC Nastran，本书将针对 MSC Nastran 在动力学分析方面的仿真应用做详细介绍。

本书主要从讲解 MSC Nastran 动力学分析基础理论入手，详细讲述 MSC Nastran 在动力学分析方面的基本功能和应用方法。内容包括动力学分析方法及 Nastran 基本功能介绍，模态分析，频率响应分析，瞬态响应分析，响应谱与随机响应分析，复特征值分析，使用超单元算法的正则模态分析，动力学建模选项，非线性正则模态，动力优化设计，试验一分析的相关性，动力学设计分析方法 DDAM，噪声分析，非线性求解序列 SOL 400、隐式非线性求解序列 SOL 600、显式非线性求解序列 SOL 700 的基本理论、求解方法及其在动力学分析中的应用。本书中有大量的 Nastran 应用实例，读者可以在最短的时间内掌握 Nastran 的应用特点，并学以致用。本书可以作为汽车、航空航天、军工、电子、土木工程、造船、水利、石油、制造和建筑等行业工程技术人员应用 Nastran 软件进行仿真分析的基础教程。

MSC Nastran 功能强大应用广泛，并且有很多的前后处理器可供用户选择。本书编者从事有限元分析应用多年，有丰富的 FEA 软件使用经验。本书从动力学基础理论着手，详细讲解了 MSC Nastran 在动力学分析方面的基本使用方法和流程，并结合实际，给出了许多典型例题及说明。通读本书，可以帮助初学者系统掌握 MSC Nastran 的使用方法和基本技巧，并进一步学以致用。由于书中理论部分多以 Nastran 卡片介绍为主，所以建议读者在学习本书之前先要了解一些 Nastran 的基础应用知识，如果遇到难以理解的部分可以参考软件中的“MSC Nastran 快速帮助手册”。

在本书的编写过程中，得到了 MSC Software 中国各办事处的很多同志的大力支持，编者借此机会对 Nastran 资深工程师陈火红、仰蕊雯、刘北南、姜正旭在书籍编写过程中给与的指导和建议表示感谢，并对北京办事处孙丹丹、李道中、陈志伟、李保国以及市场部经理张健女士和 IT 部门主管王彬先生在编书过程给与的各种协助深表谢意。

由于编者水平有限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。

作者

2012 年 1 月于北京

# 目 录

前言

第 1 章 动力学分析方法及 Nastran 基本使用介绍	1	1.6.7 MSC Nastran 基本集合的定义	29
1.1 有限元分析方法介绍	1	1.6.8 模型检查的提示	31
1.1.1 有限单元法的基本思路	2	第 2 章 模态分析	32
1.1.2 有限元法的计算步骤	3	2.1 模态分析目的	32
1.1.3 有限元法的进展与应用	5	2.2 模态分析理论	32
1.2 动力学分析概述	6	2.3 自然模态与固有频率性质	33
1.2.1 动力分析过程浏览	6	2.4 模态能量	34
1.2.2 单自由度系统	7	2.5 特征值解法	34
1.2.3 单自由度系统无阻尼自由振动	8	2.5.1 跟踪法	35
1.2.4 单自由度系统有阻尼自由振动	9	2.5.2 变换法	35
1.2.5 单自由度系统无阻尼简谐振动	10	2.5.3 兰索士 (Lanczos) 法	35
1.2.6 单自由度系统有阻尼简谐振动	11	2.5.4 特征值方法的比较	35
1.2.7 多自由度系统	12	2.5.5 Lanczos 法卡片	36
1.2.8 有限元动力学建模需要考虑的问题	13	2.5.6 模态分析求解控制	36
1.3 MSC Nastran 的由来	13	2.5.7 例子	37
1.3.1 Nastran 程序的起源	13	2.6 动力分析的缩减	39
1.3.2 MSC Nastran 的由来	13	2.6.1 概述	39
1.4 MSC Nastran 动力分析功能介绍	14	2.6.2 MSC Nastran 中使用的降阶方法	39
1.4.1 动力分析功能及特性	14	2.7 刚体模态	44
1.4.2 MSC Nastran 支持的硬件平台	16	2.7.1 刚体模态与刚体向量	44
1.5 MSC Nastran 基本应用流程	17	2.7.2 刚体模态的计算	45
1.5.1 前处理	17	2.7.3 SUPPORT (支撑) 自由度的选择	46
1.5.2 求解	22	2.7.4 SUPPORT (支撑) 自由度的检验	46
1.5.3 后处理	22	2.7.5 MSC Nastran 对刚体模态和刚体 向量的计算	46
1.6 动力学模型输入	23	2.8 模态分析实例	47
1.6.1 MSC Nastran 输入文件结构	23	第 3 章 频率响应分析	56
1.6.2 MSC Nastran 数据卡片格式	23	3.1 动力学分析中的矩阵组集	56
1.6.3 有限元分析手段	23	3.1.1 阻尼矩阵	56
1.6.4 MSC Nastran 常用单元形式	24	3.1.2 直接法	58
1.6.5 耦合质量与集中质量	25	3.1.3 模态法	59
1.6.6 MSC Nastran 基本集合的运算	28		

3.2 频率响应分析	60	5.1.6 强迫位移例子	103
3.2.1 概述	60	5.2 响应谱	106
3.2.2 直接频率响应法	61	5.2.1 概述	106
3.2.3 模态频率响应法	61	5.2.2 响应谱求解控制	107
3.2.4 激励的确定	61	5.2.3 响应谱应用	108
3.2.5 模态频率响应与直接频率响应的比较	69	5.2.4 求解控制	109
3.2.6 SORT1 和 SORT2 输出的对比	70	5.2.5 响应谱实例	110
3.2.7 频率响应求解控制	70	5.3 随机响应分析	129
3.2.8 频变弹簧和阻尼器	71	5.3.1 概述	129
3.3 频率响应分析实例	74	5.3.2 自相关与自谱	130
<b>第 4 章 瞬态响应分析</b>	<b>84</b>	5.3.3 各态历经性随机激励下线性系统 响应计算	130
4.1 直接法瞬态响应分析	84	5.3.4 MSC Nastran 中随机分析的实现	132
4.1.1 过程	84	5.4 随机响应分析实例	133
4.1.2 直接瞬态响应分析中的阻尼	85	<b>第 6 章 复特征值分析</b>	<b>143</b>
4.2 模态法瞬态响应分析	85	6.1 概述	143
4.2.1 过程	85	6.2 理论	143
4.2.2 模态法瞬态响应分析中的阻尼	86	6.3 MSC Nastran 中实现	143
4.2.3 MSC Nastran 中模态法瞬态响应 分析阻尼的输入	86	6.4 求解控制	144
4.2.4 模态法瞬态响应分析数据的提取	87	6.4.1 执行控制	144
4.2.5 模态截断	87	6.4.2 工况控制	144
4.3 瞬态激励	87	6.4.3 数据模型	144
4.3.1 时变载荷	87	6.5 复特征值分析实例	144
4.3.2 载荷的组合	89	<b>第 7 章 使用超单元的正则模态分析</b>	<b>152</b>
4.3.3 DAREA 卡	89	7.1 超单元的概念与定义	152
4.3.4 LSEQ 卡片	90	7.1.1 超单元的概念	152
4.3.5 初始条件	91	7.1.2 在 MSC Nastran 中如何定义部件 超单元	152
4.3.6 TSTEP 卡	92	7.2 例题——钢的冲压	153
4.4 直接法瞬态响应与模态法瞬态响应比较	92	7.2.1 模型及参数	153
4.5 瞬态响应分析实例	93	7.2.2 例题的模型定义	153
<b>第 5 章 响应谱与随机响应分析</b>	<b>101</b>	7.3 超单元应用说明	162
5.1 强迫运动	101	7.3.1 求解过程	162
5.1.1 概述	101	7.3.2 静凝聚理论	163
5.1.2 瞬态分析中的强迫运动	101	7.3.3 使用超单元分析的优点	163
5.1.3 瞬态分析中的大质量法	101	7.3.4 超单元分析的缺点	164
5.1.4 瞬态分析中的大刚度法	102	7.3.5 流程区别	164
5.1.5 瞬态分析中的 LAGRANGE 乘法	102		

7.4 动力分析中可用的超单元缩减方法	169	8.4.2 模态变换	201
7.4.1 缩减程度对比	169	8.4.3 直接矩阵输入	202
7.4.2 Guyan 或静态缩减	169	8.4.4 传递函数	202
7.4.3 各种缩减方法的优点	169	8.4.5 Pickups 和变换器	203
7.4.4 只使用静态缩减的正则模态计算	170	8.4.6 高阶传递函数	203
7.4.5 使用超单元动态缩减的正则模态计算	170	8.4.7 实例	204
7.5 MSC Nastran 的超单元输入卡片	171	8.5 非线性载荷函数 (NOLINI)	207
7.5.1 超单元的内部广义自由度卡: SENQSET	171	8.5.1 标准瞬态求解理论	208
7.5.2 标量点定义卡: SPOINT	171	8.5.2 非线性弹簧实例	208
7.5.3 广义自由度定义卡: QSET	172	8.5.3 依赖于速度的非线性力	209
7.5.4 QSET 卡的替代格式: QSET1	172	8.5.4 非线性瞬态求解的顺序	210
7.5.5 固定分析自由度的定义卡: BSET	173	8.5.5 采用 NOLINI 输入时的一些建议	210
7.5.6 BSET 卡的替代格式: BEST1	174	8.5.6 应用实例——旋转结构的耦合	211
7.5.7 自由的边界自由度定义卡: CSET	175	8.6 动力分析模型调试	213
7.5.8 CSET 卡的替代格式: CSET1	175	8.6.1 建模要点	213
7.6 默认的部件模态综合方法——固定边界法	176	8.6.2 测试动力模型	214
7.7 手工求解示例	177	第 9 章 非线性正则模态	229
7.8 超单元分析实例	182	9.1 带微分刚度的正则模态	229
第 8 章 动力学建模选项	191	9.2 有预载荷结构的正则模态示例	230
8.1 概述	191	9.2.1 使用 SOL106 计算	230
8.1.1 动力分析的策略	191	9.2.2 使用 SOL103 计算	236
8.1.2 规划分析	191	第 10 章 动力优化设计	241
8.2 质量建模	192	10.1 基本知识	241
8.2.1 质量的基本定义	192	10.1.1 优化设计的概念	241
8.2.2 质量数据输入选项	192	10.1.2 优化设计的作用	241
8.2.3 耦合的质量矩阵项	193	10.1.3 MSC Nastran 中“优化设计”的基本特性	241
8.2.4 移动坐标系的质量效应	194	10.1.4 MSC Nastran 结构优化的优势所在	241
8.3 阻尼效应建模	196	10.1.5 MSC Nastran 支持的优化功能	242
8.3.1 粘性阻尼	197	10.1.6 基本优化问题的描述	242
8.3.2 结构阻尼	197	10.1.7 MSC Nastran 中设计优化的输入控制段	242
8.3.3 模态阻尼	198	10.1.8 优化问题中常用的模型数据段输入卡	243
8.3.4 非线性阻尼	199	10.2 例题	243
8.4 附加点和传递函数	200	第 11 章 试验—分析的相关性	258
8.4.1 EPOINT 集	201	11.1 试验—分析相关性的介绍	258



11.2 完整的试验—分析过程.....	258	13.2.3 MSC Nastran 外噪声分析.....	280
11.2.1 试验前的规划.....	258	13.3 应用实例.....	281
11.2.2 试验后的评估.....	259	13.3.1 MSC Nastran 内噪声分析案例.....	281
11.3 模型的改进.....	264	13.3.2 MSC Nastran 外噪声分析案例.....	301
11.3.1 强制的人为干预法.....	264	<b>第 14 章 高级非线性分析 SOL 400.....</b>	<b>337</b>
11.3.2 灵敏度矩阵法.....	264	14.1 概述.....	337
11.3.3 设计优化法.....	265	14.2 非线性理论.....	337
11.3.4 应用举例.....	265	14.2.1 非线性分析.....	337
<b>第 12 章 动力学设计分析方法 DDAM.....</b>	<b>268</b>	14.2.2 非线性方程组的迭代方法.....	338
12.1 概述.....	268	14.3 非线性分析的控制卡片.....	343
12.2 理论背景.....	268	14.4 瞬态动力响应分析实例.....	344
12.3 DDAM 分析.....	270	<b>第 15 章 隐式非线性分析 SOL 600.....</b>	<b>354</b>
12.3.1 分析流程概述.....	270	15.1 概述.....	354
12.3.2 使用 Patran 前处理器进行 DDAM 分析.....	270	15.2 隐式非线性分析的步骤.....	354
12.3.3 应用实例.....	272	15.3 钥匙扣插—拔接触模拟分析实例.....	355
<b>第 13 章 噪声分析.....</b>	<b>277</b>	<b>第 16 章 显式非线性分析 SOL 700.....</b>	<b>368</b>
13.1 MSC Nastran 噪声分析的理论背景.....	277	16.1 概述.....	368
13.2 使用 MSC Nastran 进行噪声分析.....	277	16.2 显式积分求解算法的原理.....	369
13.2.1 噪声学基础介绍.....	277	16.3 侵彻分析实例.....	369
13.2.2 MSC Nastran 流固耦合分析.....	278	16.4 碰撞分析实例.....	384

# 第 1 章 动力学分析方法及 Nastran 基本使用介绍

## 1.1 有限元分析方法介绍

计算机软硬件技术的迅猛发展，给工程分析、科学研究以至人类社会带来急剧的革命性变化，数值模拟即为这一技术革命在工程分析、设计和科学研究中的具体表现。数值模拟技术通过汲取当今计算数学、力学、计算机图形学和计算机硬件发展的最新成果，根据不同行业的需求，不断扩充、更新和完善。

近五十年来，计算机计算能力的飞速提高和数值计算技术的长足进步，诞生了商业化的有限元数值分析软件，并发展成为一门专门的学科——计算机辅助工程 CAE (Computer Aided Engineering)。这些商品化的 CAE 软件具有越来越人性化的操作界面和易用性，使得这一工具的使用者由学校或研究所的专业人员逐步扩展到企业的产品设计人员和分析人员，CAE 在各个工业领域的应用也得到不断普及并逐步向纵深发展，CAE 工程仿真在工业设计中的作用变得日益重要。许多行业中已经将 CAE 分析方法和计算要求设置在产品研发流程中，作为产品上市前必不可少的环节。CAE 仿真在产品开发、研制与设计及科学研究中已显示出明显的优越性：

- CAE 仿真可以有效缩短新产品的研发周期；
- 虚拟样机的引入减少了实物样机的试验次数；
- 大幅度地降低产品研发成本；
- 在精确的分析结果指导下制造出高质量的产品；
- 能够快速地对设计变更作出反应；
- 能充分地 CAD 模型相结合并对不同类型的问题进行分析；
- 能够精确地预测出产品的性能；
- 增加产品和工程的可靠性；
- 采用优化设计，降低材料的消耗或成本；
- 在产品制造或工程施工前预先发现潜在的问题；
- 模拟各种试验方案，减少试验时间和经费；
- 进行机械事故分析，查找事故原因等。

当前流行的商业化 CAE 软件有很多种，国际上早在 20 世纪 50 年代末、60 年代初就投入大量的人力和物力开发具有强大功能的有限元分析程序。其中最为著名的是由美国国家宇航局 (NASA) 在 1965 年委托美国计算机科学公司 (Computer Science Corporation) 和 MacNeal-Schwendler Corporation (即 MSC) 开发的 Nastran 有限元分析系统。该系统发展至今已有几十个版本，是目前世界上规模最大、功能最强的有限元分析系统。从那时到现在，世界各地的研究机构和大学也开发了一批专用或通用有限元分析软件。除了 Nastran 以外，主要有德国的 ASKA、英国的 PAFEC、法国的 SYSTUS、美国的 ABAQUS、ADINA、ANSYS、BERSAFE、

BOSOR、COSMOS、ELAS、MARC 和 STARDYNE 等公司的产品。虽然软件种类繁多，但是万变不离其宗，其核心求解方法都是有限单元法，也简称为有限元法 (Finite Element Method)。

### 1.1.1 有限单元法的基本思路

有限元法的基本思路可以归结为：将连续系统分割成有限个分区或单元，对每个单元提出一个近似解，再将所有单元按标准方法加以组合，从而形成原有系统的一个数值近似系统，也就是形成相应的数值模型。

下面用在自重作用下的等截面直杆来说明有限元法的思路。

#### 1. 等截面直杆在自重作用下的材料力学解答

受自重作用的等截面直杆如图 1-1 所示，杆的长度为  $L$ ，截面积为  $A$ ，弹性模量为  $E$ ，单位长度的重量为  $q$ ，杆的内力为  $N$ 。试求：杆的位移分布，杆的应变和应力。

$$N(x) = q(L - x)$$

$$dL(x) = \frac{N(x)dx}{EA} = \frac{q(L - x)dx}{EA}$$

$$u(x) = \int_0^x \frac{N(x)dx}{EA} = \frac{q}{EA} \left( Lx - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{q}{EA} (L - x)$$

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{q}{A} (L - x)$$

#### 2. 等截面直杆在自重作用下的有限元法解答

##### (1) 连续系统离散化。

如图 1-2 所示，将直杆划分成  $n$  个有限段，有限段之间通过公共点相连接。在有限元法中，将两段之间的公共连接点称为节点，将每个有限段称为单元。节点和单元组成的离散模型就称为对应于连续系统的“有限元模型”。

有限元模型中的第  $i$  个单元，其长度为  $L_i$ ，包含第  $i$ 、 $i+1$  个节点。

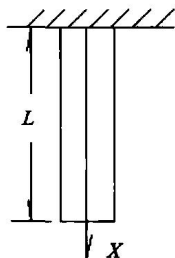


图 1-1 受自重作用的等截面直杆

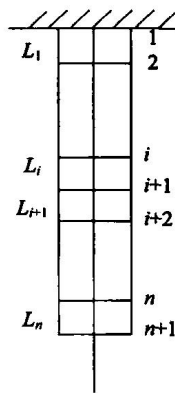


图 1-2 离散后的直杆

(2) 用单元节点位移表示单元内部位移。

第  $i$  个单元中的位移用所包含的节点位移来表示，

$$u(x) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i}(x - x_i)$$

其中  $u_i$  为第  $i$  节点的位移， $x_i$  为第  $i$  节点的坐标。第  $i$  个单元的应变为  $\varepsilon_i$ ，应力为  $\sigma_i$ ，内力为  $N_i$ ，则

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{du}{dx} = \frac{u_{i+1} - u_i}{L_i} \\ \sigma_i &= E\varepsilon_i = \frac{E(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \\ N_i &= A\sigma_i = \frac{EA(u_{i+1} - u_i)}{L_i} \end{aligned}$$

(3) 把外载荷归集到节点上。

把第  $i$  单元和第  $i+1$  单元重量的一半  $\frac{q(L_i + L_{i+1})}{2}$ ，归集到

第  $i+1$  节点上，如图 1-3 所示。

4) 建立节点的力平衡方程

对于第  $i+1$  节点，由力的平衡方程可得：

$$N_i - N_{i+1} = \frac{q(L_i + L_{i+1})}{2}$$

令  $\lambda_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$ ，并将式 (1-5) 代入得：

$$-u_i + (1 + \lambda_i)u_{i+1} - \lambda_i u_{i+2} = \frac{q}{2EA} \left(1 + \frac{1}{\lambda_i}\right) L_i^2$$

根据约束条件， $u_1 = 0$ 。

对于第  $n+1$  个节点，

$$N_n = \frac{qL_n}{2} - u_n + u_{n+1} = \frac{qL_n^2}{2EA}$$

建立所有节点的力平衡方程，可以得到由  $n+1$  个方程构成的方程组，可解出  $n+1$  个未知的节点位移。

### 1.1.2 有限元的计算步骤

有限元法的计算步骤归纳为以下三个基本步骤：网格划分、单元分析、整体分析。

#### 1. 网格划分

有限元法的基本做法是用有限个单元体的集合来代替原有的连续体。因此首先要对弹性体进行必要的简化，再将弹性体划分为有限个单元组成的离散体。单元之间通过节点相连接。由单元、节点、节点连线构成的集合称为网格。

通常把三维实体划分成四面体或六面体单元的实体网格，平面问题划分成三角形或四边形单元的面网格，如图 1-4 至图 1-6 所示。

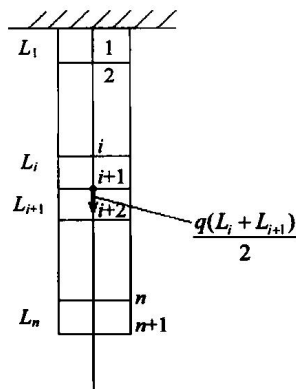


图 1-3 集中单元重量

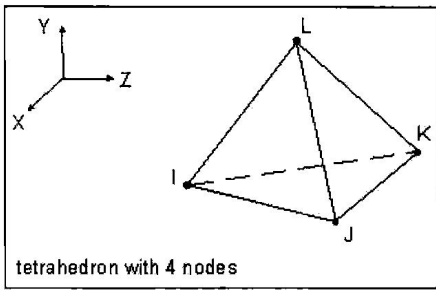


图 1-4 四面体四节点单元

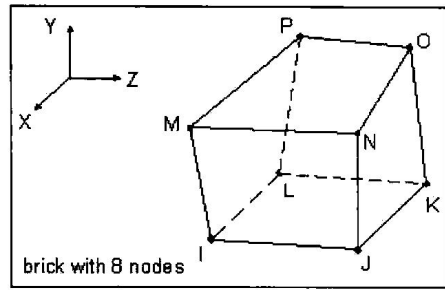


图 1-5 六面体八节点单元

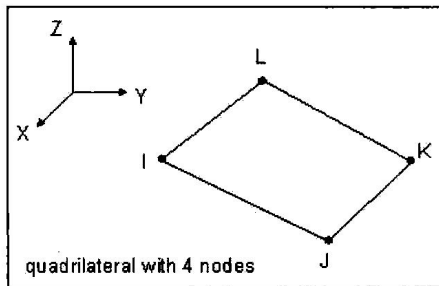


图 1-6 四边形四节点单元

## 2. 单元分析

对于弹性力学问题，单元分析就是建立各个单元的节点位移和节点力之间的关系式。

由于将单元的节点位移作为基本变量，进行单元分析首先要为单元内部的位移确定一个近似表达式，然后计算单元的应变、应力，再建立单元中节点力与节点位移的关系式。

以平面问题的三角形三节点单元为例，见图 1-7。单元有三个节点 I、J、M，每个节点有两个位移  $u$ 、 $v$  和两个节点力  $U$ 、 $V$ 。

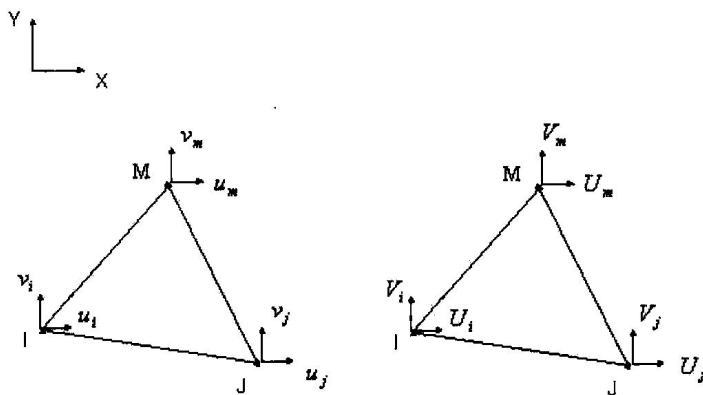


图 1-7 三角形三节点单元

单元所有节点位移、节点力，可以表示为节点位移向量和节点力向量 (vector):

$$\text{节点位移 } \{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad \text{节点力 } \{F\}^e = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}$$

单元的节点位移和节点力之间的关系用张量 (tensor) 来表示,

$$\{F\}^e = [K]^e \{\delta\}^e$$

### 3. 整体分析

对由各个单元组成的整体进行分析, 建立节点外载荷与节点位移的关系, 以解出节点位移, 这个过程称为整体分析。同样以弹性力学的平面问题为例, 如图 1-8 所示, 在边界节点  $i$  上受到集中力  $P_x^i$ 、 $P_y^i$  作用。节点  $i$  是三个单元的结合点, 因此要把这三个单元在同一节点上的节点力汇集在一起建立平衡方程。

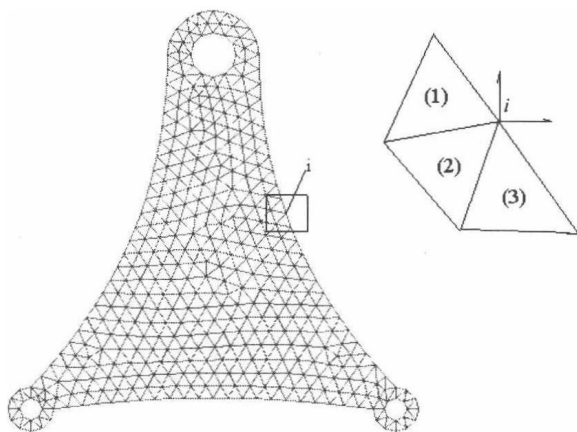


图 1-8 整体分析

$i$  节点的节点力:

$$U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)} = \sum_e U_i^{(e)}$$

$$V_i^{(1)} + V_i^{(2)} + V_i^{(3)} = \sum_e V_i^{(e)}$$

$i$  节点的平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \sum_e U_i^{(e)} &= P_x^i \\ \sum_e V_i^{(e)} &= P_y^i \end{aligned} \right\}$$

#### 1.1.3 有限元法的进展与应用

有限元法不仅能应用于结构分析, 还能解决归结为场问题的工程问题, 从 20 世纪 60 年

代中期以来,有限元法得到了巨大的发展,为工程设计和优化提供了有力的工具。当今国际上 FEA 方法和软件发展呈现出以下一些趋势特征:

- 从单纯的结构力学计算发展到求解许多物理场问题。有限元分析方法最早是从结构化矩阵分析发展而来,逐步推广到板、壳和实体等连续体固体力学分析,实践证明这是一种非常有效的数值分析方法。而且从理论上也已经证明,只要用于离散求解对象的单元足够小,所得的解就可足够逼近于精确值。所以近年来有限元方法已发展到流体力学、温度场、电传导、磁场、渗流和声场等问题的求解计算,最近又发展到求解多个交叉学科的问题。例如比较常见的是将温度场和结构场之间进行耦合计算,确定由于温度场分布不均匀引起的结构应力和变形等。
- 由求解线性工程问题进展到分析非线性问题。随着科学技术的发展,线性理论已经远远不能满足设计的要求。例如建筑行业中的高层建筑和大跨度悬索桥的出现,就要求考虑结构的大位移和大应变等几何非线性问题;航天和动力工程的高温部件存在热变形和热应力,也要考虑材料的非线性问题;诸如塑料、橡胶和复合材料等各种新材料的出现,仅靠线性计算理论就不足以解决遇到的问题,只有采用非线性有限元算法才能解决。众所周知,非线性的数值计算是很复杂的,它涉及到很多专门的数学问题和运算技巧,很难为一般工程技术人员所掌握。为此近年来国外一些公司花费了大量的人力和投资开发求解非线性问题的分析功能,并广泛应用于工程实践。
- 增强可视化的前后处理功能。早期有限元分析软件的研究重点在于推导新的高效求解方法和高精度的单元。随着数值分析方法的逐步完善,尤其是计算机运算速度的飞速发展,整个计算系统用于求解运算的时间越来越少,而准备数值模型和处理计算结果的时间占整个分析工程的比例越来越高。据统计,整个分析流程中,前处理占用的工作时间大致在 80%,而加上后处理部分,占用的时间就要超过 95%。因此目前几乎所有的商业化有限元程序系统都有功能很强的前后处理模块与之相配合。在强调“可视化”的今天,很多程序都建立了对用户非常友好的 GUI (Graphics User Interface),使用户能以可视图形方式直观快速地进行网格自动划分,生成有限元分析所需数据,并按要求将大量的计算结果整理成变形图、等值分布云图,便于极值搜索和所需数据的列表输出。
- 与 CAD 软件的无缝集成。当今有限元分析系统的另一个特点是与通用 CAD 软件的集成使用——即在用 CAD 软件完成部件和零件的造型设计后,自动生成有限元网格并进行计算,如果分析的结果不符合设计要求则重新进行造型和计算,直到满意为止,从而极大地提高了设计水平和效率。今天,工程师可以在集成的 CAD 和 FEA 软件环境中快捷地解决一个在以前无法应付的复杂工程分析问题。所以当今所有的商业化有限元系统商都开发了和著名的 CAD 软件(例如 Unigraphics、Pro/ENGINEER、SolidEdge、SolidWorks 等)的接口。

## 1.2 动力学分析概述

### 1.2.1 动力分析过程浏览

动力学分析过程如图 1-9 所示。

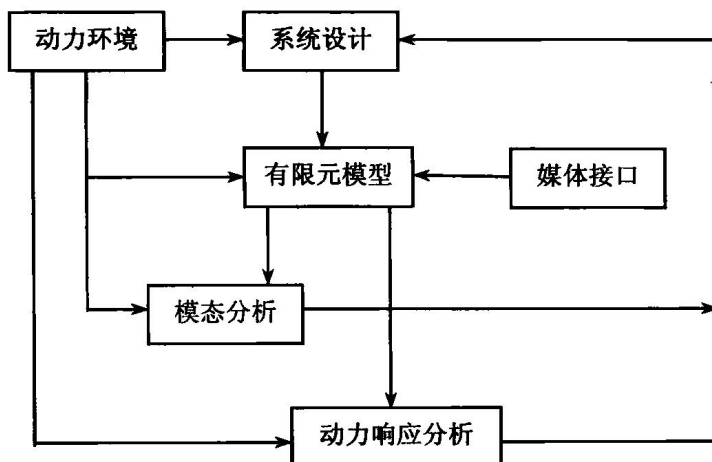


图 1-9 动力分析过程

## 1.2.2 单自由度系统

### 1. 动力学方程

$$m\ddot{u}(t) + b\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) + n(\dot{u}, u)$$

其中,  $m$  为质量 (惯性);

$b$  为阻尼 (能量耗散);

$k$  为刚度 (恢复力);

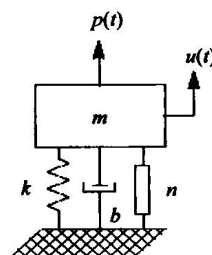
$n$  为非线性恢复力;

$p$  为作用力;

$u$  为位移;

$\ddot{u}$  为加速度;

$\dot{u}$  为速度。



通常, 作用力  $p$ 、位移  $u$ 、速度  $\dot{u}$ 、加速度  $\ddot{u}$  为时间函数,  $m$ 、 $b$ 、 $k$  为常数, 非线性恢复力  $n$  为  $u$ 、 $\dot{u}$  的函数。

### 2. 单位

#### (1) 基本单位。

长度  $L$  (英寸, 米), 质量  $M$  (SLUG, 千克), 时间  $T$  (秒)

基本单位和推导单位的量纲如下:

$m$	$M$
$b$	$MT^{-1}$
$k$	$MT^{-2}$
$p$	$MT^{-2}$
$u$	$L$
$\dot{u}$	$LT^{-1}$
$\ddot{u}$	$LT^{-2}$

#### (2) 常用变量的工程单位制。

常用变量的工程单位制如表 1-1 所示。



表 1-1 常见变量的工程单位制

变量	量纲	英制单位	国际单位
长度	L	in	m
质量	M	lb-sec <sup>2</sup> /in	kg
时间	T	sec	sec
面积	L <sup>2</sup>	in <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>
体积	L <sup>3</sup>	in <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>
速度	LT <sup>-1</sup>	in/sec	m/sec
加速度	LT <sup>-2</sup>	in/sec <sup>2</sup>	m/sec <sup>2</sup>
转角	-	rad	rad
角速度	T <sup>-1</sup>	rad/sec	rad/sec
角加速度	T <sup>-2</sup>	rad/sec <sup>2</sup>	rad/sec <sup>2</sup>
圆频率	T <sup>-1</sup>	rad/sec	rad/sec
频率	T <sup>-1</sup>	rad/sec	rad/sec
特征值	T <sup>-2</sup>	rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>	rad <sup>2</sup> /sec <sup>2</sup>
相角	-	deg	deg
力	MLT <sup>-2</sup>	lb	N
重力	MLT <sup>-2</sup>	lb	N
弯矩	ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>	in-lb	N-m
密度	ML <sup>-3</sup>	lb-sec <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>	kg/m <sup>3</sup>
杨氏模量	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	Pa; N/m <sup>2</sup>
泊松比	-	-	-
剪切模量	ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup>	lb/in <sup>2</sup>	Pa; N/m <sup>2</sup>
面积惯量	L <sup>4</sup>	in <sup>4</sup>	m <sup>4</sup>
扭转常量	L <sup>4</sup>	in <sup>4</sup>	m <sup>4</sup>
质量惯量	ML <sup>2</sup>	in-lb-sec <sup>2</sup>	kg-m <sup>2</sup>
刚度	MT <sup>-2</sup>	lb/in	N/m
粘性阻尼系数	MT <sup>-1</sup>	lb-sec/in	N-sec/m
扭转常量	-	-	-

L 表示长度，M 表示质量，T 表示时间，- 表示无量纲。

注意：首先，计算中需要注意单位制要统一；其次，动力学分析中质量与阻尼单位制最容易出错；最后，MSC Nastran 不内置检验单位的功能，分析人员需要自行核实单位的统一性。

### 1.2.3 单自由度系统无阻尼自由振动

#### 1. 动力学方程

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$