概率与統計

习题解答

姚平中
韩之俊　肖　　参　编
叶慈楠　李泳姬　校

南京现场统计研究会
一九八三年十月

目　录

第一章　随机事件及其概率

习　题　一

1.1　随机现象具有什么样的性质？试举出一两个随机现象的例子。

1.2　从装有3个红球4个黑球的盒子中依次取出两球，令三个事件是：

A ——第一次取出红球，第二次取出黑球；

B ——两次取出同样颜色的球；

C ——两次都是红球。

问：这三个事件中，哪两个是相斥的，哪两个是相容的？

1.3 有两个盒子，第一个装有4个红球，2个白球；第二个装有1个红球，3个白球。开始先任取一个盒子，再从中依次取出两个球。试写出这个试验的基本事件与样本空间。

1.4 在有三个孩子的家庭中，写出男孩个数以及孩子们性别的样本空间。

1.5 将三个不同的球随机地放入两个箱子里。试写出这个试验的样本空间。若事件A表示每个箱子中至少有一球，写出事件A所包含的样本点。

1.6 A、B、C三人各带一份礼品，记为a、b、c。把三人的礼品集中在一起凭抽签领取。设事件E表示谁都没有抽到自己所带的礼品，写出事件E所包含的样本点。

1.7 甲乙两人对奕，只要一人连胜两局，对奕结束。试写出此对奕的样本空间。

2.1 一个人有n把钥匙，其中只有一把能打开锁。他逐个地试开，于是可能要1次，2次，……，n次才能把门打开。试证明这n种不同结果的概率都是$1/n$。

2.2 若n个人站成一行，其中有A、B二人。问：夹在A和B之间恰有r个人的概率是多少？如果他们不站成一行而是站成一圈，且假定$r<\frac{n-2}{2}$，试证这个概率为$\frac{1}{n-1}$。

2.3 口袋内放有两个伍分，三个贰分，五个壹分的硬币。任取5个，求总币面值不小于一角的概率。

2.4 一停车场有排成一列的N个停车位置。一司机出车回来发现所有位置均空着，就任意停放在一个位置（不在两端）。当他过一会再回来的时候，发现N个位置中恰巧有r辆车。求该司机的车两相邻位置是空着的概率。

2.5 往书架上任意放10本书，求指定的四本书放在一起的概率。

2.6 某城市自行车分别从00001到10000编号，共一万辆。问：偶然遇到一辆自行车，其牌照号码中没有数字8的概率是多少？

2.7 甲乙二人相约在0到T这段时间内，在预定地点会面。先到的人等候另一人，经过

时间t（$t<T$）后离去。求二人能会面的概率。

2.8 在半径为R的圆内画平行弦，如果这些弦与垂直于弦的直径的交点在该直径上的位置是等可能的，求任意画的弦的长度大于R的概率。

2.9 在一直线上随机地取三点A、B、C。问：点B在A与C之间的概率是多少？

2.10 将一根木棍任意折成三段，试求此三段能构成三角形的概率。

2.11 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘船的码头，它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的。如果甲船的停泊时间是一小时，乙船是二小时，求它们中任何一艘都不需要等候码头空出的概率（该码头不让另外的船停泊）。

3.1 掷一颗骰子，设事件ω_i表示获得i点（$i=1, 2, \cdots, 6$），事件A表示获得偶数点，事件B表示获得不小于4的点。试写出样本空间Ω以及事件$A+B$，AB，$\overline{A}$，$\overline{B}$所包含的样本点。

3.2 从一批产品中依次取两件，事件A表示第一次抽得正品，事件B表示第二次抽得正品。试说明下列等式两端所表示的各种事件的意义。

（1） $\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A+B}$；　　（2） $\overline{A}+\overline{B}=\overline{AB}$；

（3） $\overline{\overline{A}\,\overline{B}}=A+B$；　　（4） $\overline{\overline{A}+\overline{B}}=AB$。

3.3 从一批产品中依次取三件产品，事件A、B、C表示第一、二、三次取得正品。试说明下列各事件的意义。

（1） $A(B+C)$；　　（2） $A+(B+C)$；　　（3） $\overline{(A+B)}+C$。

3.4 向三个相邻的军火库投掷一枚炸弹，命中第一军火库的概率为0.025，命中其余两个的概率均为0.1。只要命中一个，另两个军火库也要爆炸。求军火库发生爆炸的概率。

3.5 靶上安置指示灯，中靶时灯就亮。今有三名射手同时对靶射击，各射手的中靶概率分别为0.7，0.5，0.4。求灯亮的概率。

3.6 某厂产品有4%是废品，而在100件合格品中有75件一等品。求任取一件产品是一等品的概率。

3.7 设某种动物活到20岁的概率为0.8，活到25岁的概率为0.4。问：现龄20岁的这种动物活到25岁的概率是多少？

3.8 证明：如果$P(A|B)>P(A)$，则$P(B|A)>P(B)$。

3.9 证明：当$P(A)=a$，$P(B)=b$时，有

$$P(A|B)\geqslant(a+b-1)/b。$$

3.10 轰炸机要完成它的使命必须是驾驶员找到了目标，同时投弹员投中了目标。设驾驶员甲和乙找到目标的概率分别为0.9和0.8；又投弹员丙和丁在驾驶员找到目标的条件下投中目标的概率分别为0.7和0.6。现在要装备两架轰炸机的人员，问：甲、乙、丙、丁怎样配合才能使完成使命有较大的概率？又这个配合的概率比另一配合的概率大多少？（注意，只要有一架飞机投中目标即完成使命）

3.11 有k组卡片，每组n张：分别写上1，2，……，n的号码。现分别从每组中任取

一张，组成一组（包含k张卡片）。设$n\geqslant 2$，$k\geqslant 2$，求以下事件发生的概率。

（1）1号卡片均未被抽出；

（2）至少抽出一张1号卡片；

（3）至少抽出一张1号卡片，而2号卡片一张也未抽到；

（4）1号与2号卡片一张也未抽到；

（5）1号与2号卡片都至少抽出一张。

4.1 两台车床加工同样的零件，第一台出现废品的概率为0.03，第二台出现废品的概率为0.02。加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍，求任意取出的一个零件是合格品的概率。

4.2 甲乙丙三门火炮同时独立地对同一坦克各射击一发炮弹，命中概率分别为0.4，0.5，0.7。如果有一发命中，击毁坦克的概率为0.2，两发命中为0.6，三炮都命中，坦克必然被击毁。求坦克被击毁的概率。

4.3 已知在1000个灯泡中坏灯泡的个数从0到5是等可能的，求从1000个灯泡中任意取出的100个都是好灯泡的概率。

4.4 盒中放有12个乒乓球，其中9个是新的。第一次比赛时从中任取3个，比赛后仍放回盒中。第二次比赛时再从盒中任取3个，求第二次都取得新球的概率。

4.5 发报台分别以概率0.6及0.4发出信号“·”及“—”。由于通讯系统受到干扰，当发出信号“·”时，收报台以概率0.8及0.2收到信号“·”及“—”，又当发出信号“—”时，收报台以概率0.9及0.1收到信号“—”及“·”。求：

（1）当收报台收到信号“·”时，发报台确系发出信号“·”的概率。

（2）当收报台收到信号“—”时，发报台确系发出信号“—”的概率。

4.6 假定200人当中有一人患癌。用一种药物进行瘆断，当确实有癌时呈阳性反应的概率是0.95，没有癌时呈阳性反应的概率是0.05。现从一群人当中任抽一人检查，药物呈阳性反应。求此人确实患有癌的概率。

4.7 四个工厂生产同样的产品放在一起，它们的合格率分别为0.90，0.85，0.70，0.95。这堆产品中各工厂产品所佔百分比分别为0.2，0.1，0.5，0.2。从中任取一件，求该件是合格品的概率。

4.8 三架飞机：一架长机，两架僚机，一同飞往某地进行轰炸。但要到达目的地，非有无线电导航不可，而只有长机具有此设备。一旦到达目的地各机将独立地进行轰炸，且炸毁目标的概率均为0.3。在到达目的地前必须经过高射炮阵地上空。此时任一飞机被击落的概率均为0.2，求目标被炸毁的概率。

4.9 甲乙两工人生产同样的零件，产品分别置放，废品率分别为0.001，0.002。技术员任抽一件检查发现是合格品后又在该堆取一件，求此零件是不合格品的概率。

5.1 4枚反坦克导弹对坦克射击，每枚导弹命中坦克的概率均为0.85，摧毁坦克需要命中两发，求摧毁坦克的概率。

5.2 生产某种产品具有稳定的废品率2%。今抽4件进行检查，求：

（1）其中没有一件废品的概率；

（2）其中恰有一件废品的概率；

（3）至少有一件废品的概率。

5.3 四门反坦克炮同时独立地对一坦克各射击一发炮弹，各炮命中概率皆为0.7，已知命中一发时毁歼坦克的概率为$\frac{1}{3}$，命中二发时为$\frac{2}{3}$，命中三发时为1。求毁歼坦克的概率。

5.4 电灯泡使用时数在1000小时以上的概率为0.2，求三个灯泡在使用1000小时以后最多只有一个损坏的概率。

5.5 甲乙两个篮球运动员投篮命中率分别为0.7及0.6。每人投篮3次，求：

（1）二人进球数相等的概率；

（2）甲比乙进球数多的概率。

5.6 甲乙二人独立地各抛n次硬币，求两人出现正面次数相同的概率。

5.7 六门制高炮连独立地同时对一飞机射击一发炮弹，每门炮命中概率皆为0.2。已知命中m发时飞机被击落的概率为$G(m)=1-0.8^{m}$，求飞机被击落的概率。

*6.1 证明：Ω的一切子集组成的集类是一个σ—代数。

*6.2 证明：σ—代数之交仍为σ—代数。

习题一解答

1.1 （略）

1.2 当事件A发生的时候，事件B或事件C都不能发生，故事件A与事件B，与事件C都是相斥的。事件B发生包含了事件C的发生，故事件B与事件C是相容的。

1.3 用Ⅰ表示第一个盒子，Ⅱ表示第二个盒子。

R—取得红球，w—取得白球。画出这个试验的分枝图。

令 $\omega_1=(\mathrm{I}, R, R)$，$\omega_2=(\mathrm{I}, R, w)$，

$\omega_3=(\mathrm{I}, w, R)$，$\omega_4=(\mathrm{I}, w, w)$，

$\omega_5=(\mathrm{II}, R, w)$，$\omega_6=(\mathrm{II}, w, R)$，

$\omega_7=(\mathrm{II}, w, w)$。得样本空间

$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_7\}$

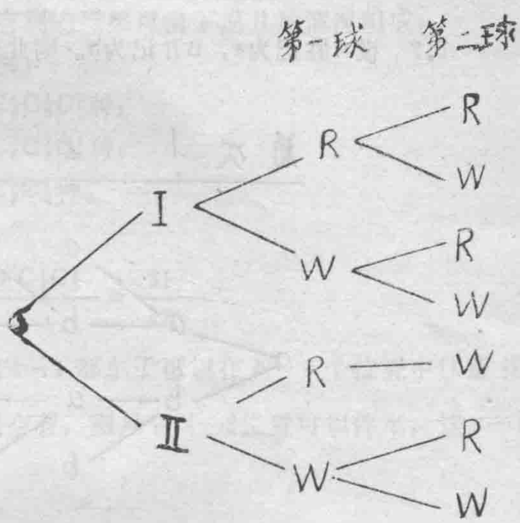

图1.1

1.4 男孩个数的样本空间为 $\Omega=\{0, 1, 2, 3\}$。

用B表示男孩，G表女孩。按年龄从大到小排列时得孩子们性别的样本空间为

$\Omega=\{$BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG$\}$。

1.5 用a, b, c, 表示三个不同的球，Ⅰ，Ⅱ表示两个箱子。将三个球随机地放入Ⅰ，Ⅱ有下表中8种不同的放法：

Ⅰ	abc		ab	bc	ca	a	b	c
Ⅱ		abc	c	a	b	bc	ca	ab

表中第一种放法是a, b, c均放入第一箱，第二箱是空箱，用ω_1表示；第二种放法是第一箱是空箱，第二箱放入a, b, c，用ω_2表示，余类推。于是这个试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \cdots\cdots, \omega_8\}。$$

事件A所包含的样本点为$A=\{\omega_3, \omega_4, \cdots\cdots, \omega_8\}$。

1.6 各取一件礼品有如表中所示的 3! = 6 种取法。谁都没有取到自己礼品所包含的样本点为

$$E=\{(bca), (cab)\}。$$

情况 / 人	1	2	3	4	5	6
A	a	a	b	b	c	c
B	b	c	a	c	a	b
C	c	b	c	a	b	a

1.7 设A胜记为a，B胜记为b。则此试验的分枝图为

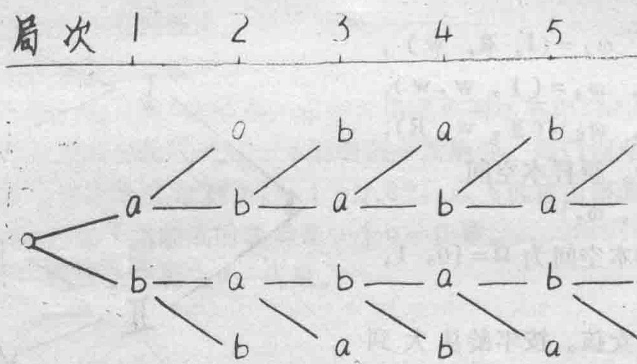

图1.2

无论到什么时候，总可能交替得胜，因此样本空间由无穷多个样本点所组成，即

$$\Omega=\{aa,\ abb,\ abaa,\ ababb,\ \cdots\cdots \\ bb,\ baa,\ babb,\ babaa,\ \cdots\cdots\}$$

2.1 n把钥匙可排成n！种次序，欲恰好第r次打开，所需钥匙必须排在第r次，而其余n－1把钥匙尚有（n－1）！种排法。故所求概率为

$$p=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n} \qquad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

2.2 n个人排成一行共有n！种排法

A、B之间恰有r个人分析如下：

（1）首先从A、B中任选一人共有C_2^1种选法。

（2）如果选出的人排在第i位，则另一人必须排在第（i＋r＋1）位。由于$(i+r+1)\leqslant n$，故$i\leqslant n-(r+1)$，即所选出的人只能有（n－r－1）个位置。

（3）将A、B排定后，其余n－2人可在n－2个位置上任意排列，共有（n－2）！种排法，因而所求概率 $p=\dfrac{C_2^1(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\dfrac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$。

若排成一圈，考虑其对称性，可固定一人，例如固定A，这时总排列法有（n－1）！种。

题设 $r<\frac{n-2}{2}$，B有两个位置可排，其余（n－2）人有（n－2）！种排法。故所求概率为

$$p=\frac{(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}。$$

若限制由A到B沿反（顺）时针方向有r个人，则所求概率为1/(n－1）。

2.3　从10个硬币中任取5个有C_{10}^5种取法。有利的结果可由下面几种情况组成：

（1）两个伍分，再加另外任意三个，共C_8^3种；

（2）一个伍分，一个贰分，三个壹分，共$C_2^1C_3^1C_5^3$种；

（3）一个伍分，两个贰分，二个壹分，共$C_2^1C_3^2C_5^2$种；

（4）一个伍分，三个贰分，一个壹分，共$C_2^1C_5^1$种。

故所求概率为

$$p=\frac{C_8^3+C_2^1C_3^1C_5^3+C_2^1C_3^2C_5^2+C_2^1C_5^1}{C_{10}^5}=\frac{31}{42}$$

2.4　除该司机的车外又来了r－1部车子。这r－1部车子可以在N－1个位置中任意排列。共有A_{N-1}^{r-1}种排法。若该司机两相邻位置必须空着，则只有N—3位置可以停车，这r—1部车共有A_{N-3}^{r-1}种排法，故所求概率为

$$p=\frac{A_{N-3}^{r-1}}{A_{N-1}^{r-1}}=\frac{(N-r)(N-r-1)}{(N-1)(N-2)}。$$

2.5　10本书任意排列为10!种。指定的四本书看成一本书，则七本书任意的排列数为7!种。但这四本书又可任意排列，共有4!种，故所求概率为

$$p=\frac{7!4!}{10!}=\frac{1}{30}。$$

2.6　所有基本事件数为10000。考虑牌照号码的后四位数不出现8，即每一位数都只能从0，1，2，3，4，5，6，7，9这九个数中选取，共有9^4种选法，故所求概率为

$$p=9^4/10^4=\left(\frac{9}{10}\right)^4=0.6561$$

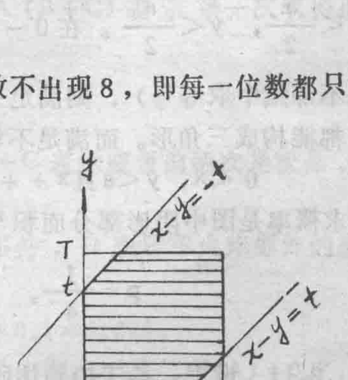

图1.3

2.7　以x，y分别表示甲、乙二人到达的时刻。$0\leqslant x\leqslant T$，$0\leqslant y\leqslant T$，则二人能会面的充要条件是$|x-y|\leqslant t$。以（x，y）表示直角坐系中的点，则所有基本事件可以用边长为T的正方形内的点表示出来；而有利的基本事件可以用这个正方形内介于二直线$x-y=\pm t$内的

区域的点表示出来。故所求概率为

$$p=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2。$$

2.8 设弦AB与垂直于弦AB的直径交于x，则基本事件是$-R\leqslant x\leqslant R$，长度为$2R$。弦长为$2\sqrt{R^2-x^2}$，有利事件是$2\sqrt{R^2-x^2}>R$，解此不等式得$|x|<\frac{\sqrt{3}}{2}R$，有利的基本事件是$-\frac{\sqrt{3}}{2}R<x<\frac{\sqrt{3}}{2}R$，长度为$\sqrt{3}R$。故所求概率为$p=\frac{\sqrt{3}R}{2R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

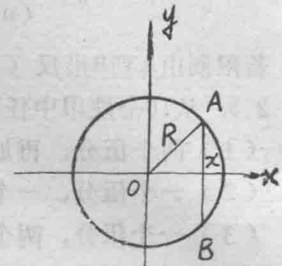

图1.4

2.9 只考虑三点位置，每一样本点就是A，B，C三点的一个排列，故有$3!=6$种。B在A与C之间有两种，故所求概率为$p=\frac{2}{3!}=\frac{1}{3}$。

注意：初看起来是几何概率，实际是古典概型。通过本题提醒我们，解题前首先要分清概型。

2.10 设木棍的长为a，并设三段中两段的长为x及y。则x，y满足$0<x$，$y<a$且$x+y<a$。而三段能构成三角形的充要条件是$x+y>a-x-y$，$(a-x-y)+y>x$，$(a-x-y)+x>y$，整理之得$x+y>\frac{a}{2}$，$x<\frac{a}{2}$，$y<\frac{a}{2}$。在$0-xy$坐标系作此三条直线（不等式中取等号），则满足三不等式的（x，y）的点都能构成三角形。而满足不等式

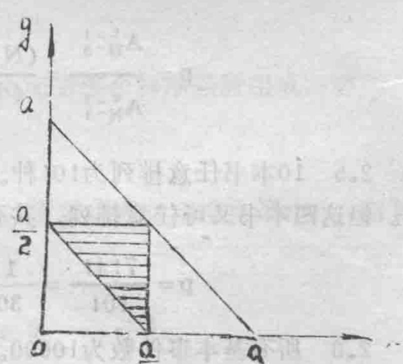

图1.5

$0<x$，$y<a$且$x++y<a$的点(x，y)即为基本事件。

所求概率是图中阴影部分面积与等腰三角形oaa面积之比，

即 $$p=\frac{1}{4}。$$

2.11 设甲、乙二船到达码头的时刻分别为x及y。则x及y均可能在区间〔0，24〕内取任一值。即

$$0\leqslant x，y\leqslant 24。$$

而要求它们中任何一船都不需要等候码头空出，就必须甲比乙早到一小时以上（$y-x\geq 1$），或乙比甲早到两小时以上（$x-y\geq 2$）。在 $0-xy$ 坐标系上作二直线 $y-x=1$，$x-y=2$，如图1.6中阴影部分即为为有利的基本事件，所有可能的基本事件是以边长为24的正方形的面积，故所求概率为

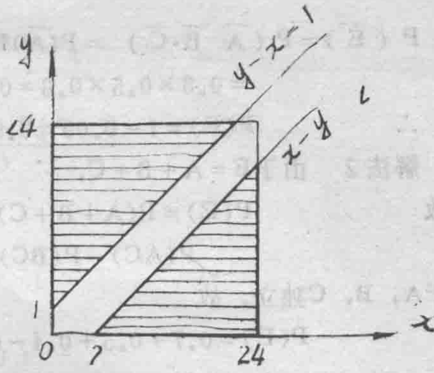

图1.6

$$p=\frac{\frac{1}{2}(24-1)^2+\frac{1}{2}(24-2)^2}{24^2}=0.8793$$

3.1 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$,

$A+B=\{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_5,\ \omega_6\}$,

$AB=\{\omega_4,\ \omega_6\}$,

$\overline{A}=\{\omega_1,\ \omega_3,\ \omega_5\}$,

$\overline{B}=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3\}$。

3.2 （1） $\overline{A}\ \overline{B}$表示两次均未抽得正品。$\overline{A+B}$ 表示至少有一次是正品的对立事件，即两次都未抽得正品。

（2）$\overline{A}+\overline{B}$表示至少有一次是次品，它等价于两次都是正品的对立事件。

（3） $\overline{\overline{A}\ \overline{B}}$ 表示两次都是次品的对立事件，等价于至少有一次是正品。

（4）$\overline{\overline{A}+\overline{B}}$ 表示至少有一次是次品的对立事件，等价于两次都抽得正品。

3.3 （1）$B+C$表示第二、三次至少有一次取得正品，$A(B+C)$ 表示第一次取得正品且二，三次至少有一次取得正品。

（2）$A+(B+C)$ 表示三次中至少有一次取得正品。

（3） $\overline{(A+B)}$ 表示第一、二次都取得次品，$\overline{(A+B)}+C$ 表示或者前两次是次品，或者第三次是正品。

3.4 以A，B，C分别表示炸弹中第一，二，三军火库的事件，D 表示军火库爆炸的事件。则$D=A+B+C$，显然A，B，C相斥，故

$$P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=0.025+0.1+0.1=0.225。$$

3.5 解法1 事件A，B，C分别表示甲、乙、丙三名射手中靶，于是 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.5$，$P(C)=0.4$。

事件E表示灯亮，则 $P(E)=1-P(\overline{E})$ 。

但 $P(\overline{E})=P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})$

$$=0.3\times0.5\times0.6=0.09$$

$\therefore\quad P(E)=1-0.09=0.91$

解法2　由于$E=A+B+C$,

故 $$P(E)=P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)。$$

由于A，B，C独立，故

$$P(E)=0.7+0.5+0.4-0.7\times0.5-0.7\times0.4-0.5\times0.4+0.7\times0.5\times0.4=0.91$$

解法3　设事件E_i表示三人射击时命中 i 发（i=1，2，3）。

则 $$E_1=A\overline{B}\ \overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\ \overline{B}C;$$

$$E_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC;$$

$$E_3=ABC$$

故 $$P(E_1)=0.7\times0.5\times0.6+0.3\times0.5\times0.6+0.3\times0.5\times0.4=0.36$$

$$P(E_2)=0.7\times0.5\times0.6+0.7\times0.5\times0.4+0.3\times0.5\times0.4=0.41$$

$$P(E_3)=0.7\times0.5\times0.4=0.14$$

故 $$P(E)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_3)=0.91$$

3.6　设事件A表示一等品，事件B表示合格品。则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=96\%$$

$$P(A|B)=75\%。$$

因$A\subset B$，故$A=AB$。因而任取一件一等品的概率为

$$P(A)=P(AB)=P(B)P(A|B)=\frac{96}{100}\times\frac{75}{100}=0.72$$

3.7　设事件A表示这种动物活到20岁，事件B表示活到25岁。因$B\subset A$，故$AB=B$，所求的概率是$P(B|A)$。

故 $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.4}{0.8}=0.5\ 。$$

3.8　因$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$,

所以 $$\frac{P(A)}{P(A|B)}=\frac{P(B)}{P(B|A)},$$

又 $$P(A|B)>P(A)，即有\frac{P(A)}{P(A|B)}<1,$$

因而 $$\frac{P(B)}{P(B|B)}<1，\therefore\quad P(B)<P(B|A)。$$

3.9 因 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)+P(B)-P(A+B)}{P(B)}$

$$=\frac{a+b-P(A+B)}{b},$$

但 $$0\leqslant P(A+B)\leqslant 1$$

所以 $$P(A|B)\geqslant(a+b-1)/b。(b\neq 0)$$

3.10 事件A、B分别表示甲、乙找到目标；

事件C、D分别表示丙、丁投中目标。

完成使命要求两架飞机至少有一架飞机找到目标并投中目标。故完成使命的概率有如下两种配合方式。

（1）甲、丙，乙、丁配合时，

$$\begin{aligned}P(AC+BD)&=P(AC)+P(BD)-P\{(AC)(BD)\}\\&=P(A)P(C|A)+P(B)P(D|B)-P(A)P(C|A)P(B)P(D|B)\\&=0.9\times0.7+0.8\times0.6-0.9\times0.7\times0.8\times0.6=0.8076\end{aligned}$$

（2）甲、丁，乙、丙配合时，类似（1）可得

$$P(AD+BC)=0.7976$$

$$P(AC+BD)-P(AD+BC)=0.8076-0.7976=0.01$$

故知第一种配合方式较第二种配合方式有较大的概率完成使命。第一种方式比第二种方式的概率大0.01。

3.11 事件G_i——第i组抽到 i 号卡片。$(i=1,2,\cdots,n)$

则 $P(G_i)=\dfrac{1}{n}$，$P(\overline{G}_i)=\dfrac{n-1}{n}$。

（1）事件E_1——1号卡片均未抽出。

则 $E_1=\prod\limits_{i=1}^{k}\overline{G}_i$，故 $P(E_1)=(\dfrac{n-1}{n})^k$。

（2）这个事件是$\overline{E}_1$，故$P(\overline{E}_1)=1-P(E_1)=1-(\dfrac{n-1}{n})^k$。

（3）事件E_2——2号卡片均未抽到，与（1）相同可得

$P(E_2)=(\dfrac{n-1}{n})^k$，所考虑的事件是$\overline{E}_1E_2$，

但 $(E_1E_2)+(\overline{E}_1E_2)=E_2$，而左边是两个不相容事件的和，所以

$$P(E_1E_2)+P(\overline{E}_1E_2)=P(E_2)。$$

显然 $P(E_1E_2)=(\frac{n-2}{n})^k$，所以

$$P(\overline{E}_1E_2)=P(E_2)-P(E_1E_2)=(\frac{n-1}{n})^k-(\frac{n-2}{n})^k。$$

（4）这一事件是E_1E_2，从而

$$P(E_1E_2)=(\frac{n-2}{n})^k$$

（5）这一事件是$\overline{E}_1\overline{E}_2$，但由于$\overline{E}_1\overline{E}_2=\overline{(E_1+E_2)}$，

故
$$P(\overline{E}_1\overline{E}_2)=P\overline{(E_1+E_2)}=1-P(E_1+E_2)$$
$$=1-2(\frac{n-1}{n})^k+(\frac{n-2}{n})^k。$$

4.1 事件A ——取出的零件是合格品。

事件H_1——抽得第一台车床的零件；

事件H_2——抽得第二台车床的零件；

$$P(H_1)=\frac{2}{3},\quad P(H_2)=\frac{1}{3},$$

$$P(A|H_1)=1-0.03=0.97,\ P(A|H_2)=1-0.02=0.98$$

由全概率公式得

$$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)$$
$$=\frac{2}{3}\times 0.97+\frac{1}{3}\times 0.98=0.973$$

4.2 事件A，B，C分别表示甲，乙，丙各炮命中坦克。

事件H_i表示有i发弹命中坦克（i＝0，1，2，3）

事件D表示坦克被击毁。则

$$D=H_0D+H_1D+H_2D+H_3D$$

由全概率公式

$$P(D)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(D|H_i)$$

但
$$H_1=A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C$$

$$H_2=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$$

$$H_3=ABC$$

而 $P(A)=0.4\quad P(B)=0.5\quad P(C)=0.7$

故 $P(H_1)=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$

$P(H_2)=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$

$P(H_3)=0.4\times0.5\times0.7=0.14$

$P(D|H_0)=0$，　$P(D|H_1)=0.2$　$P(D|H_2)=0.6$

$P(D|H_3)=1$

由全概率公式坦克被击毁的概率为

$$P(D)=0.36\times0.2+0.41\times0.6+0.1\times1.0=0.418$$

4.3 事件H_i——1000个灯泡中有i个坏灯泡（i＝0，1，…5）。

事件A——任意取出的100个灯泡都是好灯泡。

于是 $P(H_i)=\frac{1}{6}(i=0,1,\cdots,5)$

$$P(A|H_i)=\frac{C_{1000-i}^{100}}{C_{1000}^{100}}=\frac{(100-i)!}{100!(900-i)!}\times\frac{100!900!}{1000!}$$

$$=\frac{900!}{(900-i)!}\Big/\frac{1000!}{(1000-i)!}=\frac{A_{900}^{i}}{A_{1000}^{i}}$$

$$=\frac{900(900-1)\cdots\cdots(900-i+1)}{1000(1000-1)\cdots\cdots(1000-i+1)}$$

$$=\frac{900^i(1-\frac{1}{900})\cdots(1-\frac{i-1}{900})}{1000^i(1-\frac{1}{1000})\cdots(1-\frac{i-1}{1000})}\approx0.9^i。$$

由全概率公式

$$P(A)=\sum_{i=0}^{5}P(H_i)P(A|H_i)=\frac{1}{6}\sum_{i=0}^{5}0.9^i\doteq0.78$$

4.4 事件H_i——第一次比赛时用了i个新球（i＝0，1，2，3）

事件A——第二次比赛时取出的都是新球。

于是 $P(H_i)=C_9{}^iC_3^{3-i}/C_{12}^3$，　$P(A|H_i)=C_{9-i}^3/C_{12}^3$

由全概率公式得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(H_i)P(A|H_i)=\frac{1}{(C_{12}{}^3)^2}\sum_{i=0}^{3}C_9^iC_3^{3-i}C_{9-i}^3$$

$$=\frac{441}{3025}\doteq0.146$$

4.5　设H_1，H_2分别表示发报台发出信号“·”及“-”。

A_1，A_2分别表示收报台收到信号“·”及“-”。

则有　$P(H_1)=0.6$，　$P(H_2)=0.4$；

$P(A_1|H_1)=0.8$，　$P(A_2|H_1)=0.2$

$P(A_1|H_2)=0.1$，　$P(A_2|H_2)=0.9$

（1）当收报台收到信号“·”时，发报台确系发出信号“·”的概率

$$P(H_1|A_1)=\frac{P(H_1)P(A_1|H_1)}{P(H_1)P(A_1|H_1)+P(H_2)P(A_1|H_2)}$$

$$=\frac{0.6\times0.8}{0.6\times0.8+0.4\times0.1}=0.923.$$

（2）当收报台收到“-”时，发报台确系发出“-”的概率

$$P(H_2|A_2)=\frac{P(H_2)P(A_2|H_2)}{P(H_1)P(A_2|H_1)+P(H_2)P(A_2|H_2)}$$

$$=\frac{0.4\times0.9}{0.6\times0.2+0.4\times0.9}=0.75$$

4.6　设 事件H_1——抽出的人患有癌症；

事件H_2——抽出的人未患癌症；

事件F ——药物检查时呈阳性反应。

则　$P(H_1)=\frac{1}{200}=0.005$　　$P(H_2)=0.995$

$P(F|H_1)=0.95$，　$P(F|H_2)=0.05$

由贝叶斯公式，抽出检查的人确患癌症的概率为

$$P(H_1|F)=\frac{P(H_1)P(F|H_1)}{P(H_1)P(F|H_1)+P(H_2)P(F|H_2)}=0.0872$$

4.7　设 事件H_i——抽得第i个工厂的产品，（i=1，2，3，4）

事件A——所抽出的产品是合格品

则　$P(H_1)=0.2$，$P(H_2)=0.1$，$P(H_3)=0.5$，$P(H_4)=0.2$

$P(A|H_1)=0.90$，$P(A|H_2)=0.85$，$P(A|H_3)=0.70$，

$P(A|H_4)=0.95$

由全概率公式，该件产品是合格品的概率为

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(H_i)P(A|H_i)=0.805$$

4.8　假定事件H_1——只有长机到达目的地；

事件H_2 ——长机与另一架僚机到达目的地；

事件H_3 ——三架飞机均到达目的地。

事件E ——目标被炸毁；

事件A ——长机到达目的地；

事件B_1——第一架僚机到达目的地；

事件B_2——第二架僚机到达目的地。

则 $$H_1 = A\overline{B_1}\,\overline{B_2};$$

$$H_2 = AB_1\overline{B_2} + A\overline{B_1}B_2;$$

$$H_3 = AB_1B_2$$

由于H_1，H_2，H_3相斥，且 $E = H_1E + H_2E + H_3E$，

故 $$P(E) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(E|H_i)$$

但 $$P(H_1) = 0.8\times0.2\times0.2 = 0.032$$

$$P(H_2) = 0.8\times0.8\times0.2 + 0.8\times0.2\times0.8 = 0.256$$

$$P(H_3) = 0.8^3 = 0.512$$

$$P(E|H_1) = 0.3 \qquad P(E|H_2) = 1-(1-0.3)^2 = 0.51$$

$$P(E|H_3) = 1-(1-0.3)^3 = 0.657$$

故 $$P(E) = 0.032\times0.3 + 0.256\times0.51 + 0.512\times0.657 = 0.48$$

4.9 事件A ——第一次抽得合格品；　　事件A′——第二次抽得合格品，

事件H_1——第一次抽得甲堆；　　事件H_1'——第二次抽得甲堆，

事件H_2——第二次抽得乙堆。　　事件H_2'——第三次抽得乙堆。

将计算过程列表如下

H_i	$P(H_i)$	$P(A\|H_i)$	$P(H_i)\times P(A\|H_i)$	$P(H_i\|A) = P(H_i')$	$P(\overline{A'}\|H_i')$	$P(H_i')P(\overline{A'}\|H_i')$
H_1	$\frac{1}{2}$	0.999	$\frac{1}{2}\times0.999$	$\frac{0.999}{1.997}$	0.001	$\frac{0.999}{1997}$
H_2	$\frac{1}{2}$	0.998	$\frac{1}{2}\times0.998$	$\frac{0.998}{1.997}$	0.002	$\frac{0.998}{1.997}$
Σ	1		$\frac{1}{2}\times1.997$	1		0.0015

故又抽的一件产品是不合格品的概率为0.0015。

5.1 本题是$p=0.85$，$n=4$的组合概率问题，所求概率是至少命中两发的概率

$$Q(2;\ 4,\ 0.85) = \sum_{m=2}^{4} P_4(m) = 1 - P_4(0) - P_4(1)$$

$$1 - 0.15^4 - C_4^1\cdot0.85\times0.15^3 = 0.988.$$