

【美】阿尔弗雷德·S·波萨门蒂 著
涂泓 译 冯承天 译校



数学奇观

让数学之美带给你灵感与启发

MATH WONDERS

TO INSPIRE
TEACHERS
AND STUDENTS



上海科技教育出版社

【美】阿尔弗雷德·S·波萨门蒂 著
涂泓 译 冯承天 译校

数学奇观

让数学之美带给你灵感与启发



01/1809

图书在版编目(CIP)数据

数学奇观:让数学之美带给你灵感与启发/(美)波萨门蒂著,涂泓译. —上海:上海科技教育出版社, 2016.1

书名原文:Math Wonders

ISBN 978-7-5428-6327-0

I. ①数… II. ①波…②涂… III. ①数学—普及读物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第243631号



序 言

罗素*曾经写道：“数学不仅拥有真，而且拥有非凡的美，一种如雕塑般冷峻而朴素的美，一种屹立不摇的美。极其纯净，能够臻于一种不可撼动的极致，就如同只有最伟大的艺术才能呈现的那样。”

罗素与怀特海**合著了不朽的《数学原理》(*Principia Mathematica*)，这本巨著无论如何都不能视为是一件艺术品，更不用说有什么非凡的美了，此罗素可能是彼罗素吗？我们该相信谁呢？

首先让我这样说：我在几年前第一次读到这段陈述，我完全同意罗素的观点。不过，我在数十年前就独立地得出了相同的看法，当时我十一二岁，第一次听说有柏拉图多面体（它们是一些完全对称的三维图形，即所谓多面体，它们的各面、各边和各角全都相同——共有五种这样的多面体）。我当时正在阅读一本有关趣味数学的书籍，其中不仅有这五种柏拉图多面体的图片，还有可以方便地做出这些多面体的结构展开图。这些图片给我留下了非常深刻的印象。直到我做出了所有这五种多面体的硬纸板模型，我才得以安定下来。这是我的数学入门课。这些柏拉图多面体事实上（正

* 罗素(Bertrand Russell, 1872—1970)，英国哲学家、数学家和逻辑学家，1950年诺贝尔文学奖获得者，分析哲学的创始人之一。——译注

** 怀特海(Alfred Whitehead, 1861—1947)，英国数学家、哲学家，“过程哲学”的创始人。——译注



如罗素说的那样)都具有非凡的美,与此同时,它们所体现的对称性对于数学具有重要的含义,对几何学与代数学都产生过重要影响。于是,从非常现实的意义上来讲,可以认为它们提供了几何学与代数学之间的连接环节。尽管我不能自称在大约70年前就已理解了这种关联的全部意义,不过我认为可以公正地说,这一初次相遇激发了我随后70年中对数学的热爱。

我们的下一次相遇笼罩在时间的迷雾之中,不过我确定无疑地记得,这次相遇是与曲线有关的。当时我正沉迷于我在阅读过程中偶然发现的一条曲线(可能是心形曲线或是蔓叶线)的形状及其数学描述,以至于让我又一次不得安宁,直到我在两个月的暑假期间深入地探究了在百科全书中能够找到的所有曲线。那时我大概十三四岁。我发现它们的形状、无穷无尽的变化形式,以及各种几何性质,都具有无法描述的美。

在那个永远难忘的夏天开始时,我还不能够理解一条曲线的方程意味着什么,这种方程几乎在每篇文章的开头都一成不变地出现。不过,如果你在两个月期间每天都花上四五个小时,那么你最终会理解一条曲线与其方程之间、几何学与代数学之间的关联,而这种关联本身就具有意义深远的美。同样也是以这种方式,我学习了解析几何,这个学习过程毫无痛苦,也毫不费力,事实上是一种乐趣,因为每一条曲线都揭示出其隐藏的宝藏——全都是美的,有许多是意义深远的。因此,那是一个我永远不会忘怀的夏天,这有什么好奇怪的呢?



如今,摆线只不过是无穷多种不同曲线之一,这些曲线有的平坦,有的卷曲,它们所具有的大量特性,被罗素恰如其分地描述为“非凡的美”,并且“能够臻于一种不可撼动的极致”。本书给出的这些例子清晰地表明,数学这本伟大的书籍一直都展开在我们的眼前,而真正的哲学就写在其中(改写自伽利略的话)。读者们受邀去翻开并欣赏它。我再也不曾合上过它,这有什么好奇怪的呢?

我想为你讲述这些美丽曲线中的一条,不过更加恰当的做法还是将此讨论归入这本精彩的书中的一节。因此,如果你希望看看在我年轻时激发起我对数学的兴趣的那类事物,那么请读一下 8.13 节。

为什么我现在要讲述这些插曲?你即将开始阅读的是一本奇妙的书,它经过精心构思,以让读者你,并最终让你的学生们,产生对数学的兴趣。我们不可能确定某个读者会对什么内容感兴趣。对我而言,吸引我的是那些形状对称的立体图形和曲线;对你而言,情况可能会截然不同。不过,由于本书涉及广泛而多样的专题和主题,人人都会各得其所,也希望所有人都能收获良多。我和波萨门蒂博士共同合作过好几个写作项目,因此我非常了解他渴望向缺乏数学知识的人们展示数学之美的迫切之心。他带着令人钦佩的热情做这件事。这一点在本书中表露无遗,从对专题的选择开始(这些专题本身就非常引人入胜),到他清晰而舒畅的表述。他尽一切努力去避免让一个可能不熟悉的术语或者概念不经定义地溜过去。

因此,你在本书中获得了能够唤起数学之美的所有材料,这些



材料以一种浅显易懂的风格呈现出来——这就是本书的首要目标。让社会上更多的群体来与我们分享数学的美丽点滴,这是每一位数学家的愿望。就我而言,我将早期对数学的热爱带进了科学研究实验室,在那里,它为我提供了许多科学家所不具有的洞察力。对于数学结构的这种真正的热爱,让我得以解出了困扰化学界数十年之久的那些问题。1985年,作为对我的工作的奖励,我获得了诺贝尔化学奖,对此我感到意外的荣幸。我后来得知,我是首位获得诺贝尔科学奖的数学家。所有这一切,都是早期深深爱上了数学之美的结果。也许本书会为你的学生们打开一些新的天地,而数学会在这些天地中向他们显露其独有的美。对于本书会以哪些方式为他们呈现那些新的理念或良机,你可能会惊喜不已。当你拥有了一个对学数学积极性大增的班级,带领着他们领略既美又有用的数学,那么你自己也会受益匪浅。

豪普特曼(Herbert A. Hauptman)博士

1985年诺贝尔化学奖获得者

豪普特曼-伍德沃德医学研究所主席兼首席执行官

纽约州布法罗市

前 言

撰写本书的灵感,来自于我为《纽约时报》(*The New York Times*)*撰写的一篇专栏文章所引起的非凡回应。在那篇文章里,我提出,在设法激发年轻人对数学的学习兴趣时,要让人们相信数学是美的,而不是像大多数情况下那样只是强调数学的有用之处。我提到这一年的年份2002**是一个回文数,并以此来激发读者的兴趣,随后又继续展示了回文数的一些有趣的方面。我本可以更进一步,让读者用2002这个数做乘法,因为这也揭示出我们数制的某些美丽的联系(或者说奇巧之处)。例如,请看一下下面选出的用到2002的几个乘积:

$$2002 \times 4 = 8008$$

$$2002 \times 37 = 74\ 074$$

$$2002 \times 98 = 196\ 196$$

$$2002 \times 123 = 246\ 246$$

$$2002 \times 444 = 888\ 888$$

$$2002 \times 555 = 1\ 111\ 110$$

在这篇文章发表之后,我收到了500多封来信和电子邮件,大家都支持这一观点,并询问能让人们领会和欣赏数学之美的方法和

* 2002年1月2日。——原注

** 顺便说一下,2002是美妙的素数系列2、7、11和13之积。——原注



材料。我希望能以本书回应要求展示数学之美的广大呼声。教师们是派往数学这个美丽王国的最佳使节。因此,我只是希望用本书打开通往数学的这一方面的大门。请记住,这只是一块敲门砖而已。一旦你开始领会到有那么多可选的内容能够吸引年轻人逐渐爱上这一卓越的、经受过时间考验的学科,你就会着手建立起一个书库,收录更多能在恰当时刻使用的理念。

这引导我产生了另一种想法。很明显,所选主题和程度必须适合于目标读者,而且教师对这一门学科的热情,以及教授它的方式,也同样重要。在大多数情况下,本书中的这些章节内容对你的学生们而言已经足够。不过,会有那么一些学生,他们对某一个主题会想要得到更加全面深入的研究。为了帮助他们,书中的许多章节(通常以脚注的形式)提供了进一步的信息。

当我在社交场合遇到一些人,而他们发现我感兴趣的领域是数学时,我通常都会听到洋洋自得的感叹:“哦,我数学一直很糟糕!”学校课程中,会让一个成年人因学不好而感到自豪的,就只有数学了。数学差居然是一种荣誉的象征。为什么会是这样?承认自己能胜任这个领域会让人感到难堪吗?而且为什么有这么多人确实数学差呢?能做些什么来改变这种趋势吗?如果有什么人能给出这个问题的权威答案,那么他/她就会成为这个国家教育界的超级明星。我们只能推测问题出自何处,然后再从这个视角出发,希望能纠正它。我坚信,这个问题的根源就在于数学所固有的不得人心。不过,它为什么如此不得人心呢?经常使用数学的那些人都觉



得这不是什么问题,但是那些不以数学为研究领域的人,可能已经陷入困境了。我们最终是要展示数学内在的美,从而能引导那些日常并不需要它的学生们去欣赏它,不仅因为它有用,而且因为它很美。这就是本书的目标:通过数学在各种不同分支中的大量实例,来充分地阐明数学之美。为了让这些例子具有吸引力和实用性,选择的原则是:第一次阅读就能够容易地理解它们,而且它们具备特有的不寻常性。

我们对数学具有如此势不可挡的“恐惧”,从而导致对这一学科总体上的逃避,引发这种情况的社会层面的缺陷何在?自古以来,我们就被告知,对于我们准备从事的几乎任何事业,数学都是很重要的。当要鼓励一个年幼的孩子在学校数学上表现出色时,通常都是这样讲的:“如果你想成为一名_____的话,你会需要数学的。”对这个年幼的孩子而言,这是一个毫无用处的理由,因为他还没有关注过任何事业目标。于是,这就是一句空话。有时候,一个孩子被告知要“在数学上表现更好些,否则的话就会_____。”同样,对这个孩子也不具有持久的效果,他只会尽力做到刚好避免惩罚而已。他关注数学只是为了避免来自父母的更多责难。现在,有了本书中的这些材料,我们就可以攻克如何吸引孩子们爱上数学这个难题了。

让数学不受大众欢迎的情况进一步恶化的是,对数学不如其他科目出色的孩子,他的父母会安慰他说,他们自己在学生时代数学也不好。这种负面的行为榜样可能会对一个孩子学习数学的积极



性产生最坏的影响。因此,你的职责就是要去抵消这些似乎来自四面八方的对数学的诋毁。同样,有了本书中的这些材料,你就能够展示数学之美,而不仅仅是告诉孩子们数学这玩意儿很棒”。向他们展示吧!

对学校的行政领导而言,学生们在数学上的表现通常会成为他们学校办得成功与否的首要指标。当他们学校的学生表现得比平均数据好或者比邻近地区学校的学生好时,他们就会松一口气。另一方面,当他们学校的学生表现不佳时,他们立即就会感受到必须扭转局面的压力。多半情况下,这些学校都会把责任归咎于教师。学校通常会为数学老师们启动一个在职的“应急”培训。除非这个在职培训是为特定的教师量身定做的,否则不用期待它在提高学生表现方面会有什么作用。很多时候,一所学校或者一个学区会怪罪于课程设置(或者教科书),于是对其进行修改,以期带来即时的改变。这种做法可能很危险,因为对课程设置的突然改变会让教师们对这些新教材准备不当,从而导致更进一步的困难。当一个在职培训声称会对教师的表现产生“魔术般的效果”时,我们就应该产生怀疑了。要让教师们发挥更大的作用,需要在很长的一段时间内付出相当大的努力。由于各种各样的原因,这是一项异常困难的任务。首先,我们必须清楚地确定薄弱点在哪里。是课程内容中普遍存在

* 普通读者请参见《数学魔术师:给头脑的逗人珍馐》(*Math Charmers: Tantalizing Tidbits for the Mind*, Prometheus, 2003)。——原注



一个薄弱点吗？是缺乏教学技能吗？是教师们完全缺乏积极性吗？或者是这些因素的组合？无论问题是什么，一般而言，学校里的数学教师们并不会人人都有这样的问题。那么，这就意味着我们需要创设各种不同的在职培训，以应对教学中存在的所有薄弱点。考虑到针对个人进行在职培训所需的各种组织上和经济上的因素，这样的培训即使出现过，也是极少数情况。通过改变教师们的表现来让数学教学更为成功，显然并不是问题的全部答案。教师们需要一些理念，以通过恰当而又有趣的内容，来激发学生们的积极性。

国际比较研究总是将美国的学校排在相对较低的等级。于是，从政者们将提高学生数学表现作为奋斗目标。他们顶着“教育总统”、“教育州长”或“教育市长”的头衔，批准一笔笔新的资金用于克服教育的种种薄弱点。这些资金通常都以我们刚才讨论过的那些在职培训的形式被花费在启动职业发展上。出于上文所罗列的这些理由，它们的效果无论如何都是值得怀疑的。

那么，为了提高孩子们在学校里的数学表现，我们剩下能做的还有什么呢？社会作为一个整体，必须领悟到数学是一个美的（并且是有趣的）领域，而不仅仅是一门有用的学科，没有它则许多领域的深入研究都无法完成（尽管后面这种陈述也许是正确的）。我们必须从父母处着手，他们作为成年人，已经在心中形成了对数学的感觉。尽管在一个成年人已经对数学产生消极情绪后，再要去激发他/她对于这门学科的兴趣是一项艰难的任务，不过这正是本书的另一项用途——为某些父母开办呈现数学之美的“讲习班”，以改变



他们对这一学科的态度。现在剩下的问题就是,如何最好地实现这个目标。

如果某人对数学并不特别感兴趣,或者对这门学科感到恐惧,那么就向他们展示一些极其容易理解的插图。我们要用一些无需过多解释的实例来向他/她展示,就是吸引力“跃然纸上”的那种实例。如果这些实例具有突出的视觉效果,那也会有所帮助。它们可以是本质上具有趣味性的,但也不一定非要如此。最重要的是,它们应该引起大吃一惊的回应,即让人感觉到关于数学的本质确实存在着某些特别的东西。这些特别之处能够以多种方式显现出来。它可以是一道简单的题目,用数学方法推导出一个出人意料地简单(或精彩)的解答。它可以是描述数的性质的一个示例,会引发令人目瞪口呆的回应。它可以是一种直觉上似乎难以置信的几何关系。概率也具有某些这样的有趣现象,会引发此类反应。无论是什么示例,都必须能快速而有效地得出结论。本书中展示了足够多的示例,因此你可以直接上阵了,通过改变家长们的态度,让他们在家里能以一种更为积极的姿态配合数学教学。

当家长们的姿态出现这样一种彻底的转变时,他们通常都会问:“为什么在我上学的时候,没有人向我展示这些精彩的东西呢?”我们无法回答这个问题,而且我们也无法再改变这一点。不过,我们能够让更多的成年人成为数学的友好使节,也让教师们拥有更多资源,从而能让他们将这些数学的激励因素带进课堂。将这样一些激励学习积极性的手段带进课堂,并不会影响教学时间;相反,它会

让教学时间变得更加有效,因为学生的积极性会更高,从而更加易于接受新的知识点。因此,家长和教师一样,应该利用这些数学激励因素来改变社会上对数学的认知,在课堂内外都应如此。只有到那时,我们才不仅为大家带来对数学之美的欣赏,更是带来在数学学习成绩上意义深长的转变。



目 录

第1章 数之美 / 1

- 1.1 令人惊讶的数的模式之一 / 3
- 1.2 令人惊讶的数的模式之二 / 5
- 1.3 令人惊讶的数的模式之三 / 6
- 1.4 令人惊讶的数的模式之四 / 8
- 1.5 令人惊讶的数的模式之五 / 9
- 1.6 令人惊讶的数的模式之六 / 11
- 1.7 惊人的幂次联系 / 12
- 1.8 美丽的数的联系 / 14
- 1.9 不寻常的数的联系 / 15
- 1.10 奇怪的等式 / 16
- 1.11 令人惊异的数 1089 / 17
- 1.12 压抑不住的数 1 / 22
- 1.13 完满数 / 24
- 1.14 友好的数 / 26
- 1.15 另一种友好的数对 / 28
- 1.16 回文数 / 29
- 1.17 形数的乐趣 / 32
- 1.18 美妙的斐波那契数 / 35





- 1.19 陷入无限循环 / 38
- 1.20 幂循环 / 40
- 1.21 阶乘循环 / 42
- 1.22 $\sqrt{2}$ 的无理性 / 44
- 1.23 连续整数之和 / 47

第2章 几个算术奇迹 / 50

- 2.1 乘以11 / 51
- 2.2 一个数何时能被11整除 / 53
- 2.3 一个数何时能被3或9整除 / 55
- 2.4 除数为素数的可整除性 / 56
- 2.5 俄罗斯农民的相乘方法 / 61
- 2.6 乘以21、31和41的快速方法 / 64
- 2.7 聪明的加法 / 65
- 2.8 字母算术 / 66
- 2.9 可笑的错误 / 69
- 2.10 不寻常的数9 / 73
- 2.11 连续百分比 / 76
- 2.12 平均值平均吗 / 78
- 2.13 72法则 / 79
- 2.14 求出平方根 / 81

第3章 解决方法出人意料的题目 / 83

- 3.1 考虑周全的推理 / 84
- 3.2 出人意料的解答 / 86
- 3.3 一道关于果汁的题目 / 87
- 3.4 倒过来做 / 89
- 3.5 逻辑思维 / 91
- 3.6 你该如何组织数据 / 92
- 3.7 专注于正确信息 / 94
- 3.8 鸽巢原理 / 96
- 3.9 大黄蜂的飞行 / 97
- 3.10 关联的同心圆 / 99
- 3.11 不要忽视显而易见的事情 / 101
- 3.12 看似困难(或容易) / 103
- 3.13 考虑最糟情况 / 105

第4章 代数娱乐 / 106

- 4.1 用代数来构建简洁算法 / 107
- 4.2 神秘的数 22 / 108
- 4.3 证明一种奇异现象的合理性 / 109
- 4.4 将代数用于数论 / 111
- 4.5 在形数中找到模式 / 112