高等学校教材

弹性力学

高等教育出版社

本书经工科力学教材编审委员会结构力学编审小组委托王德荣编委审阅，同意作为高等学校教材出版。

本书第一版获“1977～1981年度全国优秀科技图书奖”。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”；本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材

弹 性 力 学

（第二版）

下 册

徐 芝 纶

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京展望印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张12 字数300,000

1982年9月第2版 1984年2月第5次印刷

印数 41,001—46,835

书号 15010·0178 定价 1.30 元

目　　录

（下　　册）

第十三章 薄板的小挠度弯曲问题及其经典解法

§13-1 有关概念及计算假定

在弹性力学里，两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面或棱柱面所围成的物体，称为平板，或简称为板，图 13-1。这两个平行面称为板面，而这个柱面或棱柱面称为侧面或板边。两个板面之间的距离 t 称为板的厚度，而平分厚度 t 的平面称为板的中间平面，简称为中面。如果板的厚度 t 远小于中面的最小尺寸 b（例如小于 $b/8$ 至 $b/5$），这个板就称为薄板，否则就称为厚板。

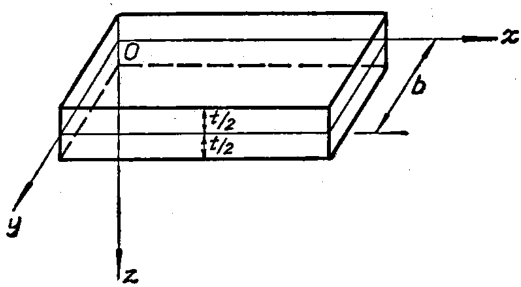

图 13-1

对于薄板，已经引用一些计算假定从而建立了一套完整的理论，可以用来计算工程上的问题。对于厚板，虽然也有这样或那样的计算方案被提出来，但还不便应用于工程实际问题。

当薄板受有一般荷载时，总可以把每一个荷载分解为两个分荷载，一个是作用在薄板中面之内的所谓纵向荷载，另一个是垂直于中面的所谓横向荷载。对于纵向荷载，可以认为它们沿薄板厚

度均匀分布，因而它们所引起的应力、形变和位移，可以按平面应力问题进行计算，如第二章至第七章中所述。横向荷载将使薄板弯曲，它们所引起的应力、形变和位移，可以按薄板弯曲问题进行计算。

当薄板弯曲时，中面所弯成的曲面，称为薄板的弹性曲面，而中面内各点在横向的(即垂直于中面方向的)位移，称为挠度。

本章中只讲述薄板的小挠度弯曲理论，也就是只讨论这样的薄板：它虽然很薄，但仍然具有相当的弯曲刚度，因而它的挠度远小于它的厚度。如果薄板的弯曲刚度很小，以致挠度与厚度属于同阶大小，则须另行建立所谓大挠度弯曲理论，见第十八章。

薄板的小挠度弯曲理论，是以三个计算假定为基础的(这些假定已被大量的实验所证实)。取薄板的中面为 xy 面，图 13-1，这些假定可以陈述如下：

(1) 垂直于中面方向的正应变，即 ε_z，极其微小，可以不计。取 $\varepsilon_z=0$，则由几何方程(8-9)中的第三式得 $\frac{\partial w}{\partial z}=0$，从而得

$$w=w(x, y)。\tag{13-1}$$

这就是说，在中面的任一根法线上，薄板全厚度内的所有各点都具有相同的位移 w，也就等于挠度。

(2) 应力分量 τ_{zx}、τ_{zy} 和 σ_z 远小于其余三个应力分量，因而是次要的，它们所引起的形变可以不计(注意：它们本身却是维持平衡所必需的，不能不计)。

因为不计 τ_{zx} 及 τ_{zy} 所引起的形变，所以有

$$\gamma_{zx}=0,\quad \gamma_{yz}=0。$$

于是由几何方程(8-9)得

$$\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}=0,$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y}。\tag{13-2}$$

由于 $\varepsilon_z=0, \gamma_{zx}=0, \gamma_{yz}=0$，可见中面的法线在薄板弯曲时保持不伸缩，并且成为弹性曲面的法线。

因为不计 σ_z 所引起的形变，所以由物理方程有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{13-3}$$

这就是说，薄板小挠度弯曲问题的物理方程和薄板平面应力问题的物理方程是相同的。

（3）薄板中面内的各点都没有平行于中面的位移，即

$$(u)_{z=0}=0,\quad (v)_{z=0}=0\tag{13-4}$$

因为 $\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}$，所以由上式得出

$$(\varepsilon_x)_{z=0}=0,\quad (\varepsilon_y)_{z=0}=0,\quad (\gamma_{xy})_{z=0}=0。$$

这就是说，中面的任意一部分，虽然弯曲成为弹性曲面的一部分，但它在 xy 面上的投影形状却保持不变。

§13-2 弹性曲面的微分方程

薄板的小挠度弯曲问题是按位移求解的，取为基本未知函数的是薄板的挠度 w。因此，我们要把所有的其它物理量都用 w 来表示，并建立 w 的微分方程，即所谓弹性曲面微分方程。

首先把形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 用 w 来表示。将方程(13-2)对 z

进行积分，积分时注意 w 只是 x 和 y 的函数，不随 z 而变，即得

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z+f_1(x,y),\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z+f_2(x,y)。$$

应用方程(13-4)，得 $f_1(x,y)=0, f_2(x,y)=0$。可见

$$u=-\frac{\partial w}{\partial x}z,\quad v=-\frac{\partial w}{\partial y}z。$$

于是可以把形变分量 ε_x、ε_y、γ_{xy} 用 w 表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}z,\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}z,\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}z。\end{aligned}\right\}\tag{a}$$

在这里，由于挠度 w 是微小的，弹性曲面在坐标方向的曲率及扭率可以近似地用 w 表示为

$$\chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \chi_y=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \chi_{xy}=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\tag{13-5}$$

所以式(a)也可以改写为

$$\varepsilon_x=\chi_x z,\quad \varepsilon_y=\chi_y z,\quad \gamma_{xy}=2\chi_{xy}z。\tag{13-6}$$

因为曲率 χ_x、χ_y 和扭率 χ_{xy} 完全确定了薄板所有各点的形变分量，所以这三者就称为薄板的形变分量。

其次，将应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 用 w 来表示。由物理方程(13-3)求解应力分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\\ \sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x),\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}。\end{aligned}\right\}\tag{b}$$

将式(a)代入式(b)，即得所需的表达式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ \sigma_y&=-\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\ \tau_{xy}&=-\frac{Ez}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{13-7}$$

注意w不随z变化，可见这三个应力分量和z成正比。

再其次，将应力分量τ_{zx}及τ_{zy}用w来表示。在这里，因为不存在纵向荷载，所以有$X=Y=0$，而平衡微分方程(8-1)中的前二式可以写成

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y},\quad \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}。$$

将表达式(13-7)代入，并注意$\tau_{yx}=\tau_{xy}$，即得

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,$$

$$\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}=\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right)=\frac{Ez}{1-\mu^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。$$

注意w不随z而变，将上列二式对z进行积分，得

$$\tau_{zx}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w+F_1(x,y),$$

$$\tau_{zy}=\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w+F_2(x,y)。$$

但是，在薄板的下面和上面，有边界条件

$$(\tau_{zx})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0,\quad(\tau_{zy})_{z=\pm\frac{t}{2}}=0。$$

应用这些条件求出$F_1(x,y)$及$F_2(x,y)$以后，即得表达式

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,\\ \tau_{zy}&=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w。\end{aligned}\right\}\tag{13-8}$$

最后，将应力分量σ_z也用w来表示。利用平衡微分方程(8-1)

中的第三式,取体力分量 $Z=0$,得

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}。\tag{c}$$

如果体力分量 Z 并不等于零,我们可以把薄板每单位面积内的体力和面力归入薄板上面的面力,一并用 q 表示,即

$$q=(\bar{Z})_{z=-\frac{t}{2}}+(\bar{Z})_{z=\frac{t}{2}}+\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}Zdz。\tag{d}$$

这只会对最次要的应力分量 σ_z 引起误差,对其他的应力分量则毫无影响。这样的处理,和材料力学中对梁的处理相同。

注意 $\tau_{xz}=\tau_{zx}$, $\tau_{yz}=\tau_{zy}$,将表达式(13-8)代入式(c),得

$$\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right)\nabla^4 w。$$

对 z 进行积分,得

$$\sigma_z=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{t^2}{4}z-\frac{z^3}{3}\right)\nabla^4 w+F_3(x,y)。\tag{e}$$

但是,在薄板的下面,有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=\frac{t}{2}}=0。$$

将式(e)代入,求出 $F_3(x,y)$,再代回式(e),即得表达式

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left[\frac{t^2}{4}\left(z-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(z^3-\frac{t^3}{8}\right)\right]\nabla^4 w\\&=-\frac{Et^3}{6(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right)\nabla^4 w。\end{aligned}\tag{13-9}$$

现在来导出 w 的微分方程。在薄板的上面,有边界条件

$$(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}=-q,$$

其中 q 是薄板每单位面积内的横向荷载,包括横向面力及横向体力,如式(d)所示。将表达式(13-9)代入,即得

$$\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^4 w=q,$$

或

$$D\nabla^4 w=q,\tag{13-10}$$

其中的

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\tag{13-11}$$

称为薄板的弯曲刚度，它的因次是[力][长度]。

方程(13-10)称为薄板的弹性曲面微分方程，是薄板弯曲问题的基本微分方程。求解薄板的小挠度弯曲问题时，须按照薄板侧面上(即板边上)的边界条件，由这个微分方程求出挠度 w，然后就可以按公式(13-7)至(13-9)求得应力分量。

§13-3 薄板横截面上的内力及应力

在绝大多数的情况下，都很难使得应力分量在薄板的侧面上(板边上)精确地满足应力边界条件，而只能应用圣维南原理，使这些应力分量所组成的内力整体地满足边界条件。因此，在讨论边界条件以前，先来考察这些应力分量所组成的内力。

从薄板内取出一个平行六面体，它的三边的长度分别为 dx、dy 和 t，图 13-2。

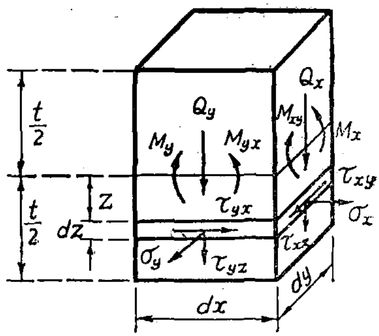

图 13-2

在 x 为常量的横截面上，作用着 σ_x、τ_{xy} 和 τ_{xz}。因为 σ_x 及 τ_{xy} 都和 z 成正比，所以它们在薄板全厚度上的代数和分别等于零，只可能分别合成为弯矩和扭矩。

在该横截面的每单位宽度上，应力分量 σ_x 合成为弯矩

$$M_x=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}(\sigma_x 1dz)z=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z\sigma_x dz。$$

将(13-7)中的第一式代入，对 z 进行积分，得

$$M_x=-\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z^2 dz$$

$$=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)。\qquad (a)$$

与此相似，应力分量 τ_{xy} 将合成为扭矩

$$M_{xy}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z\tau_{xy}dz。$$

将(13-7)中的第三式代入，对 z 进行积分，得

$$M_{xy}=-\frac{E}{1+\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z^2 dz=-\frac{Et^3}{12(1+\mu)}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}。\qquad (b)$$

应力分量 τ_{xz} 只可能合成为横向剪力，在每单位宽度上为

$$Q_x=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\tau_{xz}dz。$$

将(13-8)中的第一式代入，对 z 进行积分，得

$$Q_x=\frac{E}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\left(z^2-\frac{t^2}{4}\right)dz$$

$$=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w。\qquad (c)$$

同样，在 y 为常量的横截面上，每单位宽度内的 σ_y、τ_{yx} 和 τ_{yz} 也分别合成为如下的弯矩、扭矩和横向剪力：

$$M_y=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}z\sigma_y dz=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\qquad (d)$$

$$M_{yx}=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z\tau_{yx}dz=-\frac{Et^3}{12(1+\mu)}\ \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}=M_{xy}, \tag{e}$$

$$Q_y=\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz}dz=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w. \tag{f}$$

利用公式(13-11)，式(a)至(f)可以简写为

$$\left.\begin{aligned}
&M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
&M_y=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
&M_{xy}=M_{yx}=-D\ (1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y},\\
&Q_x=-D\ \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w,\\
&Q_y=-D\ \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w,
\end{aligned}\right\} \tag{13-12}$$

其中的前三式也可以通过表达式(13-5)改写为

$$\left.\begin{aligned}
&M_x=D(\chi_x+\mu\chi_y),\ \ M_y=D(\chi_y+\mu\chi_x),\\
&M_{xy}=M_{yx}=D(1-\mu)\chi_{xy}.
\end{aligned}\right\} \tag{13-13}$$

利用式(a)至(f)，从表达式(13-7)及(13-8)中消去 w，并利用(13-10)及(13-11)从表达式(13-9)中消去 w，可以得出各个应力分量与弯矩、扭矩、横向剪力或荷载之间的关系如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{12M_x}{t^3}z,\quad \sigma_y=\frac{12M_y}{t^3}z,\\
&\tau_{xy}=\tau_{yx}=\frac{12M_{xy}}{t^3}z,\\
&\tau_{xz}=\frac{6Q_x}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right),\qquad \tau_{yz}=\frac{6Q_y}{t^3}\left(\frac{t^2}{4}-z^2\right),\\
&\sigma_z=-2q\left(\frac{1}{2}-\frac{z}{t}\right)^2\left(1+\frac{z}{t}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{13-14}$$

沿着薄板的厚度，应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy} 的最大值发生在板面，τ_{xz} 及 τ_{yz} 的最大值发生在中面，而 σ_z 的最大值发生在板的上面，各个最大值为

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_x)_{z=\frac{t}{2}}=-(\sigma_x)_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_x}{t^2},\\&(\sigma_y)_{z=\frac{t}{2}}=-(\sigma_y)_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_y}{t^2},\\&(\tau_{xy})_{z=\frac{t}{2}}=-(\tau_{xy})_{z=-\frac{t}{2}}=\frac{6M_{xy}}{t^2},\\&(\tau_{zx})_{z=0}=\frac{3Q_x}{2t},\ (\tau_{zy})_{z=0}=\frac{3Q_y}{2t},\\&(\sigma_z)_{z=-\frac{t}{2}}=-q。\end{aligned}\right\}\tag{g}$$

注意：以上所提到的内力，都是作用在薄板每单位宽度上的内力，所以弯矩和扭矩的因次都是[力]，而不是[力][长度]；横向剪力的因次是[力][长度]$^{-1}$，而不是[力]。

正应力 σ_x 及 σ_y 分别与弯矩 M_x 及 M_y 成正比，因而称为弯应力；剪应力 τ_{xy} 与扭矩 M_{xy} 成正比，因而称为扭应力；剪应力 τ_{xz} 及 τ_{yz} 分别与横向剪力 Q_x 及 Q_y 成正比，因而称为横向剪应力；正应力 σ_z 与荷载 q 成正比，称为挤压应力。

在薄板弯曲问题中，一定荷载引起的弯应力和扭应力，在数值上最大，因而是主要的应力；横向剪应力在数值上较小，是次要的应力；挤压应力在数值上更小，是更次要的应力。因此，在计算薄板的内力时，主要是计算弯矩和扭矩，横向剪力一般都无须计算。根据这个理由，在一般的工程手册中，只给出弯矩和扭矩的计算公式或计算图表，而并不提到横向剪力。又由于目前在钢筋混凝土建筑结构的设计中，大都按照两向的弯矩来配置两向的钢筋，而并不考虑扭矩的作用，因此，一般的工程手册中也就不给出扭矩的计算公式和计算图表。

弹性曲面的微分方程(13-10)，也可以根据“内力与荷载成平衡”的条件导出如下。试考虑薄板的任一微分块，它的中面的尺寸为dx及dy，图 13-3。为简单起见，图中只画出该微分块的中面，并将荷载及横截面上的内力画在中面上。荷载及剪力用力矢表示；弯矩及扭矩，按照右手螺旋法则，用矩矢表示。

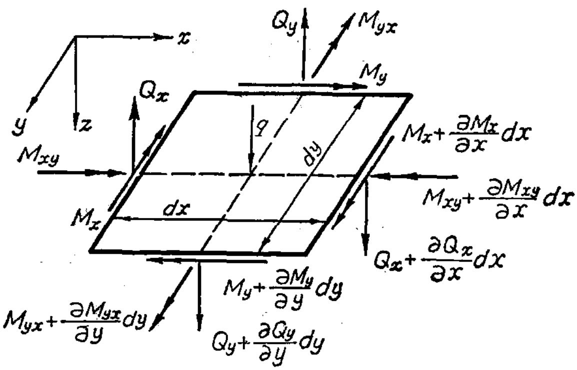

图 13-3

以通过微分块中心而平行于 y 轴及 x 轴的直线为矩轴，分别写出力矩的平衡方程，简化以后，略去微量，得到

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y},\quad Q_y=\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}。\tag{13-15}$$

再写出 z 方向的力的平衡方程，简化以后，略去微量，得到

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q=0。\tag{h}$$

将(13-15)式代入，注意 $M_{yx}=M_{xy}$，即得用弯矩、扭矩及荷载表示的平衡方程

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+q=0。\tag{13-16}$$

将其中的弯矩及扭矩按照公式(13-12)用 w 表示，就将又一次得出弹性曲面的微分方程