经济数学（二）

——线性代数、概率论及数理统计

主　编　陈传明　张学高
副主编　冯善林　那　薇　杨洪涛

西南财经大学出版社


经济数学（二）

经济数学（二）

—— 线性代数、概率论及数理统计

主　编　陈传明　张学高
副主编　冯善林　那　薇　杨洪涛

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

经济数学(二),线性代数、概率论及数理统计/陈传明,张学高主编.一成都:西南财经大学出版社,2012.2

ISBN 978-7-5504-0570-7

Ⅰ.①经… Ⅱ.①陈…②张… Ⅲ.①经济数学②线性代数③概率论④数理统计 Ⅳ.①F224.0②0151.2③021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 009599 号

经济数学(二)——线性代数、概率论及数理统计

Jingji Shuxue Er:Xianxingdaishu Gailülun Ji Shulitongji

主　编:陈传明　张学高

副主编:冯善林　那　薇　杨洪涛

责任编辑:孙　婧　李永福

封面设计:墨创文化

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
印　　刷	四川森林印务有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	14
字　　数	300 千字
版　　次	2012 年 2 月第 1 版
印　　次	2012 年 2 月第 1 次印刷
印　　数	1—3000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-0570-7
定　　价	28.60 元

前言

经济数学（二）是普通高等学院本科各专业普遍开设的一门公共基础课程，主要包括线性代数、概率论与数理统计等内容，这些内容也是在自然科学和经济技术等领域中应用广泛的数学工具。本书是根据教育部颁发的《经济数学基础教学大纲》编写的，其适用性强、浅显适中，适合普通高等学院经济与管理类专业的学生使用，亦可供学习本课程的读者选用。本书在编写上力求内容适度、结构合理、条理清晰、循序渐进，文字叙述方面力求简明扼要、深入浅出。

本书具有如下特点：

(1) 在满足教学要求的前提下，淡化理论推导过程；为缓解课时少与教学内容多的矛盾，恰当把握教学内容的深度和广度，遵循基础课理论知识以必须够用为度的教学原则，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示数学内容的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性。

(2) 语言精简严谨，篇幅较传统教材少，但基本内容囊括且有一定的深度。

(3) 章节安排符合认知规律，语言通俗易懂，既便于教师讲授，也易于学生阅读、理解。

(4) 注重理论联系实际和培养学生的综合素质，不仅关注数学在经济类专业的直接应用，而且增加了大量数学在经济等方面应用的例子，还结合具体教学内容进行思维训练，重视培养学生的科学精神、创新意识以及解决实际问题的能力。

(5) 每节后配有思考题和练习题，通过思考题试图达到使学生能换个角度理解有关知识点的目的。练习题与知识点尽量呼应，由易到难，以便学生巩固所学知识。

本书的作者均为云南师范大学商学院长期工作在教学一线的专业教师，具有丰富的教学经验。本书编写过程中得到了云南师范大学商学院、会计学院、财务管理学院和工商管理学院多位专业课教师的帮助，有效地使数学理论知识与其在专业课的应用中达到了有机的结合。参与编写本书的还有董利、何佩、李小文、周瑜、冯荷英、郜建豪、章蓉、李翎洁和杨晓，在此一并感谢。

前 言

编写本书的目的，是试图为一般院校经济与管理类专业的学生提供一本适合的教材。由于编者学识有限，加上时间仓促，本书疏漏与错误之处在所难免，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，以使本书在教学实践中不断完善。

注：本书中带“*”的章节为教师选讲内容。

编 者

2011 年 12 月

目　录

第一章
行列式及矩阵

在一个函数、方程或不等式中,如果所出现的数学表达式是关于未知数或变量的一次式,那么这个函数、方程或不等式就称为线性函数、线性方程或线性不等式。在经济管理活动中,许多变量之间存在着或近似存在着线性关系,使得对这种关系的研究显得尤为重要,而且许多非线性关系也可转化为线性关系。线性代数是高等数学的一个重要内容,与微积分有着同样的重要性。行列式、矩阵与线性方程组(即一次方程组)的理论是线性代数的主要内容。线性代数在许多实际问题中有着直接的应用,行列式、矩阵与线性方程组在数据计算、信息处理、均衡生产、减少消耗、增加产出等方面有着广泛应用,是改善企业生产经营管理、提高经济效益的有力工具。在这一章里,将主要介绍行列式的概念、行列式的性质、克莱姆法则、矩阵的概念及其运算、矩阵的初等行变换与矩阵的秩、逆矩阵及其求法。

1.1　二阶、三阶行列式

二阶、三阶行列式是在研究二元线性方程组和三元线性方程组的解时提出来的一种数学运算符号,它是学习 n 阶行列式和 n 元线性方程组的基础。

1.1.1　二阶行列式

定义 1.1　记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为二阶行列式,它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1.1}$$

其中每个横排称为行列式的行,每个竖排称为行列式的列,$a_{ij}(i,j=1,2)$称为二阶行列式

的元素，$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为二阶行列式的展开式。

二阶行列式表示的代数和，可以用画线（见图 1－1）的方法记忆，即实线联结的两个元素的乘积减去虚线联结的两个元素的乘积。这种计算规则常称为对角线法则。另外，从左上角到右下角的对角线称为行列式的主对角线，从右上角到左下角的对角线称为行列式的次对角线。

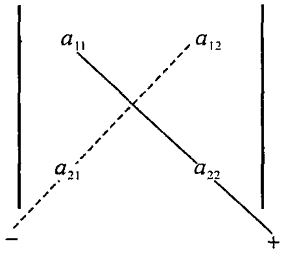

图 1－1

行列式常用大写字母 D 表示。

例 1 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5\times2-(-1)\times3=13$

例 2 设 $D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

问：(1) 当 λ 为何值时，$D=0$；

(2) 当 λ 为何值时，$D\neq0$。

解

$$D=\begin{vmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-3\lambda$$

由 $\lambda^2-3\lambda=0$，得 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$。因此可得

(1) 当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=3$ 时，$D=0$；

(2) 当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq3$ 时，$D\neq0$。

1.1.2 三阶行列式

定义 1.2 记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为三阶行列式，它表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \qquad (1.2)$$

其中 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为三阶行列式的元素，$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 称为三阶行列式的展开式。

三阶行列式表示的代数和，也可以用画线（见图 1-2）的方法记忆，其中各实线联结的三个元素的乘积是代数和中的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是代数和中的负项。

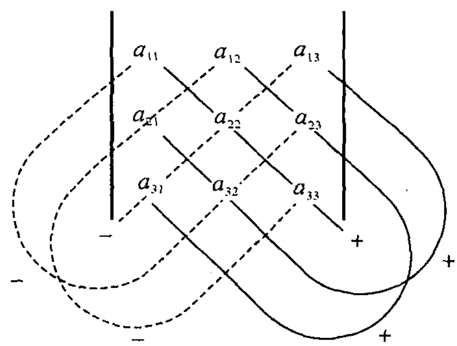

图 1-2

例 3 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}=1\times0\times6+2\times5\times(-1)+3\times4\times0-1\times5\times0-2\times4\times6-3\times0$

$\times(-1)=-10-48=-58$

例 4 a、b 满足什么条件时，有

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

解 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2$

若要 $a^2+b^2=0$，则 a 与 b 须同时等于零。因此，当 $a=0$ 且 $b=0$ 时，所给的行列式等于零。

例 5 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$

若要 $a^2 - 1 > 0$,当且仅当 $|a| > 1$。因此可得

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$$

的充分必要条件是 $|a| > 1$。

练习 1.1

1. 求下列各行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}$;　(2) $\begin{vmatrix} a+b & b \\ b & a+b \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x^2 & x^2-x+1 \end{vmatrix}$;　(4) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & -1 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;　(6) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$;　(8) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$。

2. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$ 的充分必要条件是什么?

1.2　n 阶行列式

1.2.1　n 阶行列式的定义

为了定义 n 阶行列式及学习行列式的展开定理,先介绍代数余子式的概念。

定义 1.3　将行列式中第 i 行第 j 列的元素 a_{ij} 所在行和列的各元素划去,其余元素按原来的次序构成一个新的行列式,称这个行列式为元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij}。$(-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ 称为元素 a_{ij} 的代数余子式,记作 A_{ij},即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij} \tag{1.3}$$

例如，在行列式$\begin{vmatrix}1&2&3\\-2&0&1\\2&4&-1\end{vmatrix}$中，

$M_{11}=\begin{vmatrix}0&1\\4&-1\end{vmatrix}=-4, A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&1\\4&-1\end{vmatrix}=-4$；

$M_{23}=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0, A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}=0$。

有了代数余子式的概念，就很容易把三阶行列式按第一行的元素写出它的展开式：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}$$

若规定一阶行列式$|a|=a$，则二阶行列式按第一行的元素展开为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}$$

根据二、三阶行列式的定义给出下面 n 阶行列式的定义：

定义 1.4　将 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,3,\cdots,n)$ 排成一个正方形数表，并在它的两旁各加一条竖线，即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix} \tag{1.4}$$

称为 n 阶行列式。当 $n=1$ 时，规定一阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$；当 $n\geqslant 2$ 时，规定 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} \tag{1.5}$$

例 1　计算行列式 $D=\begin{vmatrix}1&0&-2&0\\-1&2&3&1\\0&1&-1&2\\2&1&0&3\end{vmatrix}$的值。

解　根据定义有

$$D \xlongequal{} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\times(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -18$$

在 n 阶行列式中，有一类特殊的行列式，它们形如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.6}$$

或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.7}$$

称它们为三角形行列式，其中式(1.6)称为下三角形行列式，式(1.7)称为上三角形行列式。由定义易知，三角形行列式 D 的值等于其主对角线上各元素的乘积，即

$$D = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

1.2.2 行列式的性质

按定义计算行列式是一种较为复杂的过程。利用下面的 n 阶行列式的性质，能简化行列式的计算过程。

性质 1 行列式所有的行与相应的列互换，行列式的值不变，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

把行列式 D 的行与列互换后所得到的行列式称为 D 的转置行列式，记作 D^T。

这个性质说明，对于行列式的行成立的性质，对于列也一定成立，反之亦然。

性质 2 行列式的任意两行(列)互换，行列式的值改变符号。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

性质 3 若行列式中某两行(列)的对应元素相同，则此行列式的值为零。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}=0$

性质4　行列式中某行(列)的各元素有公因子时，可把公因子提到行列式符号外面。

例如，$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

例2　设$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，求$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$。

解　$\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} -3a_{11} & a_{12} & 5a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$

$= -2\times(-3)\times5\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\times(-3)\times5\times1=30$

例3　计算行列式$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$的值。

解　$\begin{vmatrix} -8 & 4 & -2 \\ -12 & 6 & 3 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}=2\times3\begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -4 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$=2\times3\times(-4)\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -24\times6=-144$

推论1　若行列式有一行(列)各元素都是零，则此行列式等于零。

例如，$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$

推论2　若行列式有两行(列)对应元素成比例，则此行列式等于零。

例如，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0 \qquad (K\neq0)$

性质5 若行列式某一行(列)的各元素均是两项之和,则此行列式可以表示为两个行列式之和,其中这两个行列式的该行(列)元素分别为两项中的一项,而其他元素不变。

例如,$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_1 & a_{12}+b_2 & a_{13}+b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

性质6 将行列式某一行(列)的所有元素同乘以数 k 后加到另一行(列)对应位置的元素上,行列式的值不变。

例如,$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \xlongequal{①\times k+②} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{11} & a_{22}+ka_{12} & a_{23}+ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

对行(列)用性质6,可称对行列式作行(列)变换。一般地,行变换写在"="上面,列变换写在"="下面。

计算行列式时,常用行列式的性质,把它化为三角形行列式来计算。例如化为上三角形行列式的步骤是:如果第一列第一个元素为0,先将第一行与其他行交换,使第一列第一个元素不为0;然后把第一行分别乘以适当的数加到其他各行,使第一列除第一个元素外其余元素全为0;再用同样的方法处理除去第一行和第一列后余下的低一阶的行列式;依次做下去,直至使它成为上三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是此行列式的值。

例4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解 $$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{\text{交换①、②行}} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[①\times(-2)+④]{①\times 1+③} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} \xlongequal[②\times 3+④]{②\times 1+③} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{③\times(-1)+④} -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1\times(-1)\times(-2)\times(-2)=4$$

例 5　计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ a & x & a & \cdots & a & a \\ a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x & a \\ a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix} \xlongequal{\text{各列乘1加到第1列上}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & x & a & \cdots & a & a \\ x+(n-1)a & a & x & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & x & a \\ x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \qquad \vdots \\ ①\times(-1)+ⓝ}]{\substack{①\times(-1)+② \\ ①\times(-1)+③}} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & a & \cdots & a & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-a \end{vmatrix}$$

$$=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

在 n 阶行列式的定义中，是将行列式按第一行展开的。事实上 n 阶行列式也可以按任何一行（列）展开。

性质 7（行列式展开性质）　行列式等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和。

例 6　利用性质 7 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ 的值。

解　$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\times(-1)^{1+2}\times\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -14$

性质 8　行列式某一行（列）的各元素与另一行（列）对应元素的代数余子式的乘积之和等于零。