新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 2

立体几何与向量

杨羽 张林森 胡福根 编著

华东师范大学出版社

新专题教程

XINZHUANTI JIAOCHENG

高中数学 2

立体几何与向量

杨 羽 张林森 胡福根 编著

华东师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新专题教程. 高中数学 2　立体几何与向量/杨羽等编著. 一上海:华东师范大学出版社,2004. 3
ISBN 978-7-5617-3763-7

Ⅰ.新...　Ⅱ.杨...　Ⅲ.几何课一高中一教学参考资料
Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 021823 号

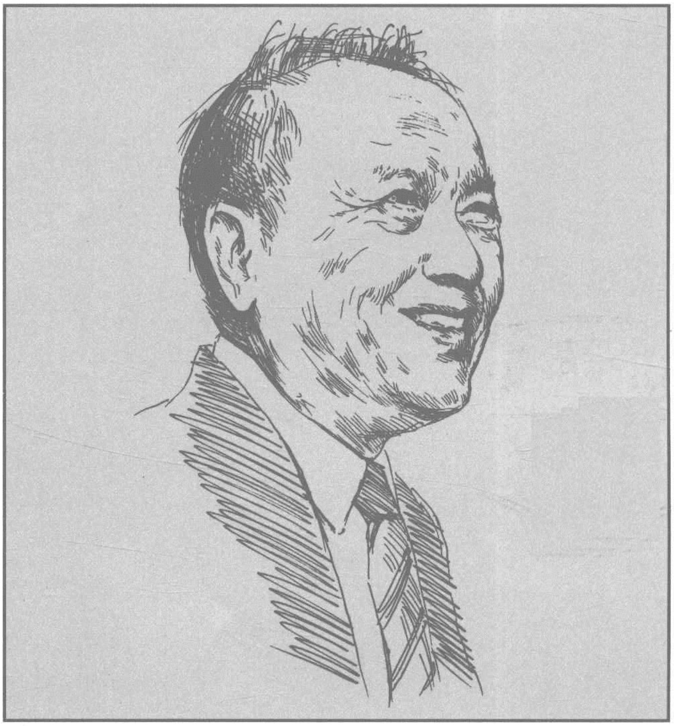
新专题教程
高中数学 2 · 立体几何与向量

编　　著　杨　羽　张林森　胡福根
策划组稿　教辅分社
项目编辑　徐红瑾
文字编辑　徐慧平
封面设计　黄惠敏
版式设计　蒋　克

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
电话总机　021-62450163 转各部门　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537(兼传真)
门市(邮购)电话　021-62869887
门市地址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　址　www.ecnupress.com.cn

印 刷 者　宜兴市德胜印刷有限公司
开　　本　787×960　16 开
印　　张　10.75
字　　数　207 千字
版　　次　2009 年 4 月第四版
印　　次　2009 年 8 月第三次
书　　号　ISBN 978-7-5617-3763-7/G·2070
定　　价　12.00 元

出 版 人　朱杰人



在现代社会中，因为科学技术的进展，社会组织的日趋复杂，数学便成为整个教育的一个重要组成部分。

——陈省身

总　　序

高中数学2·立体几何与向量

亲爱的读者，展现在您面前的这套《新专题教程》系列图书是按新课程标准所列的内容，在“新教学理念、新教学方法”的指导下，按专题编写，涵盖初、高中语文、数学、英语、物理和化学5个学科，共计50个分册.

本丛书自初版起就坚持“完整、系统、深入、细致”的编写特色，甫一面世，就受到广大学生的欢迎.但我们不敢懈怠，我们必须与时俱进.根据现行中学教材的变化情况及中、高考的变化趋势，我们进行了多方调研，在此基础上，组织作者对本丛书进行了全面的修订.新修订的这套丛书，不仅知识点配套，而且题型新颖，更利于学生对学科知识的理解和掌握.

丛书有以下特点.

作者权威　编写队伍由师范大学学科专家及长期在教学第一线的全国著名中学特、高级教师组成.他们有先进的教育理念和丰富的教学经验，是中、高考研究方面的专家，他们的指导更具权威性.

材料典型　丛书精选了近几年的中、高考试题，还收集了许多有代表性的例题，编写者对这些典型材料进行了详细的解读，还设置了有针对性的训练.总之，编写者力求从国家课程标准的知识内容中提炼出相应的能力要求，并对重点知识进行深入、细致的讲解，对难点用实例的方法进行释疑，使用这套丛书，能切实提高学生的学习效果.

版本通用　丛书以教育部颁布的新课程标准为编写依据，不受教材版本限制，按各学科知识内容编排，独立成册，不仅与教学要求相对应，更体现了学科知识的完整性、系统性和科学性，具有很强的通用性.

编排科学　丛书在编排时照顾到了学生的差异性，读者可以根据自己学习中的薄弱环节，有重点地选择，有针对性地学习，以达到事半功倍的效果. 丛书坡度设计合理，帮助学生在知识学习的基础上，充分了解和掌握运用知识解决问题的方法，提升学习能力.

愿《新专题教程》成为您的好伙伴，学习的好帮手，为您的学习带来诸多的便利，给您一个智慧的人生.

华东师范大学出版社

教辅分社

CONTENTS
目　　录

高中数学2·立体几何与向量

CONTENTS

目　录

高中数学2·立体几何与向量

专题 1

直 线 与 平 面

§1.1 平面的基本性质

【知识梳理】

1. 平面的概念

平面是一个不定义的原始概念. 平面在空间是可以无限延伸的,它没有大小、厚薄之分.

2. 平面的基本性质

(1) 如图 1-1-1,如果一条直线上的两点在平面内,则这条直线在平面内(公理 1).

(2) 如图 1-1-2,如果两个平面有一个公共点,则它们相交于过这点的一条直线(公理 2).

3. 确定平面的条件

(1) 如图 1-1-3,不在一条直线上的三点可以确定一个平面(公理 3).

(2) 如图 1-1-4,一条直线和这条直线外一点,可以确定一个平面(公理 3 的推论 1).

(3) 如图 1-1-5,两条相交直线可以确定一个平面(公理 3 的推论 2).

(4) 如图 1-1-6,两条平行直线可以确定一个平面(公理 3 的推论 3).

4. 相关符号

(1) 点 P 在直线 l 上,记作 $P \in l$; (2) 点 P 在平面 α 内,记作 $P \in \alpha$; (3) 直线 a、b 相交于点 P,记作 $a \cap b = P$; (4) 直线 a 与平面 α 相交于点 P,记作 $a \cap \alpha = P$; (5) 平面 α、β 相交于直

说明:

研究立体图形,要注意立体图形问题与平面图形问题的区别,考虑问题时要着眼于整个空间,而不能局限于一个平面.

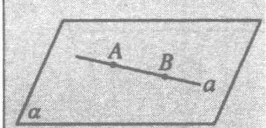


图 1-1-1

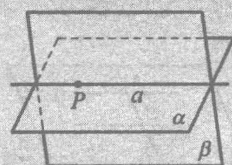


图 1-1-2

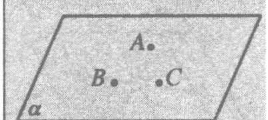


图 1-1-3

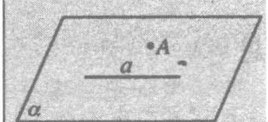


图 1-1-4

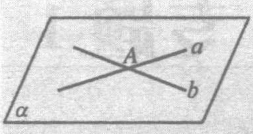


图 1-1-5

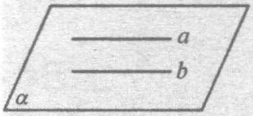


图 1-1-6

线 l,记作 $\alpha \cap \beta = l$.

【分类举例】

例 1 (2006 · 上海)若空间中有四个点,则"这四个点中有三个点在同一条直线上"是"这四个点在同一个平面上"的(　　).

(A) 充分非必要条件　　(B) 必要非充分条件

(C) 充分必要条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解 选(A).

例 2 求证:两两相交且不经过同一点的三条直线必在同一个平面内.

分析 利用两条相交直线可以确定一个平面,再证第三条直线也在这个平面内.

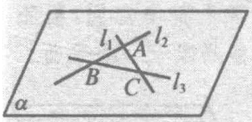


图 1-1-7

证明 如图 1-1-7,因为直线 l_1 和 l_2 相交于点 A,所以直线 l_1、l_2 可以确定一个平面 α(确定平面的条件). 因为直线 l_3 上有两点 B、C 在平面 α 内,所以 l_3 在平面 α 内(平面的基本性质,公理 1).

例 3 一条直线和两条平行直线相交,证明这三条直线在同一个平面内.

分析 利用两条平行直线可以确定一个平面,再证第三条直线也在这个平面.

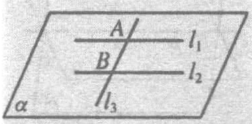


图 1-1-8

证明 如图 1-1-8,因为直线 $l_1 /\!/ l_2$,所以直线 l_1、l_2 可以确定一个平面 α(确定平面的条件). 因为直线 l_3 上有两点 A、B 在平面 α 内,所以直线 l_3 在平面 α 内(平面的基本性质,公理 1),所以直线 l_1、l_2、l_3 在同一个平面 α 内.

例 4 如图 1-1-9,已知直线 $a /\!/ b /\!/ c$,直线 l 与直线 a、b、c 分别相交于点 A、B、C,求证:a、b、c、l 共面.

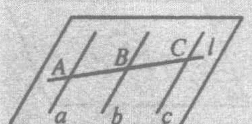


图 1-1-9

分析 先证明给定元素中的部分元素在一个平面内,其余元素在另一个平面内,再证明这两个平面重合(也可用多个平面),这种证法称为"同一法". 其证明步骤:① 作出符合命题结论的图形;② 证明所作图形符合已知条件;③ 据唯一性定理确定所作图形与已知图形重合;④ 判断命题成立.

证法一 因为直线 $a /\!/ b$,所以直线 a、b 确定平面 α,直线 $l \cap a = A$,$l \cap b = B$,从而 A、$B \in \alpha$,$l \subset \alpha$(平面的基本性质,公理 1). 同理,直线 b、c 确定平面 β,且 $l \subset \beta$,又因为平面 α、β 均

思考:

本题如把三条平行线改成 n 条平行线,又如何证明呢?

经过两条相交直线 b 与 l，根据确定平面的条件，经过两条相交的直线，有且只有一个平面，得 α 与 β 重合. 所以直线 a、b、c、l 共面.

证法二 因为直线 $a \parallel b$，所以直线 a、b 确定平面 α，直线 $l \cap a = A$，$l \cap b = B$，从而 A、$B \in \alpha$，$l \subset \alpha$（平面的基本性质，公理 1）. 同理，直线 b、c 确定平面 β，且 $l \subset \beta$，直线 a、c 确定平面 γ，且 $l \subset \gamma$. 但 l 既 $l \subset \alpha$，又 $l \subset \beta$ 和 $l \subset \gamma$ 这是不可能的，只有 α、β、γ 这三个平面重合的情况下才有可能. 所以直线 a、b、c、l 共面.

例 5 如图 1-1-10，在空间四边形 $ABCD$ 的各边上依次取 E、F、G、H 四点，若 EH 和 FG 交于一点 P，证明：点 P 必在 BD 所在的直线上.

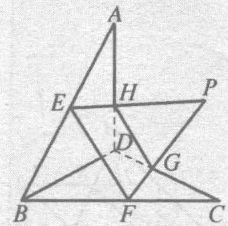


图 1-1-10

分析 欲证点 P 必在 BD 所在的直线上，即证点 P 在平面 ABD 和平面 BCD 的交线 BD 上.

证明 已知平面 ABD 和平面 BCD 有一个公共点 B，则它们相交于过 B 点的一条交线 BD（平面的基本性质，公理 2）. 点 P 是直线 EH 和 FG 的交点，所以点 P 既在直线 EH 上又在直线 FG 上，而直线 EH、FG 分别在平面 ABD 和平面 BCD 内，所以点 P 既在平面 ABD 内又在平面 BCD 内，故点 P 必在平面 ABD 与平面 BCD 的交线 BD 上.

说明：

要证明点在直线上，可证明这个点既在某一个平面内，又在另一个平面内，而这条直线是这两个平面的交线（平面的基本性质）.

例 6 如图 1-1-11，在四面体 $ABCD$ 中作截面 PQR，如 PQ、CB 的延长线交于 M，RQ、DB 的延长线交于 N，RP、DC 的延长线交于 K，求证：M、N、K 三点共线.

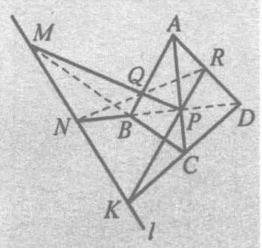


图 1-1-11

分析 先证点 K 在平面 BCD 与平面 PQR 的交线 l 上，再证 M、N 两点也在交线 l 上.

证明 因为 $RP \cap DC = K$，所以 $K \in RP$，$K \in DC$，又因为 $RP \subset$ 平面 PQR，$DC \subset$ 平面 BCD，所以 $K \in$ 平面 PQR，且 $K \in$ 平面 BCD，即 K 在平面 BCD 与平面 PQR 的交线 l 上.

同理可得 M、N 均在平面 BCD 与平面 PQR 的交线 l 上.

所以 M、N、K 三点共线.

例 7 如图 1-1-12，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，棱长为 8 cm，M、N、P 分别是棱 A_1B_1、AD、BB_1 的中点. (1) 画出过 M、N、P 三点的平面与平面 $ABCD$ 的交线以及它与平面 BB_1C_1C 的交线；(2) 设过 M、N、P 三点的平面与 BC 交于 Q，求 PQ 的长.

思考：

过 M、N、P 三点的平面与正方体相截，其截面多边形应如何画？

解 (1) 连 MP 并延长交 AB 的延长线于 R，连 NR 交 BC

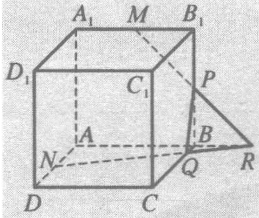


图 1-1-12

于Q，则 NQ 即为平面MNP 与平面$ABCD$ 的交线，平面 MNP 与平面BB_1C_1C的交线为PQ.

(2) 由
$$\frac{BQ}{AN}=\frac{RB}{RA}, \qquad ①$$

再由
$$\frac{RB}{MB_1}=\frac{PB}{PB_1}, \qquad ②$$

由 ② 得$\frac{RB}{4}=\frac{4}{4}$，所以$RB=4$，代入 ① 可得$\frac{BQ}{4}=\frac{4}{12}$，即$BQ=\frac{4}{3}$(cm). 在 Rt$\triangle PBQ$ 中，$PQ=\sqrt{BQ^2+PB^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$(cm).

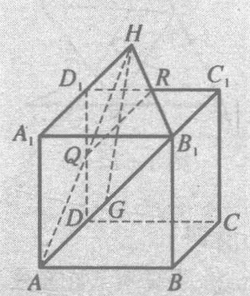


图 1-1-13

例 8 如图 1-1-13，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，已知 $AB=1$ cm，Q是DD_1 的中点.

(1) 画出过 A、Q、B_1 三点的截面与 D_1C_1 的交点；

(2) 设过 A、Q、B_1 三点的平面与 D_1C_1 的交点为 R，求截面四边形 $AQRB_1$ 的面积.

分析 (1) 要画出直线 l 与平面α 的交点，首先应找出一个经过直线 l 的平面β，确定α与β的交线m，则直线 l 与 m 的交点即为直线 l 与平面α 的交点；(2) 要计算截面的面积，通常先确定截面的形状，或把截面及截面所在平面的相关线移出体外，利用平面三角等知识解题.

解 (1) 连结AQ，并延长与 A_1D_1 的延长线交于点 H，连结 B_1H，交 D_1C_1 于点 R，则 B_1H 为平面 A_1B_1H 与平面 $AQRB_1$ 的交线，所以点 R 即为直线 D_1C_1 与截面 $AQRB_1$ 的交点.

(2) 方法一：在$\triangle HAB_1$ 中，由已知，

$$HB_1=\sqrt{A_1B_1^2+A_1H^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}(\text{cm}),$$

$$AH=\sqrt{AA_1^2+A_1H^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}(\text{cm}),$$

$$AB_1=\sqrt{2}(\text{cm}),$$

$$\cos\angle HAB_1=\frac{AB_1^2+AH^2-HB_1^2}{2\cdot AB_1\cdot AH}=\frac{2+5-5}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}.$$

由同角三角函数的基本关系式

$$\sin\angle HAB_1=\sqrt{1-(\cos\angle HAB_1)^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right)^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

$$S_{\triangle AHB_1}=\frac{1}{2}AH\cdot AB_1\cdot\sin\angle HAB_1$$

$$=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{3}{2}(\text{cm}^2).$$

又因为 $\triangle HD_1Q\backsim\triangle HA_1A$，且 $\frac{HQ}{HA}=\frac{D_1Q}{AA_1}=\frac{1}{2}$，$\triangle HQR\backsim\triangle HAB_1$，$\frac{S_{\triangle HQR}}{S_{\triangle AHB_1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$S_{\triangle HQR}=\frac{1}{4}S_{\triangle AHB_1}=\frac{3}{8}(\text{cm}^2)$，所以 $S_{截面AQRB_1}=S_{\triangle HAB_1}-S_{\triangle HQR}=\frac{3}{2}-\frac{3}{8}=\frac{9}{8}(\text{cm}^2)$.

方法二：由方法一，$HA=\sqrt{5}(\text{cm})$，$HB_1=\sqrt{5}(\text{cm})$，$HA=HB_1$，即$\triangle HAB_1$是等腰三角形.

如图 1-1-13，取 AB_1 中点 G，连结 HG，则 HG 是等腰$\triangle HAB_1$ 的底边 AB_1 上的高.

$$HG=\sqrt{AH^2-AG^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}(\text{cm}),$$

所以 $$S_{\triangle AHB_1}=\frac{1}{2}AB_1\cdot HG=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}(\text{cm}^2).$$

以下过程同方法一.

变式题 如图 1-1-14，单位正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 Q 是棱 DD_1 上的动点.(1) 判断过 A、Q、B_1 三点的截面图形的形状；(2) 设 $D_1Q=x$，过 A、Q、B_1 三点的截面面积为 $S(x)$，求函数 $y=S(x)$ 的表达式；(3) 判断函数 $F(x)=\frac{1-x}{1+x}S(x)$ 的单调性.

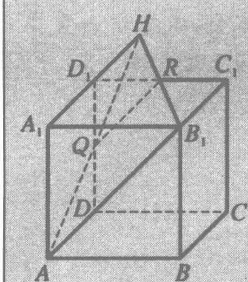


图 1-1-14

解 (1) 由已知点 Q 在线段 DD_1 上移动.

① 当 Q 与点 D_1 重合时，截面图形为等边三角形 AB_1D_1；

② 当 Q 与点 D 重合时，因为 AD 与 A_1D_1 没有交点，所以过三点的截面为矩形 AB_1C_1D；

③ 当 Q 在线段 DD_1 之间时，设截面 AQB_1 与 D_1C_1 的交点为 R，

因 $$D_1R\parallel A_1B_1,$$

所以 $$\frac{HR}{HB_1}=\frac{HD_1}{HA_1}. \qquad (*)$$

又因 $$D_1Q \parallel A_1A,$$

所以 $$\frac{HQ}{HA}=\frac{HD_1}{HA_1}. \qquad (**)$$

由（$*$）、（$**$）得 $\dfrac{HR}{HB_1}=\dfrac{HQ}{HA}$，则 $QR \parallel AB_1$. 因 $HA=HB_1$，所以 $HR=HQ$，从而得 $RB_1=QA$. 所以截面 $AQRB_1$ 为等腰梯形.

(2) 如图 1－1－14，当 $0<x<1$ 时，由已知可得

$$\frac{x}{1}=\frac{HD_1}{HA_1}=\frac{HD_1}{HD_1+1}\Rightarrow HD_1=\frac{x}{1-x},$$

$$A_1H=HD_1+1=\frac{1}{1-x}.$$

在等腰$\triangle HAB_1$中，取 AB_1 中点 G，则 HG 是等腰$\triangle HAB_1$的底边 AB_1 上的高.

又 $AB_1=\sqrt{2}$，$AH=\sqrt{AA_1^2+A_1H^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^2}$，

$$HG=\sqrt{AH^2-AG^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{1-x}\right)^2},$$

$$S_{\triangle HAB_1}=\frac{1}{2}\cdot AB_1\cdot HG=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{(1-x)^2}}.$$

又因为$\triangle HQR \backsim \triangle HAB_1$，且$\dfrac{HQ}{HA}=\dfrac{x}{1}=x$，所以 $S_{\triangle HQR}=x^2\cdot S_{\triangle HAB_1}$.

$$\begin{aligned}S(x)&=S_{\triangle HAB_1}-S_{\triangle HQR}\\&=S_{\triangle HAB_1}-x^2S_{\triangle HAB_1}=(1-x^2)S_{\triangle HAB_1}\\&=(1-x^2)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{(1-x)^2}}\\&=(1+x)\sqrt{\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$S(0)=S_{\triangle AB_1D_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot(\sqrt{2})^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；

注：

解答本题过程中的“分类思想”与“函数性质问题”是历年来的高考热点，近几年高考题中几乎每年都出现. 希望读者从本题解题过程中加以体会，掌握这一重要的思想方法.

当 $x=1$ 时，$S(1)=S_{矩形AB_1C_1D}=\sqrt{2}\cdot 1=\sqrt{2}$.

所以 $S(x)=(1+x)\sqrt{\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{1}{2}}\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$.

(3) $F(x)=\frac{1-x}{1+x}S(x)=(1-x)\sqrt{\frac{1}{4}(1-x)^2+\frac{1}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x-1)^4+2(x-1)^2}\quad(0\leqslant x\leqslant 1).$$

令 $u(x)=(x-1)^4+2(x-1)^2\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$.

设 x_1，$x_2\in[0,1]$，且 $x_1<x_2$，则

$$\begin{aligned}&u(x_1)-u(x_2)\\&=(x_1-1)^4-(x_2-1)^4+2(x_1-1)^2-2(x_2-1)^2\\&=[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2][(x_1-1)^2-(x_2-1)^2]+\\&\quad 2[(x_1-1)^2-(x_2-1)^2]\\&=[(x_1-1)^2-(x_2-1)^2][(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+2]\\&=(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)[(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+2],\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$，所以

$$x_1-x_2<0,\ x_1+x_2-2<0,$$

$$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2+2>0,$$

$$u(x_1)-u(x_2)>0,\text{即 } u(x_1)>u(x_2).$$

所以 $u(x)$ 是 $[0,1]$ 上的减函数. $F(x)=\frac{1}{2}\sqrt{u(x)}$ 是 $[0,1]$ 上的减函数.

基础训练

1. 有空间四点，其中任何三点不共线是这四点不共面的(　　).

(A) 充分非必要条件　　　　(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件　　　　(D) 非充分又非必要条件

2. 三个平面可把空间分成(　　).

(A) 4 个部分　　　　(B) 4 个部分或 8 个部分

(C) 6 个部分或 2 个部分　　　　　　　　(D) 4、6、7 或 8 个部分

3. 用一个平面去截正方体，则截面形状不可能是(　　).

(A) 正三角形　　　(B) 正方形　　　(C) 正五边形　　　(D) 正六边形

4. 三个点在怎样的情况下，经过这三个点只有一个平面？不止一个平面？并分别画出这些平面.

5. 过一点任意作三条直线，这三条直线是不是一定在一个平面内？为什么？

6. 把一点分别与不过这点的一条直线上的三点连结起来，这样得到的三条直线是不是一定在同一个平面内？能否加以证明.

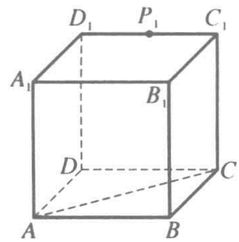
7. 三角形一定是平面图形吗？为什么？

8. 四条线段依次首尾相接，所得的封闭图形一定是平面图形吗？为什么？

9. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O_1、O_2 分别是正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 和正方形 BCC_1B_1 的中心. 求证：O_1O_2、A_1B 在同一平面内.

10. 三条直线相交于三点可以确定几个平面？能否加以证明.

11. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，过 D_1C_1 的中点 P_1 和 AC 所作的截面是不是 $\triangle P_1AC$？为什么？



第 11 题

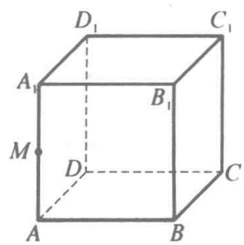
能力提高

12. 证明：两两相交且不共点的四条直线共面.

13. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1C_1 \cap B_1D_1 = O_1$，$B_1D \cap$ 截面 $A_1BC_1 = P$. (1) 求证：B、P、O_1 三点共线；(2) 若 $AB = 3$，$BC = 4$，$CC_1 = 6$，求 DP 的长.

14. 空间四边形 $ABCD$ 中，点 M、N、P 分别在棱 AD、BD、CD 上，点 S 在面 ABC 内，试画出线段 SD 与过 M、N、P 三点的截面的交点 O.

15. 如图，$ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，M 是棱 AA_1 的中点，过 C、D_1、M 三点作正方体的截面，试画出这个截面图，并计算它的面积.



第 15 题

§1.2　空间两直线的位置关系

【知识梳理】

1. 公理 4

"平行于同一条直线的两条直线平行". 它是论证有关平行问题的依据.

2. 等角定理及其推论

“如果两条相交直线与另外两条相交直线分别平行，那么这两组相交直线所成的锐角(或直角)相等”. 它为定义两条异面直线所成的角提供了理论依据.

3. 空间两条直线的位置关系

(1) 平行；(2) 相交；(3) 异面.

4. 异面直线

异面直线是指不同在任何一个平面内的两条直线.

5. 异面直线所成的角

异面直线所成的角是指过空间任意一点 O 分别作两条异面直线的平行线，所得的两条相交直线所成的锐角(或直角). 它的取值范围为 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

【分类举例】

例 1 如图 1-2-1，在空间四边形 $SABC$ 中，$SA = SB = SC = AB = AC = BC$，如果 E、F 分别为 SC、AB 的中点，那么异面直线 EF 与 SA 所成的角等于(　　).

(A) 90°　　(B) 60°　　(C) 45°　　(D) 30°

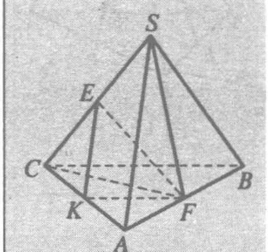


图 1-2-1

解 取 AC 中点 K，连结 EK，因为 E 是 SC 的中点，所以 $EK \parallel SA$，所以 $\angle KEF$(或其补角)是异面直线 SA、EF 所成的角，连 KF，又因为 F 是 AB 中点，所以 $KF \parallel CB$. 在 $\triangle EKF$ 中，设正三棱锥的侧棱长为 a，则 $EK = KF = \frac{1}{2}a$，连 SF、CF，则 $SF = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$，在 $\mathrm{Rt}\triangle CEF$ 中，

$$EF = \sqrt{CF^2 - CE^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

所以 $EF^2 = EK^2 + FK^2$，所以 $\triangle EKF$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle KEF = 45°$. 选(C).

例 2 (2006 · 上海)若空间中有两条直线，则“这两条直线