Math Fundamentals

21世纪数学基础课系列教材

数学建模

熊 辉 编著

中国人民大学出版社

Math Fundamentals

21世纪数学基础课系列教材

数学建模

熊 辉 编著

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

数学建模/熊辉编著．—北京：中国人民大学出版社，2011.11
21世纪数学基础课系列教材
ISBN 978-7-300-14728-4

Ⅰ.①数… Ⅱ.①熊… Ⅲ.①数学模型-高等学校-教材 Ⅳ.①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第227199号

21世纪数学基础课系列教材
数学建模
熊辉　编著
Shuxue Jianmo

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京鑫丰华彩印有限公司		
规　　格	170 mm×228 mm　16开本	**版　　次**	2011年11月第1版
印　　张	19 插页3	**印　　次**	2011年11月第1次印刷
字　　数	360 000	**定　　价**	35.00元

前　言

数学是随着人类的出现而产生的。早在旧石器时代（约170万年前），始祖们开始算数的时候，数学便随即诞生。可见，早在人类其他科学出现之前，数学就已经有了，甚至可以说，这个世界上出现的第一门学科就是数学。自有了数学，人类开始慢慢地取得很多进展，并形成了其他学问。古希腊人将数学与哲学等同起来，认为数理就是哲理。有了哲学，才能形成传统与一些世界观；有了传统与世界观，才能形成文化。可见，从数学到文化，是一个十分漫长的过程。

Engels（恩格斯）认为："数学是研究现实世界数量关系与空间形式的科学。"此说主导了西方乃至全世界百余年。但在今日看来，Engels这句话只能算是门外汉的闲聊。高级的数学抽象不是常人所能理解的，它已完全不具有实在性，因此数学绝不是科学。

纵观人类文明的发展，哲学与玄学（或西方人所谓的神学）或许是最古老的。人类不断地计算或算计，不但在哲学领域开疆拓土，在品德上也分了高下。当数学进入到神学与玄学的领域后，天文学与科学便应运而生。哲学是望远镜，其视野深远却不见舆薪之末，其思想深邃却无法实际解决问题；数学是显微镜，其通常盲目地抽象却明察秋毫，其思想难以为人理解却能解决哲学的问题。从此以后，天体力学、理论物理、经济学等科学如雨后春笋般，纷纷破土而出，刷新着世人的眼界和智力所及的区域。

数学凌驾于科学之上，而与哲学、玄学并列。《四库全书·总目》中道："物生有象，象生有数，乘除推阐，务究造化之源者，是为数学。"物生有象，即万物皆可抽象；象生有数，即抽象都能用数来表示；乘除推阐，即数学运算法则之代表；务究造化之源者，即数学的目的。窃以为，此为数学定义之最佳者。

在数学产生与发展的历史长河中，一直都与各种各样的应用问题紧密相关。数学的特点不仅在于概念的抽象性、逻辑的严谨性、结论的明确性与体系的完整性，也在于其应用的广泛性。20世纪以来，随着科学技术的迅速发展与计算机的日益普及，人们对各种问题的解要求越来越精确，这不可避免地使得数学的应用越来越普及、深入。如今，数学的地位发生了巨大变化，其正在从国家经济与科技的后备走向前沿。数学已成为当代高科技的重要组成部分与思想库之一，并已成为一种能够普遍实施的技术。培养学生应用数学的意识与能力已经成为影响国家前景的重要因素之一。

近半个多世纪以来，随着计算机技术的迅速发展，数学的应用不仅在工程技术、自然科学等领域发挥着越来越重要的作用，且以空前的广度与深度向经济、金融、生物、医学、环境、地质、人口、考古、交通等新领域渗透，数学技术已经

成为当代高新技术的重要组成部分。目前，全世界所有稍具眼光的学者都可体会到，数学给高科技带来了辉煌前景。美国前总统的科学顾问、原美国“数学的现状与未来”委员会主席E. E. David曾说:“高科技本质上是数学技术……太少人认识到当今如此被广泛称颂之高技术在本质上是一种数学技术。”

数学在其他领域的应用，得益于其对所研究问题的建模技术与强大的求解能力。数学模型（mathematical model）是一种模拟，其用数学符号、数学公式、程序、图形等对实际课题的本质属性进行抽象而又简洁的刻画，以求或能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。数学模型一般并非现实问题的直接翻版，其建立常常既需要人们对现实问题深入细微的观察与分析，又需要人们灵活巧妙地利用各种数学知识。这种应用数学知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程就称为数学建模（mathematical modeling），简称数模。

本书尝试着以数学建模的方式，从一些常见之现象出发，给出其数学模型或解释，以揭示数学的强大生命力。希望让更多的人知道：数学不是没用，而是我们知道得太少!

一般说来，数学建模的主要步骤如下：

(1) 建模准备：数模是一项创新活动，其所面临的课题是人们在生产与科研中为了使认识与实践进一步发展必须解决的问题。若这些实际问题需要给出定量的分析与解答，则可将其确立为数学建模的课题。建模准备就是要了解问题的实际背景，明确建模的目的，掌握对象的各种信息。

(2) 基本假设：课题的原型都是复杂的、具体的，是质与量、现象与本质、偶然与必然的统一体，若不经过抽象、简化，人们难以对其取得认识，也无法准确把握其本质属性。建模假设就是根据实际对象的特征与建模的目的，在掌握必要资料的基础上，对原型进行抽象、简化，将那些反映问题本质属性的形态、量及其关系抽象出来，适当忽略那些非本质因素，使之摆脱原型的具体复杂形态，形成对建模有用的信息资源与前提条件。对原型的抽象、简化不是无条件的，一定要善于辨别问题的主次，果断地抓住主要因素，抛弃次要因素，尽量将问题均匀化、线性化。

(3) 模型建立：在建模假设的基础上，进一步分析建模假设的各条件，首先区分哪些是常量，哪些是变量，哪些是已知量，哪些是未知量；然后查明各种量所处的地位、作用及其相关性，建立各个量之间的等式或不等式关系，列出表格、画出图形或确定其他数学结构，选择恰当的数学工具与构造模型的方法对其进行表征，构造出刻画实际问题的数学模型。在构造模型时究竟采用什么数学工具，要根据问题特征、建模目的以及

建模者之数学特长而定。一般而言，在能够达到预期目的的前提下，所用的数学工具越简单越好。

(4) 模型求解：构造数学模型之后，再根据已知条件与数据分析模型之特征与结构特点，设计或选择求解模型之数学方法与算法。这其中包括解方程、画图形、证明定理、逻辑运算以及稳定性讨论，特别是编写计算机程序或运用与算法相适应之软件包，并借助计算机完成对模型之求解。

(5) 模型分析：根据建模的目的、要求，对模型求解的数字结果，或进行变量间的依赖关系分析，或进行稳定性分析，或进行系统参数的灵敏度分析，或进行误差分析等。通过分析，如果不符合要求，则应修改或增减建模假设条件，重新建模，直到符合要求；通过分析如果符合要求，还可以对模型进行评价、预测、优化等。

(6) 模型检验：模型分析符合要求之后，还必须回到客观实际中去对模型进行检验，用实际现象、数据等检验模型的合理性与适用性，看其是否符合客观实际。若不符合，就修改或增减假设条件，重新建模，循环往复，不断完善，直到获得满意结果。

(7) 模型应用：模型应用是数学建模之宗旨，也是对模型最客观、最公正之检验。一个成功的数学模型，必须根据建模的目的，将其用于分析、研究与解决实际问题，充分发挥数学模型在生产和科研中的特殊作用。

以上介绍的数学建模基本步骤应该根据具体问题灵活掌握，或交叉进行，或平行进行，不拘一格地进行数学建模则有利于建模者发挥自己的才能。

目 录

第一章　数域再认识

在数学发展的历史长河里，最基本却也最深刻、最具体却也最深奥的研究对象，当属“数”。数合在一起，便形成了数的集合，而不同的集合，构成了不同的数域。本章先根据数域的层次结构（忽略各数域被发现的前后顺序）来论述数域的发展，然后探讨数域的一些性质。

1.1　数域扩张

数域的扩张过程以自然数为基础。德国数学家L. Kronecker（1823－1891）曾说：“上帝创造了整数，其他一切都是人为的。”很多学者认为零与自然数的产生源于人类在生存活动中的原始冲动，而人双手的十指与十进制的广泛使用也关系密切。

自然数的使用是最初等的，因此易被接受。原始社会时期，人们利用刻石或结绳等方式来记录数量也说明了这一点。因自然数加自然数还是自然数，则称自然数集合对于加法是封闭的。同一数的加法次数一旦多起来，乘法便产生了。自然数集合对于乘法也是封闭的，即两个自然数相乘仍旧是自然数。

多少的比较产生了减法，并导致了负数概念的产生：一个数的“负数”是使得它与该数之和等于0的数。然而自然数对于减法是不封闭的，如$2-3=-1$就不是自然数，而是负整数。那怎么办呢？看来，数域必须扩张。零、负整数和自然数合称为整数，整数对于加法、减法和乘法都是封闭的。

随着社会的进步，原始部落的人开始分财产，10头牛分给5个人，一人两头；但是分给7个人呢？一人多少头？由此产生了除法，并需要定义倒数：一个数的“倒数”即与该数之积等于1的数。显然，整数对于除法是不封闭的，如$10\div 7$就不是整数。看来，数域还需要再扩张。

由于某些物品的可分割性，部落的人想到了切块均分的方法。这样就产生了非整的数，我们今天称之为分数。分数和整数合称为有理数，有理数对于加减乘除四则运算都是封闭的。可见，有理数的产生是劳动人民计数或测量所导致的。意料之中的是最早出现的无理数也与计数、测量有关。乘法的重复进行产生了乘方，2^3 就是三个2相乘。然而哪个数的平方会等于2呢？

以古希腊哲学家Pythagoras（约前572－前497）为首的Pythagoras学派认为：任何两条线段之比，都可以用两个整数之比来表示（即可公度）。两个整数相比

实际上包括了整数和分数。因此，Pythagoras认为世界上只存在整数和分数，除此以外，别无他数。可是不久就出现一个问题。Pythagoras的一个叫Hippias的学生发现，若一个正方形的边长为1，按照勾股定理，对角线的长和边长满足

$$1^2+1^2=2=(\sqrt{2})^2。$$

那么，对角线$\sqrt{2}$到底等于多少呢？是整数？还是分数呢？因为$\sqrt{2}$一定比1大，比2小，那么$\sqrt{2}$不是整数。而更要命的是，整个Pythagoras学派都找不出对应的分数。由于Pythagoras认为世界上只有整数和分数，因此“$\sqrt{2}$到底是什么”这个问题导致了Pythagoras学派极大的苦恼和恐慌。数学界把这一事件称为数学史上的第一次危机。

Hippias的发现推翻了Pythagoras的结论，动摇了Pythagoras学派的基础，不久后便被Pythagoras淹死在地中海里。而$\sqrt{2}$这种新数，由于不好理解，后来被命名为“无理数”。有理数和无理数主要的区别有两点：第一，有理数能写成有限小数或无限循环小数，而无理数只能写成无限不循环小数，据此，人们把无理数定义为无限不循环小数；第二，所有的有理数都可以写成两个整数之比，而无理数不能写成两个整数之比。这也就是为什么Pythagoras学派认为所有数都是可公度的。

无理数发现之后，人们扩大了对数的认识。有理数和无理数合称为实数，实数对于加、减、乘、除、乘方和正数的开方运算是封闭的，而对于负数的开方不一定封闭（如$\sqrt[3]{-1}=-1$仍是实数，但$\sqrt{-1}$却不是实数，而是虚数）。为了满足开方运算的封闭性，我们最终把数域扩展到了今天的复数。（历史上关于无理数、负数、复数的发展史漫长而曲折，在此恕不赘述。）

在过去的一些初中数学教材中，有理数被定义为整数、有限小数和无限循环小数的总和，或被干脆称为分数，而无理数被定义为无限不循环小数或不能写成分数（即不可公度的数）。但这种定义方式其实是令人疑惑的，因为我们无法判断一个数是无限不循环的还是经历了很长一段不循环后再循环。因此“无限不循环”的说法既不合理也不严格。这一困难使数学史上数域的扩张停滞了两千多年。

公元前6世纪Pythagoras学派发现无理数，但直到2 400年后才产生包括无理数在内的实数的严格定义；学生在初中阶段开始接触无理数，但直到大学毕业仍然不明白无理数的实质含义。除了根式、圆周率、黄金分割比和自然对数的底数等常见的无理数外，学生们甚至找不出别的无理数。

虽然无理数是如此长久而持续地困扰着数学家，但其实在应用方面，绝大多数人得心应手。如对于圆周率π，循环还是不循环是不重要的。美国天文学家西蒙·纽克姆曾说：“十位小数就足以使地球周界准确到一英寸以内，三十位小数

便能使整个可见宇宙的四周准确到连最强大的显微镜都不能分辨的一个量。”[1]

17世纪末至18世纪初，瑞士数学家、物理学家L.Euler（1707－1783）等大数学家利用连分数来对无理数作有理逼近。如$\sqrt{2}$可写成：

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1+(\sqrt{2}-1)\\
&= 1+\frac{1}{\sqrt{2}+1} = 1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}}\\
&= 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}}}} = \cdots。
\end{aligned}$$

依次取近似值为1，$\frac{3}{2}$，$\frac{7}{5}$，$\cdots$，$\frac{577}{408}$，$\frac{1\,393}{985}$，$\cdots$，用小数表示，则依次为

$$\sqrt{2}\approx 1,\ 1.5,\ 1.4,\ \cdots,\ 1.414\,215\,69,\ 1.414\,213\,20,\ \cdots,$$

与真实值$\sqrt{2}=1.414\,213\,56\cdots$比较可见，连分数逼近的近似程度非常高。无理数的最佳有理逼近方法在很多数论著作中都有讲述。

复数包含了实数和虚数，实数相对来讲，比较好理解，而虚数到底是什么呢？西方人为此困惑了三四百年，直到搞明白虚数的物理意义，或者说几何性质，才开始承认这种虚拟的数是有用的。比如说坐标旋转，可以采用变换公式

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

表示坐标点(x,y)逆时针旋转α弧度后变成(x',y')。若$\alpha=\frac{\pi}{2}$，则为

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

[1]丹齐克著，苏仲湘译：《数：科学的语言》，98页，上海，上海教育出版社，2000。

这其实相当于

$$-y+\mathrm{i}x=(x+\mathrm{i}y)\mathrm{i}, \tag{1.2}$$

其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$，即向量逆时针旋转90°其实就相当于用其对应坐标乘以虚数单位i，而向量顺时针旋转90°就相当于用其对应坐标乘以$-$i。

一旦我们明白了这一点，有些几何问题或物理问题就变得简单很多。比如下述挖宝藏问题。

例 1.1 在东海桃花岛，遍地是桃树，唯有两株乌柏树和一株柏树格外醒目。从柏树走到其中之一的乌柏树，并记住所走的步数，到了此乌柏树后向左拐一个直角，再走相同的步数并在那里打个桩。然后回到柏树再朝另一棵乌柏树走去，同时记住所走的步数，到了该乌柏树后向右拐一个直角，再走相同的步数并在那里也打个桩。然后把两个桩连起来，在连线的正中向下挖掘三尺，就可得张天师埋藏的宝盒。然而经过上百年后，柏树早被人连根挖走，而两株乌柏树还在。这时该怎样找到天师宝藏呢？

解：以两株乌柏所在连线为横轴，两乌柏的中点位置为坐标原点建立直角坐标系。设两乌柏之间的距离为$2a$，则左乌柏的坐标为$(-a,0)$，右乌柏的坐标为$(a,0)$，而柏树的坐标假设成任意的(x,y)。若从柏树到左乌柏后左拐、到右乌柏后右拐（到左乌柏后右拐、到右乌柏后左拐同理可得），如图1.1所示，其中A点

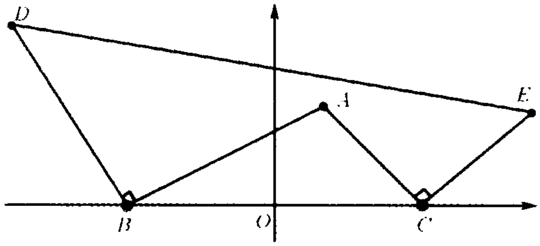

图 1.1 天师宝藏图

为柏树，B,C两点为两株乌柏，D,E两点为打桩处。则向量

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\\&=(x+\mathrm{i}y)-(-a+\mathrm{i}0)\\&=(x+a)+\mathrm{i}y,\\\overrightarrow{CA}&=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\\&=(x+\mathrm{i}y)-(a+\mathrm{i}0)\\&=(x-a)+\mathrm{i}y。\end{aligned}$$

因此可得

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA}\mathrm{i} = -y + (x+a)\mathrm{i},$$
$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}(-\mathrm{i}) = y - (x-a)\mathrm{i}。$$

不难看出，D, E两点的坐标分别为$(-y,\ x+a)$, $(y,\ -x+a)$，因此D, E两点的中点坐标为$(0,\ a)$。显然，这是个与x, y都无关的常量，即DE与纵轴的交点。

德国著名数学家、物理学家、天文学家C. F. Gauss（1777－1855）等大数学家对于虚数的应用一直采取保守态度，直到弄明白±i其实和±1一样，既然±1可用来表示直角坐标系中水平的两个相反方向的长度单位，±i自然可用来表示该系中竖直的两个相反方向的长度单位。从此以后，虚数的几何意义渐渐明朗，在物理学中的应用也日渐增多。至于数学家们，也开始慢慢释怀。

1843年10月16日，爱尔兰力学家、数学家W. R Hamilton（1805－1865）和夫人步行去都柏林，路经布鲁翰桥的时候，突发灵感，想到了四元数的基本运算法则。于是他当场拿出笔记本，把那些思想火花记了下来。四元数形如

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k},$$

其中i, j, k都是虚数单位，满足

$$\begin{aligned} &\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1, \\ &\mathrm{i}\cdot\mathrm{j} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{j}\cdot\mathrm{k} = \mathrm{i}, \quad \mathrm{k}\cdot\mathrm{i} = \mathrm{j} \end{aligned} \tag{1.3}$$

和反交换率

$$\mathrm{i}\cdot\mathrm{j} = -\mathrm{j}\cdot\mathrm{i}, \quad \mathrm{j}\cdot\mathrm{k} = -\mathrm{k}\cdot\mathrm{j}, \quad \mathrm{k}\cdot\mathrm{i} = -\mathrm{i}\cdot\mathrm{k}。 \tag{1.4}$$

四元数虽然抽象，但它与我们的时空是非常协调的，一个物理点需要四个实数（一维时间T和三维空间$\mathbb{R}^3$）才能描述。Einstein的相对论已经证明：空间和时间是相互关联的，彼此不能分离而存在。这种统一的四维宇宙可用四元数很好地表示出来。

物理空间的这一事实引发了数学家去寻找新的超复数系，如1844年德国数学家Grassmann（1809－1877）创立了n个单元的超复数，而1845年英国数学家A. Cayley（1821－1895）创立了8个分量的超复数。但1870年美国数学家B. Perice证明：超复数系统的扩张并非无限可行。在此之前，Gauss曾猜测：保持复数基本性质的数系，不能再扩张。这个结论后来为德国数学家K. Weierstrass（1815－1897）和R. Dedekind（1831－1916）所证明。德国数学家F.G.Frobenius（1849－1917）不久给出了更强的结论：具有有限个单元的、有乘法的、服从结合率的实系数线性结合代数系统只有实数、复数和四元数。

综上所述，数域的发展可画成如下之简图：

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{自然数(Natural N.)}\\0\\\text{负整数(Negative I.)}\end{array}\right\}\text{整数(Integer)}\\\text{分数(Fraction)}\end{array}\right\}\text{有理数(Rational N.)}\\\text{无理数(Irrational N.)}\end{array}\right\}\longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\text{实数(Real N.)}\\\text{虚数(Imaginary N.)}\end{array}\right\}\text{复数(Complex N.)}\\\text{四元数(Quaternion)}\end{array}\right\}\longrightarrow\text{多元数(Multivariate N.)}$$

1.2 圆周率 π

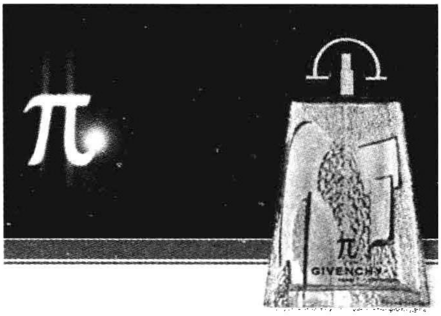

图 1.2 纪梵希男用香水π，其广告词为：Explore π, explore the universe

原新华社郑州分社记者刘子彦曾报道河南省郑州市退休职工孟和平将圆周率小数点后的前1 000位数字编成了一首情节完整的五言叙事诗，其开头四句为：“要是要我酒，尔乐舞扇舞。把酒吃酒散，尔散拔四柳。”它对应圆周率的前20位小数，意为：“要是想要我的酒，你得跳段扇子舞。举杯把酒喝完后，还得拔四棵柳树。”该诗题为《山巅妖肆传奇》，说的是山顶的酒肆里有九位相貌妖艳的舞女，她们因为一些小事不欢而散，各奔东西，后来又相聚在另一家酒肆里，最终不计前嫌，一同开怀畅饮。孟和平希望将《山巅妖肆传奇》编成一本带注解和插图的书，他认为中学生能够从中获得知识，而中老年人可借此锻炼脑力。他还说，把圆周率编成故事，这展示了汉语的特色，其他语言恐怕很难做到。

神秘之数圆周率，即圆周长与直径之比，国际统一符号为π。古今中外，为

了算出圆周率更优的近似值，一代代的数学家为之花费和付出了无数的时间与心血。19世纪前，圆周率计算的进展相当缓慢；而整个19世纪，可以说是圆周率的手工计算量最大的时段；到了20世纪，随着计算机的发明，圆周率的计算突飞猛进。此后，计算圆周率的世界纪录频频被刷新。借助于超级计算机，人们得到的圆周率已经超过2千亿位精度。

通过实验对圆周率进行估算，这是计算圆周率的第一阶段。这种估算基本上都是基于圆周和直径的实际测量而得出的。实际上，古代巴比伦、印度、中国等国长期使用“3”这个数值，基督教《圣经》也有相关记载。中国在刘徽之前“圆径一而周三”曾广泛流传，《周髀算经》中就记载有“周三径一”这一规则。在我国，木工师傅有句从古流传下来的口诀：“周三径一，方五斜七”，即直径为1的圆，周长大约是3，边长为5的正方形，对角线之长约为7。这正反映了早期人们对圆周率和$\sqrt{2}$这两个无理数的粗略估计。东汉时期官方还明文规定圆周率取3为计算面积的标准，后人称之为“古率”。

早期的人们还使用了其他粗糙方法。如古埃及、古希腊人曾用谷粒摆在圆形上，以与方形对比谷粒数的方法取得数值，或用匀重木板锯成圆形和方形以秤量对比取值等。古埃及人应用

$$4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \approx 3.160\ 5$$

约4 000年，印度在公元前6世纪曾取

$$\pi = \sqrt{10} \approx 3.162。$$

我国东、西汉之交，新朝王莽令刘歆制造量的容器——律嘉量斛，为此，刘歆大概也是通过做试验，得到了一些关于圆周率并不划一的近似值。现在根据铭文推算，其计算值分别取为

$$3.154\ 7,\ 3.199\ 2,\ 3.149\ 8,\ 3.203\ 1,$$

比“径一周三”的古率已有所进步。这些粗略的近似，当估计圆田面积时，对生产没有很大的影响，但以此来制造器皿等就不合适了。

使圆周率计算建立于科学基础之上的，可能首推古希腊数学家Archimedes（前287—前212），他提出了一种能够借助数学过程而非通过测量的方法。由此，开创了圆周率计算的第二阶段：割圆术。

在中国，数学家刘徽（生于公元250年左右）于公元263年左右首先提出著名的割圆术，得出较精确的圆周率。他仅仅采用内接正六边形，便得出$\pi \approx 3.14$，这通常称为“徽率”，而他自己还指出这是不足近似值。虽然他提出割圆术的时间