HIT

数学·统计学系列

The Appreciation of Mathematical Olympiad Inequalities

数学奥林匹克不等式欣赏

邓寿才 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数学奥林匹克不等式欣赏

The Appreciation of Mathematical Olympiad Inequalities

邓寿才 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

全文共包括几道奥数妙题的优美探讨、一道美国数学奥林匹克题的赏析、奥数妙题欣赏随笔、一道奥数妙题的归纳与引申、品味欧拉定理引发趣味联想五篇长文。

本书适合于高等学校相关专业师生，数学奥林匹克选手及教练员和数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克不等式欣赏/邓寿才著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-5603-3380-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①邓… Ⅲ.①不等式—研究 Ⅳ.①O122.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 172648 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 唐 蕾 杨万鑫
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451－86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 15.5 字数 285 千字
版 次 2011 年 10 月第 1 版 2011 年 10 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3380-9
定 价 38.00 元

(如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换)

⊙目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

几道奥数妙题的优美探讨

(一)漂亮证明

2008年第8届中国西部数学奥林匹克是在贵州省的贵阳市举办的，其中第6题是唐立华先生提供的：

原题 设 $x,y,z\in(0,1)$，满足

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz}}+\sqrt{\frac{1-y}{zx}}+\sqrt{\frac{1-z}{xy}}=2 \tag{A_1}$$

求 xyz 的最大值.

分析1 我们不妨先取三个变元都相等，即可设

$$x=y=z=t\Rightarrow 3\sqrt{\frac{1-t}{t^2}}=2\Rightarrow$$
$$t=\frac{3}{4}\Rightarrow xyz=\frac{27}{64}$$

然后应用平均值不等式证明这个值 $\frac{27}{64}$ 就是我们所求的最大值.

解法1 我们设

$$P=\sqrt[6]{xyz}\in(0,1)\Rightarrow x+y+z\geqslant 3P^2$$

应用已知条件和平均值不等式有

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz}}+\sqrt{\frac{1-y}{zx}}+\sqrt{\frac{1-z}{xy}}=2\Rightarrow$$
$$2\sqrt{xyz}=\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}\Rightarrow$$
$$\begin{aligned}4\sqrt{3xyz}&=2[\sqrt{x(3-3x)}+\sqrt{y(3-3y)}+\sqrt{z(3-3z)}]\leqslant\\&[x+(3-3x)]+[y+(3-3y)]+[z+(3-3z)]=\\&9-2(x+y+z)\leqslant 9-6P^2\Rightarrow\\&4\sqrt{3}P^3\leqslant 9-6P^2\Rightarrow\end{aligned}$$

$$4P^3+2\sqrt{3}P^2-3\sqrt{3}\leqslant 0\Rightarrow$$
$$(2P-\sqrt{3})(2P^2+2\sqrt{3}P+3)\leqslant 0\Rightarrow$$
$$2P-\sqrt{3}\leqslant 0\Rightarrow P\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow$$
$$xyz=P^6\leqslant\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6=\frac{27}{64}\Rightarrow$$
$$(xyz)_{\max}=\frac{27}{64}$$

分析 2　本题的已知条件是较复杂的根式和等式

$$\sum\sqrt{\frac{1-x}{yz}}=2$$

不便我们直接变换，于是可先假设 $x=y=z=K\in(0,1)$，并求解出 $K=\frac{3}{4}$，再证明 $xyz\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\Rightarrow(xyz)_{\max}=\frac{27}{64}$.

解法 2　当 $x=y=z=\frac{3}{4}$ 时，$xyz=\frac{27}{64}$，如果 $xyz>\frac{27}{64}$，那么由已知条件得

$$\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}=2\sqrt{xyz}>\frac{3\sqrt{3}}{4}\Rightarrow$$
$$3[x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)]\geqslant[\sqrt{x(1-x)}+$$
$$\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}]^2\text{(应用 Cauchy 不等式)}>\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2\Rightarrow$$
$$x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)>\frac{9}{16}\qquad(1)$$

另一方面

$$xyz>\frac{27}{64}\Rightarrow x+y+z\geqslant 3\sqrt[3]{xyz}>3\sqrt[3]{\frac{27}{64}}\Rightarrow$$
$$x+y+z>\frac{9}{4}\Rightarrow$$
$$\begin{aligned}x(1-x)+y(1-y)+z(1-z)&=\\(x+y+z)-(x^2+y^2+z^2)&\leqslant\\(x+y+z)-\frac{1}{3}(x+y+z)^2&=\\\frac{9}{16}-\frac{1}{3}(x+y+z-\frac{3}{4})(x+y+z-\frac{9}{4})&<\frac{9}{16}\end{aligned}$$

这与式(1)矛盾，因此假设 $xyz>\frac{27}{64}$ 不成立，从而只能有

$$xyz \leqslant \frac{27}{64} \Rightarrow (xyz)_{\max} = \frac{27}{64}$$

即所求 xyz 的最大值为$\frac{27}{64}$.

(二) 变通配对

我们知道,从数学意义上讲,求最值与证明不等式是等价的,求最值是寻找目标打靶,证明不等式是看着目标打靶,相应的降低了难度.

将原题降低难度,改述成不等式题即是:

题 1 设 $x,y,z \in (0,1)$,且满足

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz}} + \sqrt{\frac{1-y}{zx}} + \sqrt{\frac{1-z}{xy}} = 2 \tag{A_1}$$

求证

$$xyz \leqslant \frac{27}{64} \tag{P_1}$$

一般的不等式题,是已知条件简单,所证结论复杂,而本题却恰恰相反.

如果我们设 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\frac{\pi}{2})$,$(x,y,z)=(\sin^2\alpha,\sin^2\beta,\sin^2\gamma)$,那么式$(A_1)$也随之改变成三角等式,题 1 也变成等价的.

题 2 设 $\alpha,\beta,\gamma \in (0,\frac{\pi}{2})$,且满足

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{A_2}$$

则有

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3} \tag{P_2}$$

(等号成立仅当 $\alpha=\beta=\gamma=60°$)

对于一个题目,如果将其已知条件改变,那么结论也随之改变,于是,一个好题目的配对命题如雨后春笋,破土而出.

若将题 1 中的已知条件式(A_1)变为

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz} \cdot \frac{1-y}{zx} \cdot \frac{1-z}{xy}} = m = \left(\frac{1-K}{K^2}\right)^{\frac{3}{2}}, K \in (0,1)$$

即

$$(1-x)(1-y)(1-z) = m^2(xyz)^2$$

这样,我们得到了题 1 的第 1 个配对题:

配对题 1 设 $K \in (0,1)$,$x,y,z \in (0,1)$ 且满足

$$(1-x)(1-y)(1-z)=(mxyz)^2 \tag{A$_3$}$$

其中
$$m=\left(\frac{1-K}{K^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

则有
$$xyz \leqslant K^3 \tag{P$_3$}$$

特别的，当 $K=\frac{3}{4}$ 时，式(P_3)与题中式(P_1)一致.

证明 应用 Hölder 不等式有

$$1=\prod[(1-x)+x]^{\frac{1}{3}} \geqslant [\prod(1-x)]^{\frac{1}{3}}+(\prod x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow$$
$$[\prod(1-x)]^{\frac{1}{3}} \leqslant 1-\sqrt[3]{xyz} \Rightarrow$$
$$\prod(1-x) \leqslant (1-\sqrt[3]{xyz})^3 \Rightarrow$$
$$(mxyz)^2 \leqslant (1-\sqrt[3]{xyz})^3 \tag{1}$$

令
$$P=\sqrt[3]{xyz} \in (0,1) \Rightarrow$$
$$m^2P^6 \leqslant (1-P)^3 \Rightarrow$$
$$m^{\frac{2}{3}}P^2 \leqslant 1-P \Rightarrow$$
$$1 \geqslant m^{\frac{2}{3}}P^2+P=m^{\frac{2}{3}}K^2\left(\frac{P}{K}\right)^2+K\cdot\frac{P}{K} \tag{2}$$

设
$$S=K^2m^{\frac{2}{3}}+K=K^2\left(\frac{1-K}{K^2}\right)+K=1$$

应用加权不等式有

$$1 \geqslant S\left[\left(\frac{P}{K}\right)^{2K^2m^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{P}{K}\right)^{K}\right]^{\frac{1}{S}}=\left(\frac{P}{K}\right)^{2K^2m^{\frac{2}{3}}+K} \Rightarrow$$
$$\frac{P}{K} \leqslant 1 \Rightarrow P \leqslant K \Rightarrow$$
$$xyz=P^3 \leqslant K^3$$

即式(P_3)成立，等号成立仅当 $x=y=z=K$.

配对题 2 设 $K \in (0,1)$，$x,y,z \in (0,1)$ 且满足

$$\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}}{\sqrt{yz}+\sqrt{zx}+\sqrt{xy}}=\frac{\sqrt{1-K}}{K} \tag{A$_4$}$$

则有
$$xyz \leqslant K^3 \tag{P$_4$}$$

证明 记 $m=\frac{\sqrt{1-K}}{K}$，应用 Cauchy 不等式和平均值不等式有（再记 $P=\sqrt[3]{xyz}$）

$$3\sum(1-x)\geqslant(\sum\sqrt{1-x})^2=(m\sum\sqrt{yz})^2\geqslant$$
$$(3m\sqrt[3]{xyz})^2=(3mP)^2\Rightarrow$$
$$9-3\sum x\geqslant(3mP)^2\Rightarrow$$
$$3\geqslant 3m^2P^2+\sum x\geqslant 3m^2P^2+3P\Rightarrow$$
$$1\geqslant m^2P^2+P=\frac{1-K}{K^2}\cdot P^2+P\Rightarrow$$
$$(1-K)P^2+K^2P-K^2\leqslant 0\Rightarrow$$
$$(P-K)[(1-K)P+K]\leqslant 0\Rightarrow$$
$$P-K\leqslant 0\Rightarrow P\leqslant K\Rightarrow$$
$$xyz=P^3\leqslant K^3$$

即式(P_4)成立,等号成立仅当 $x=y=z=K$.

配对题 3　设 $K,x,y,z\in(0,1)$,满足

$$\frac{\sqrt{x(1-x)}+\sqrt{y(1-y)}+\sqrt{z(1-z)}}{\sqrt{\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{zx}{y}}+\sqrt{\frac{xy}{z}}}=\sqrt{1-K}\tag{A_5}$$

则有

$$x+y+z\leqslant 3K\tag{P_5}$$

证明　应用 Cauchy 不等式与三元对称不等式,结合已知条件有

$$3\sum x(1-x)\geqslant[\sum\sqrt{x(1-x)}]^2=$$
$$(1-K)\left(\sum\sqrt{\frac{yz}{x}}\right)^2\geqslant 3(1-K)\sum x\Rightarrow$$
$$K\sum x\geqslant\sum x^2\geqslant\frac{1}{3}(\sum x)^2\Rightarrow$$
$$x+y+z=\sum x\leqslant 3K$$

即式(P_5)成立,等号成立仅当 $x=y=z=K$.

配对题 4　设 $K\in(\frac{1}{2},1),x,y,z\in(0,1)$,满足

$$\sqrt[4]{\frac{(1-y)(1-z)}{x}}+\sqrt[4]{\frac{(1-z)(1-x)}{y}}+\sqrt[4]{\frac{(1-x)(1-y)}{z}}=3\sqrt[4]{\frac{(1-K)^2}{K}}\tag{A_6}$$

则有

$$xyz\leqslant K^3\tag{P_6}$$

证明　记 $P=\sqrt[3]{xyz}\in(0,1),m=\sqrt[4]{\frac{(1-K)^2}{K}}$,于是

$$3mP^{\frac{3}{4}}=\sum\sqrt[4]{xy(1-x)(1-y)}\leqslant$$
$$\sum\sqrt[4]{xy(1-\sqrt{xy})^2}=\sum\sqrt{\sqrt{xy}(1-\sqrt{xy})}$$

令 $\lambda=\frac{K}{1-K}>0$,有(先只知 $\lambda>0$,后推知 $\lambda>1$,故"0"不变)

$$\lambda-1=\frac{2K-1}{1-K}>0$$

$$6m\sqrt{\lambda}P^{\frac{3}{4}}\leqslant 2\sum\sqrt{\sqrt{xy}(\lambda-\lambda\sqrt{xy})}\leqslant$$
$$\sum[\sqrt{xy}+(\lambda-\lambda\sqrt{xy})]=$$
$$3\lambda-(\lambda-1)\sum\sqrt{xy}\Rightarrow$$
$$3\lambda\geqslant 6m\sqrt{\lambda}P^{\frac{3}{4}}+(\lambda-1)\sum\sqrt{xy}\geqslant$$
$$6m\sqrt{\lambda}P^{\frac{3}{4}}+3(\lambda-1)P\Rightarrow$$
$$\lambda\geqslant 2m\sqrt{\lambda}P^{\frac{3}{4}}+(\lambda-1)P=$$
$$2m\sqrt{\lambda}K^{\frac{3}{4}}\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{3}{4}}+(\lambda-1)K\cdot\frac{P}{K}\qquad(1)$$

设

$$S=2m\sqrt{\lambda}K^{\frac{3}{4}}+(\lambda-1)K=$$
$$2\left[\frac{(1-K)^2}{K}\right]^{\frac{1}{4}}\left(\frac{K}{1-K}\right)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{3}{4}}+\frac{2K-1}{1-K}K=$$
$$2K+\frac{2K-1}{1-K}K=\frac{K}{1-K}\Rightarrow S=\lambda$$

在式(1)中应用加权不等式,并令 $t=\frac{3}{2}m\sqrt{\lambda}K^{\frac{3}{4}}+(\lambda-1)K>0$,有

$$\lambda\geqslant\lambda\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{t}{\lambda}}\Rightarrow 1\geqslant\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{t}{\lambda}}\Rightarrow\frac{P}{K}\leqslant 1\Rightarrow$$
$$xyz=P^3\leqslant K^3$$

即式(P_6)成立,易推之等号成立仅当 $x=y=z$.

如果我们精心构思,还会构造出一些更好更妙的配对题目.

(三)参数、指数推广

由于原赛题太美太妙,它激发了我们对它强烈的探讨欲望.

我们先从参数方面去推广题 1.

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

推广 1 设参数 $p,q,r>0$,正元数 $x<p,y<q,z<r$,且 $p+q+r=3$, $K\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,满足

$$\sqrt{\frac{p-x}{yz}}+\sqrt{\frac{q-y}{zx}}+\sqrt{\frac{r-z}{xy}}=\frac{3}{K}\sqrt{1-K} \tag{A$_7$}$$

则有

$$xyz\leqslant K^3 \tag{P$_7$}$$

显然,当 $K=\frac{3}{4}$,$p=q=r=1$ 时,式(P_7)化为式(P_1).

证明 设 $P=\sqrt[3]{xyz}$,$t=\frac{K}{1-K}>0$,那么 $t-1=\frac{2K-1}{1-K}>0$,再记 $m=\frac{3}{K}\sqrt{1-K}$,应用已知条件和平均值不等式,有

$$\begin{aligned}
m=\sum\sqrt{\frac{p-x}{yz}}\Rightarrow&\\
&2m\sqrt{t}P^{\frac{3}{2}}=2\sum\sqrt{x(pt-tx)}\leqslant\\
&\sum[x+(pt-tx)]=\\
&t\sum p-(t-1)\sum x=\\
&3t-(t-1)\sum x\Rightarrow\\
&3t\geqslant 2m\sqrt{t}P^{\frac{3}{2}}+(t-1)\sum x\geqslant\\
&2m\sqrt{t}P^{\frac{3}{2}}+3(t-1)P=\\
&2m\sqrt{t}K^{\frac{3}{2}}\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{3}{2}}+3K(t-1)\frac{P}{K}
\end{aligned} \tag{1}$$

设

$$\begin{aligned}
S=2m\sqrt{t}K^{\frac{3}{2}}+3K(t-1)=&\\
&2\cdot 3\frac{\sqrt{1-K}}{K}\sqrt{\frac{K}{1-K}}K^{\frac{3}{2}}+3K\frac{2K-1}{1-K}=\\
&3K\left(2+\frac{2K-1}{1-K}\right)=\frac{3K}{1-K}=3t\Rightarrow\\
&S=3t
\end{aligned} \tag{2}$$

令 $\theta=2mK^{\frac{3}{2}}\sqrt{t}\cdot\frac{3}{2}+3K(t-1)>0$. 在式(2)中应用加权不等式有

$$3t=S\geqslant S\left[\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{3}{2}\cdot 2m\sqrt{t}K^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{P}{K}\right)^{3(t-1)K}\right]^{\frac{1}{S}}=$$

$$S\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{\theta}{s}} \Rightarrow 1 \geqslant \left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{\theta}{s}} \Rightarrow P \leqslant K \Rightarrow$$

$$xyz = P^3 \leqslant K^3$$

即式(P_7)成立,易推得等号成立仅当 $x=y=z=K$.

推广 2 设指数 $\alpha,\beta,\gamma \in \left(\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)$,且 $\alpha+\beta+\gamma=3$,$x,y,z \in (0,1)$,满足

$$\sqrt{\frac{1-x}{yz}}+\sqrt{\frac{1-y}{zx}}+\sqrt{\frac{1-z}{xy}}=2 \tag{A_1}$$

则有

$$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot M \tag{P_8}$$

其中

$$M=\left[\left(\frac{5\alpha-3}{2}\right)^{5\alpha-3}\left(\frac{5\beta-3}{2}\right)^{5\beta-3}\left(\frac{5\gamma-3}{2}\right)^{5\gamma-3}\right]^{\frac{1}{5}} \tag{1}$$

特别的,当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,$M=1$,此时式(P_8)化为题 1 中式(P_1).

证明 设 $P=\sqrt[3]{xyz} \in (0,1)$,$p,q,r \in (0,2)$,且 $p+q+r=3$,那么

$$3+(2-p)+(2-q)+(2-r)=6$$

应用已知条件和平均值不等式有

$$2\sqrt{xyz}=\sum\sqrt{x(1-x)} \Rightarrow 2\sqrt{3}P^{\frac{3}{2}}=\sum\sqrt{x(3-3x)} \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sum[x+(3-3x)]=\frac{1}{2}(9-2\sum x) \Rightarrow$$

$$9 \geqslant 4\sqrt{3}P^{\frac{3}{2}}+2\sum x \Rightarrow$$

$$6 \geqslant 3\left(\frac{4P}{3}\right)^{\frac{3}{2}}+\sum\left[(2-p)\frac{4x}{3(2-p)}\right]\text{(应用加权不等式)} \geqslant$$

$$6\left[\left(\frac{4P}{3}\right)^{\frac{9}{2}}\prod\left(\frac{4x}{3(2-p)}\right)^{2-p}\right]^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$1 \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\left[\prod\left(\frac{4}{3}\right)^{2-p}\right]^{\frac{1}{6}}P^{\frac{3}{4}}\left[\prod\left(\frac{x}{2-p}\right)^{2-p}\right]^{\frac{1}{6}} \Rightarrow$$

$$1 \geqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{9}\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{\sum(2-p)}\right]^{2}\frac{(xyz)^3(\prod x^{2-p})^2}{[\prod(2-p)^{2-p}]^2}=$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{15}\left(\prod x^{7-2p}\right)\left[\prod(2-p)^{2-p}\right]^{-2} \Rightarrow$$

$$\prod x^{7-2p} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{15}\left[\prod(2-p)^{2-p}\right]^2 \tag{2}$$

我们令

$$\begin{cases}7-2p=5\alpha\\7-2q=5\beta\\7-2r=5\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-p=\dfrac{5\alpha-3}{2}\\2-q=\dfrac{5\beta-3}{2}\\2-r=\dfrac{5\gamma-3}{2}\end{cases}$$

且
$$\begin{cases}p,q,r\in(0,2)\\p+q+r=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha,\beta,\gamma\in\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{7}{5}\right)\\\alpha+\beta+\gamma=3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\prod x^{5\alpha}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{15}\left[\prod\left(\frac{5\alpha-3}{2}\right)^{\frac{5\alpha-3}{2}}\right]^{2}\Rightarrow$$

$$x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\left[\prod\left(\frac{5\alpha-3}{2}\right)^{5\alpha-3}\right]^{\frac{1}{5}}$$

即式(P_8)成立,易推得等号成立仅当 $x=y=z=\frac{3}{4}$ 且 $\alpha=\beta=\gamma=1$.

推广 2 并没有改变题 1 的已知条件,而是将所证结论进行了指数推广:如果将推广 2 转化为三角不等式,那就更显优美风趣了.

推广 2′ 设 $\triangle ABC$ 的三内角 A,B,C 满足

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$$

$\alpha,\beta,\gamma\in\left(\frac{3}{5},\frac{7}{5}\right)$ 且 $\alpha+\beta+\gamma=3$,则

$$(\sin A)^{\alpha}(\sin B)^{\beta}(\sin C)^{\gamma}\leqslant\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{M}\tag{P_9}$$

现在我们从指数上推广题 1 的已知条件式(A_1),看结论又将如何.

推广 3 设 $\alpha,\beta,x,y,z\in(0,1)$,且 $\alpha+\beta=1,1>K>\beta$,满足条件

$$\frac{(1-x)^{\alpha}}{(yz)^{\beta}}+\frac{(1-y)^{\alpha}}{(zx)^{\beta}}+\frac{(1-z)^{\alpha}}{(xy)^{\beta}}=\frac{3(1-K)^{\alpha}}{K^{2\beta}}\tag{A_8}$$

则有

$$xyz\leqslant K^{3}\tag{P_{10}}$$

显然,当取 $\alpha=\beta=\frac{1}{2},K=\frac{3}{4}$ 时,式(A_8)即为式(A_1),式(P_{10})化为式(P_1).

证明 设

$$\lambda=\frac{K}{1-K}\Rightarrow\alpha\lambda-\beta=\frac{\alpha K}{1-K}-\beta=\frac{\alpha K-\beta+\beta K}{1-K}=\frac{K-\beta}{1-K}>0$$

再设
$$P=\sqrt[3]{xyz}\in(0,1)\Rightarrow x+y+z\geqslant 3P$$

已知条件式(A_8)化为(证式(A_8)右边为 m)

$$mP^{3\beta}=\sum(1-x)^{\alpha}x^{\beta}\Rightarrow$$

$$m\lambda^{\alpha}P^{3\beta}=\sum(\lambda-\lambda x)^{\alpha}x^{\beta}(\text{应用加权不等式})\leqslant$$
$$\sum[\alpha(\lambda-\lambda x)+\beta x]=$$
$$\sum[\alpha\lambda-(\alpha\lambda-\beta)x]=$$
$$3\alpha\lambda-(\alpha\lambda-\beta)\sum x\leqslant$$
$$3\alpha\lambda-3(\alpha\lambda-\beta)P\Rightarrow$$
$$3\alpha\lambda\geqslant m\lambda^{\alpha}P^{3\beta}+3(\alpha\lambda-\beta)P=$$
$$m\lambda^{\alpha}K^{3\beta}\left(\frac{P}{K}\right)^{3\beta}+3(\alpha\lambda-\beta)K\cdot\frac{P}{K} \tag{1}$$

又设

$$\theta_1=3\beta m\lambda^{\alpha}K^{3\beta}>0,\theta_2=3K(\alpha\lambda-\beta)>0,\theta=\theta_1+\theta_2>0$$
$$S=m\lambda^{\alpha}K^{3\beta}+3(\alpha\lambda-\beta)K=$$
$$\frac{3(1-K)^{\alpha}}{K^{2\beta}}\left(\frac{K}{1-K}\right)^{\alpha}K^{3\beta}+\frac{3K(K-\beta)}{1-K}=$$
$$3K^{\alpha+\beta}+\frac{3K(K-\beta)}{1-K}=$$
$$3K+\frac{3K(K-\beta)}{1-K}=\frac{3K(1-\beta)}{1-K}\Rightarrow$$
$$S=3\alpha\lambda \tag{2}$$

在式(1)中应用加权不等式有

$$3\alpha\lambda=S\geqslant S\left[\left(\frac{P}{K}\right)^{\theta_1}\left(\frac{P}{K}\right)^{\theta_2}\right]^{\frac{1}{S}}=S\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{\theta}{S}}\Rightarrow$$
$$1\geqslant\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{\theta}{S}}\Rightarrow\frac{P}{K}\leqslant1\Rightarrow P\leqslant K\Rightarrow$$
$$xyz=P^3\leqslant K^3$$

即式(P_{10})成立.等号成立仅当

$$\begin{cases}\lambda-\lambda x=x\\ \lambda-\lambda y=y\\ \lambda-\lambda z=z\\ \lambda=\dfrac{K}{1-K}\\ \left(\dfrac{P}{K}\right)^{3\beta}=\dfrac{P}{K}\end{cases}\Rightarrow x=y=z=P=K$$

(四) 系数推广

在上一节，我们从两个方面指数推广了题 1，现在，我们再建立题 1 的两个系数推广.

推广 4 设 $x,y,z\in(0,1)$，$K\in(\frac{1}{2},1)$，$\lambda,\mu,\upsilon\in(0,3)$，且 $\lambda+\mu+\upsilon=3$，满足

$$\lambda\sqrt{\frac{1-x}{yz}}+\mu\sqrt{\frac{1-y}{zx}}+\upsilon\sqrt{\frac{1-z}{xy}}=3\cdot\frac{\sqrt{1-K}}{K}\qquad(A_9)$$

则有

$$xyz\leqslant K^3\left[\frac{1}{S(1-K)}\right]^{\frac{3S}{S+1}}\qquad(P_{11})$$

其中

$$S=2+\left(\frac{2K-1}{1-K}\right)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}\qquad(1)$$

特别的，当 $K=\frac{3}{4}$，$\lambda=\mu=\upsilon=1$ 时，式(A_9) 化为式(A_1).

当 $K=\frac{3}{4}$，$\lambda=\mu=\upsilon=1$ 时，$S(1-K)=1$，式(P_{11}) 化为式(P_1).

证明 设 $m=3\frac{\sqrt{1-K}}{K}$，$t=\frac{K}{1-K}\Rightarrow t-1=\frac{2K-1}{1-K}>0$，$P=\sqrt[3]{xyz}$，应用式($A_9$) 和平均值不等式有

$$m\sqrt{xyz}=\sum\lambda\sqrt{x(1-x)}\Rightarrow$$

$$2m\sqrt{t}P^{\frac{3}{2}}=2\sum\lambda\sqrt{x(t-tx)}\leqslant$$

$$\sum\lambda[x+(t-tx)]=$$

$$t\sum\lambda-(t-1)\sum\lambda x\leqslant$$

$$3t-3(t-1)\sqrt[3]{(\lambda\mu\upsilon)(xyz)}=$$

$$3t-3(t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}\cdot P\Rightarrow$$

$$2\cdot3\frac{\sqrt{1-K}}{K}\cdot\sqrt{\frac{K}{1-K}}P^{\frac{3}{2}}\leqslant$$

$$3t-3(t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}\cdot P\Rightarrow$$

$$\frac{t}{K}\geqslant2\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{3}{2}}+(t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}\cdot\frac{P}{K}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{1-K} \geqslant 2\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{3}{2}} + (t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon} \cdot \frac{P}{K} \tag{2}$$

由于
$$S = 2 + (t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon} = 2 + \frac{2K-1}{1-K} \cdot \sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}$$

在式(2)中应用加权不等式有

$$\frac{1}{1-K} \geqslant S\left[\left(\frac{P}{K}\right)^3 \left(\frac{P}{K}\right)^{(t-1)\sqrt[3]{\lambda\mu\upsilon}}\right]^{\frac{1}{S}} = S\left(\frac{P}{K}\right)^{\frac{S+1}{S}} \Rightarrow$$

$$\frac{P}{K} \leqslant \left[\frac{1}{S(1-K)}\right]^{\frac{S}{S+1}} \Rightarrow$$

$$xyz = P^3 \leqslant K^3\left[\frac{1}{S(1-K)}\right]^{\frac{3S}{S+1}}$$

即式(P_{11})成立,易推得等号成立仅当 $\lambda=\mu=\upsilon=1, x=y=z=K$.

题 1 的第二个系数推广便是:

推广 5 设 $K \in (\frac{1}{2}, 1), x, y, z \in (0,1)$,系数 $\lambda, \mu, \upsilon \in (0,3)$,且 $\lambda+\mu+\upsilon=3$,满足

$$(\mu+\upsilon)\sqrt{\frac{1-x}{yz}} + (\upsilon+\lambda)\sqrt{\frac{1-y}{zx}} + (\lambda+\mu)\sqrt{\frac{1-z}{xy}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{1-K}}{K} \tag{A_{10}}$$

则有

$$xyz \leqslant K^3 e^3 \tag{P_{12}}$$

其中

$$e = \left[\frac{3}{(1-K)S}\right]^{\frac{S}{S+3}} \tag{1}$$

$$S = 6 + (t-1)\sqrt{3\theta} \tag{2}$$

$$\theta = \mu\upsilon + \upsilon\lambda + \lambda\mu = \sum \mu\upsilon \tag{3}$$

$$t = \frac{K}{1-K} \tag{4}$$

显然,当 $K=\frac{3}{4}, \lambda=\mu=\upsilon=1$ 时,推广 5 化为题 1.

证明 记 $m = 3 \cdot \frac{\sqrt{1-K}}{K}, P = \sqrt[3]{xyz}$,注意到 $t-1 = \frac{2K-1}{1-K} > 0$,应用式($A_{10}$)和平均值不等式有

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com