碧海书道
BOOK HOUSE

高等学校数学学习辅导丛书

线性代数
全程学习指导

配同济四版

编著 刘学生

INSTRUCTION TEXTBOOK SERIES FOR MATHEMATICS

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

线性代数
全程学习指导

配同济四版

大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导(配同济四版)/刘学生编著．—7版．
·大连:大连理工大学出版社,2009.8
高等学校数学学习辅导丛书
ISBN 978-7-5611-1969-3

Ⅰ.线… Ⅱ.刘… Ⅲ.线性代数—高等学校—教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2006)第075393号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市软件园路80号　邮政编码:116023
发行:0411-84708842　邮购:0411-84703636　传真:0411-84701466
E-mail:dutp@dutp.cn　URL:http://www.dutp.cn
大连业发印刷有限公司印刷　大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm　印张:8.875　字数:369千字
2009年8月第7版　2009年8月第11次印刷

责任编辑:梁　锋　于建辉　责任校对:碧　海
封面设计:季　强

ISBN 978-7-5611-1969-3　定　价:14.00元

编者的话

通过《全程学习指导》丛书的编写，我们高等数学教研室的许多教师将教学经验与大家共享，与大家共同学习，共同提高。在此过程中，诸多学生获益，教师们研究教学法的热情与学习的热情也空前高涨。教研室的许多中青年教师都在教学之余参加了在职学习。目前，已经有多人获得数学博士学位，晋升教授，有的教师被学生评选为"最受学生欢迎的教师"。作为教研室主任，我深受鼓舞。

《线性代数》是大学各门类、各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。本书的目的是帮助广大学生扩大课堂信息量，提高应试能力，因此，本书严格按照教育部高等院校教学指导委员会审订的"本科数学基础课程教学基本要求"(教学大纲)，以及教育部最新的"全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲"的要求编写。

本书按照被全国许多高校采用的《线性代数》(同济第四版)的章节顺序编写，共 6 章，每章均有 4 个版块。

知识点考点精要　列出基本概念、重要定理、主要内容，突出必须掌握或考试出现频率高的核心内容。

典型题真题精解　精选具有代表性的例题进行详尽解析。这些例题涉及内容广，类型多，技巧性强，旨在提高大家分析问题、解决问题的能力，帮助大家掌握基本概念和理论，开拓解题思路，熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析　本版块为教材习题全解，为大家提供一种比较规范的解题思路和方法，以便读者对照和分析。

模拟试题自测 模拟试题力争反映考试的重点、难点，帮助大家进一步强化训练解题能力，巩固和提高学习效果。

在“典型题真题精解”和“模拟试题自测”版块中采用了大量历年考研真题。为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”的标注方式，如“060406”，说明此题是2006年数学四的考题，分值6分。

常言道，熟能生巧。剖析一定数量的范例，做一定数量的练习，无疑是应试的有效途径。在此过程中扎实掌握基本概念、基础理论、常用方法，注重科学思维方式的培养，才能掌握“数学力”，并将之转化为一种“数学素质”和“竞争力”。

本书自出版以来，连年加印，数次修订。想到成千上万的学子曾经阅读过此书，作为教师，我深感欣慰。每次修订，都有新的体会融入书的新版中，并根据考研大纲的变化，对重点、难点及例题都进行了调整，订正了原书的印刷错误，使其日臻完善。特别是最近几次修订，我的老师赵振海教授亲自对全书进行审阅，更提升了本书的水平。

此次修订，得到了编委会诸位前辈和同仁的指点，特此致谢！

希望读者通过E-mail等方式给我们提出宝贵意见和建议。

刘学生

2006年7月

目录

第一章 n阶行列式

知识点考点精要

行列式最早是由解线性方程组而引进的。它在许多方面都有广泛的应用。本章着重讲述了 n 阶行列式的定义、性质、计算及应用。

一、行列式的定义

n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列，而其符号为 $(-1)^t$，t 表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

二、几种特殊行列式

(1) 三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \text{（上三角形行列式）}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad \text{（下三角形行列式）}$$

(2) 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) 对称与反对称行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足
$$a_{ij}=a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

D 称为对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

满足

$$a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

D 称为反对称行列式。若阶数 n 为奇数,则 $D=0$。

(4) 范德蒙德行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

三、行列式的性质

(1) 行列式与它的转置行列式相等。

(2) 互换行列式的两行(两列),行列式变号。若行列式某两行(或两列)完全相同,此行列式等于零。

(3) 行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一数 k,等于以数 k 乘这个行列式。

(4) 行列式中如果有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零。

(5)
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(6) 把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)对应的元素上，行列式不变。

四、行列式的计算

(1) 定义法。

(2) 化为三角形行列式法，这是行列式计算中最基本的方法。

(3) 递推法：根据已给行列式 D_n 的特点，找出 D_n 的递推关系式。

(4) 降阶法：可利用按行(列)展开定理、拉普拉斯定理*、分块行列式的降阶定理*等进行计算。

(5) 升阶法：此法多采用的形式为加边法。

(6) 分解之和法。

(7) 分解之积法。

(8) 换元法。

(9) 数学归纳法。

(10) 线性因子法。

(11) 辅助行列式法。

(12) 范德蒙德行列式法。

(13) n 阶循环行列式法。

五、行列式的应用

克拉默法则：

若一个含有 n 个未知量、n 个方程的线性方程组

---

* 表示可在参考书中查到。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

其系数行列式 $D\neq0$，则线性方程组(1)有惟一解

$$x_i=\frac{D_i}{D} \qquad (i=1,2,3,\cdots,n)$$

其中，D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,\cdots,b_n$，而得到的行列式。

■ 典型题真题精解

【例 1】 填空题

(1) 五阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$______。

(2) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|\boldsymbol{A}|=$______。

(3) (010403) 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则第四行各元素余子式之和的值为______。

解 (1) $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$

(2) $(-1)^{n-1}(n-1)$

(3) -28

【例 2】 选择题

(1) 四阶行列式$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$的值等于(　　)。

A. $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$　　B. $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$

C. $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$　　D. $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$

解　选D。

【例3】 (定义法) 计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解　由行列式定义知,$D=\sum(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,因$a_{11}=a_{14}=a_{15}=0$,所以 D 的非零项 j_1 只能取 2 或 3。同理,由 $a_{41}=a_{44}=a_{45}=a_{51}=a_{54}=a_{55}=0$,因而 j_4j_5 只能取 2 或 3,又因 $j_1\cdots j_5$ 要求各不相同,故 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{5j_5}$ 项中至少有一个必须取零,所以$D=0$。

【例4】 (化为三角形行列式法) 计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解　各行加到第一行中去。

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

【例 5】（递推法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开，得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \tag{1}$$

即 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

按递推关系，得 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

由 $$D_1=\alpha+\beta,\quad D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2 \tag{2}$$

得 $$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n$$

由式(1)又可推导出

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})$$

按递推关系，得

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{3}$$

由式(2)、式(3)解得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

【例 6】（降阶法）计算

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

解　原式$=3\begin{vmatrix}5&3&2\\3&1&0\\2&4&0\end{vmatrix}=3\times2\begin{vmatrix}3&1\\2&4\end{vmatrix}=6\times10=60$

【例 7】（升阶法）计算行列式$|E_n-2uu^T|$，其中E_n是单位阵，$u=(u_1,\cdots,u_n)^T$为n维实列向量，且$u^Tu=1$。

解　将行列式$|E_n-2uu^T|$升为$(n+1)$阶行列式。

$$|E_n-2uu^T|=\begin{vmatrix}1&2u_1&2u_2&\cdots&2u_n\\0&1-2u_1^2&-2u_1u_2&\cdots&-2u_1u_n\\0&-2u_2u_1&1-2u_2^2&\cdots&-2u_2u_n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&-2u_nu_1&-2u_nu_2&\cdots&1-2u_n^2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&2u_1&2u_2&\cdots&2u_n\\u_1&1&&&\\u_2&&1&&\\\vdots&&&\ddots&\\u_n&&&&1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-\sum_{i=1}^{n}2u_i^2&2u_1&2u_2&\cdots&2u_n\\0&1&&&\\0&&1&&\\\vdots&&&\ddots&\\0&&&&1\end{vmatrix}$$

$$=1-2\sum_{i=1}^{n}u_i^2=-1\quad(\text{由}\sum_{i=1}^{n}u_i^2=1)$$

【例 8】（分解之和法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix}x_1-m&x_2&\cdots&x_n\\x_1&x_2-m&\cdots&x_n\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1&x_2&\cdots&x_n-m\end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2-0 & \cdots & x_n-0 \\ x_1-0 & x_2-m & \cdots & x_n-0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1-0 & x_2-0 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} -m & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^n+(-m)^{n-1}x_1+\cdots+(-m)^{n-1}x_n$$

$$=(-m)^n\left[1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{m}\right]$$

【例 9】（分解之积法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}\quad (n\geqslant 2)$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{cases} 0, & n>2 \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & n=2 \end{cases}$$

【例 10】（换元法）计算

$$\overline{D}_n=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x \\ x & a_2 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解 把 $\overline{D}_n$ 视为

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1-x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2-x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n-x \end{vmatrix}$$

中每个元素加上 x 所得，因此

$$\overline{D}_n = D_n + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij} = \prod_{i=1}^{n}(a_i-x)+x\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)}{a_j-x}$$

$$=x\prod_{i=1}^{n}(a_i-x)\left(\frac{1}{x}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{a_j-x}\right)$$

【例 11】（线性因子法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}$$

解 由 n 阶行列式定义知，D_n 的展开式是关于 x 的首项系数为 $(-1)^{n-1}$ 的 $(n-1)$ 次多项式 $D_n(x)$，当 $x=k$ $(k=0,1,\cdots,n-2)$ 时，$D_n(k)=0$，因此 $D_n(x)$ 有 $n-1$ 个互异根 $0,1,\cdots,n-2$，由因式定理，得

$$\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)\mid D_n(x)$$

故

$$D_n=(-1)^{n-1}\prod_{k=0}^{n-2}(x-k)$$

【例 12】（辅助行列式法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} f_1(a_1) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f_n(a_1) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

其中，$f_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为次数 $\leqslant n-2$ 的数域 F 上的多项式，$a_1,\cdots,a_n$ 为 F 中任意 n 个数。

解 若 $a_1,\cdots,a_n$ 中有两个数相等，则 $D_n=0$；若 $a_1,\cdots,a_n$ 互异，则每个 n 阶行列式

$$G(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

是 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x)$的线性组合。$f_i(x)(i=1,\cdots,n)$的次数$\leqslant n-2$，因而$G(x)$的次数$\leqslant n-2$，但$G(a_2)=\cdots=G(a_n)=0$，这说明 $G(x)$至少有 $n-1$ 个不同的根，故$G(x)=0$，所以 $G(a_1)=0$，即

$$D_n=0$$

【例 13】（n 阶循环行列式法）计算

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \cdots & b \\ c & c & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{vmatrix}$$

其中，$abc\neq 0$，$b\neq c$。

解 设 $f(x)=a+b(x+x^2+\cdots+x^{n-1})$，且令 $x^n-\frac{c}{b}=0$ 的 n 个根为 $x_i(i=1,\cdots,n)$，则

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$$

由

$$f(x)=a+b\left(\frac{x^n-x}{x-1}\right)=a+b\left[\frac{x^n-\frac{c}{b}}{x-1}+\frac{\frac{c}{b}-x}{x-1}\right]$$

有
$$f(x_i)=a+b\frac{\frac{c}{b}-x_i}{x_i-1}=\frac{(a-b)x_i+(c-a)}{x_i-1}$$

利用关系式

$$\sum x_i=\sum x_{i_1}x_{i_2}=\cdots=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_{n-1}}=0$$

$$x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n+1}\frac{c}{b}$$

得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{(a-b)x_i+(c-a)}{x_i-1}=\frac{\prod_{i=1}^{n}[(a-b)x_i+(c-a)]}{\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)}$$