

季素月 著

数学教学概论

Shuxue Jiaoxue Gailun



东南大学出版社

季素月 著

数学教学概论

Shuxue Jiaoxue Gailun



内 容 提 要

作者依据数学科学、教育科学、认知科学、心理科学的进展和最新研究成果,对中学数学的教学目的、教学内容、学习理论、教学实践、教学评价等五个方面进行了概括论述;在力求体现具有中国特色的数学教育的同时,尽量反映近年来我国数学教育改革的成功经验,以及国内外数学教育研究的新成果、新思想和新观点。

本书主要作为师范院校数学专业本、专科学生和相关专业硕士研究生的教材或参考资料,也可供中学数学教师和数学教育研究工作者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学教学概论/季素月. —南京:东南大学出版社,2000.4

ISBN 7—81050—628—5

I. 数… II. 季… III. 数学课—教学研究—中学
IV. G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 20511 号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)

出版人:宋增民

江苏省新华书店经销 扬州大学师范学院印刷厂印刷

开本:850mm×1168mm1/32 印张:11.00 字数:286 千字

2000 年 4 月第 1 版 2000 年 4 月第 1 次印刷

印数:1~2000 册 定价:18.00 元

前 言

自从 1982 年我国数学教育界提出创建具有中国特色的数学教育学以来,广大数学教育工作者在数学教学理论和实践等方面进行了深入而细致的研究,并取得了丰硕的成果。目前,我国对数学教育学的研究已日趋成熟,进入了理论建构的新阶段,呈现出一派欣欣向荣的景象。

由于现代教学论和数学学科的发展,也由于数学教育学理论的建立,师范院校曾经开设的数学教材教法课程,已逐步演变为数学教育学。传统的教材教法课注重教学经验的总结与归纳,注重教学技能、招式的传授与获取,而数学教育学则是一门研究数学教育现象、揭示数学教育规律的学科,是建立在数学和教育学的基础上,并综合运用心理学、认知科学、逻辑学等成果于数学教育实践而形成的一门文理渗透型的综合学科,它属于学科教育,是教育科学的重要组成部分。数学教学论又是数学教育学的一个分支,它旨在研究传授数学知识的一般规律,并为指导和改进数学教学实践提供科学的理论依据。由于影响数学教学这一具体的实践过程的因素是多方面的,加之本人水平有限,不可能对其作全面的讨论,故给本书定名为《数学教学概论》。

数学科学、教育科学、认知科学、心理科学所取得的重大成就和进展,为本书的撰写提供了新的理论基础和崭新的方法论;广大数学教师多年积累的教学经验为本书提供了丰富的素材。因此,本书在力求体现具有中国特色的数学教育的同时,努力做到求精、求新、务实,尽量反映我国数学教学多年来的成功经验,反映现代数学教学理论研究的新成果,以及国际数学教育中涌现的新思想、新观点。

全书共分九章,包括数学教学目的、教学内容、数学学习理论、数学教学实践、数学教学评价五个部分。由于数学教学目的既是教学过程的出发点,又是最后的归宿,具有总管全书的作用,因此第一章阐述了数学教学目的的制定依据和内容分析并介绍了世界各国关于数学教学目的的一些新提法。要实施高质量的数学教学,离不开对数学课程内容的理解和把握,于是,第二、三章分别从宏观和微观两个角度阐述了数学课程的设计与数学知识素材的有关内容,包括数学课程内容的选择与组织,数学概念、命题、问题与数学思想方法等。数学教学论的最重要的课题之一是探讨数学教学过程的规律性,也就是学生在教师指导下掌握数学知识的本质与特性,因此,第四至第六章分别论述了数学学习的基本理论、数学思维的方法与形式以及数学能力的培养。数学教学的新思想、新观点、新理论,最终必须落实于教学实践,所以,第七、八章分别阐述了关于数学教学的模式、方法与教学技能等有关内容。最后第九章讨论了教学评价的有关问题,着重阐述了学生的学习质量和教师课堂教学质量的测量与评价的一般方法。每章末配置了适量的思考题,以供教学时选用。

在撰写过程中,笔者学习了一些教学论、学习心理学、数学教育的论著,参考了国内外数学教学的成功经验和研究成果,在此谨向有关作者致以最诚挚的敬意。

本书得以出版,完全仰仗于一些关心我的师长和朋友的热情鼓励与帮助,仰仗于东南大学出版社的理解与支持。在此,谨向他们表示最深切的感谢。

由于本人的水平有限,书中一定有许多不足和疏漏之处,恳请同行专家和读者不吝赐教。

作者

2000年3月于瘦西湖畔

目 录

第一章 数学教学目的与任务	(1)
第一节 制定数学教学目的的依据.....	(1)
第二节 我国数学教学目的的提法的演变.....	(8)
第三节 中学数学教学目的结构体系	(12)
第四节 其它国家数学教学目的的简介	(20)
第二章 数学课程	(29)
第一节 数学课程的设计	(30)
第二节 我国中学数学课程的基本内容	(39)
第三节 数学课程改革简介	(46)
第三章 数学教学的知识素材	(59)
第一节 数学概念	(60)
第二节 数学命题	(71)
第三节 数学问题	(86)
第四节 数学思想方法	(96)
第四章 数学学习的基本理论	(112)
第一节 数学学习的特点与类型.....	(112)
第二节 学习理论简介.....	(117)
第三节 数学学习过程的心理分析.....	(126)
第五章 数学思维	(141)
第一节 思维及数学思维的特性.....	(141)

第二节	数学思维的方法·····	(146)
第三节	数学思维基本形式·····	(160)
第四节	数学思维的培养·····	(180)
第六章	数学能力·····	(189)
第一节	数学能力概述·····	(189)
第二节	数学运算能力的培养·····	(197)
第三节	逻辑推理能力的培养·····	(211)
第四节	空间想象能力的培养·····	(217)
第五节	解决数学问题能力的培养·····	(229)
第七章	数学教学的过程、模式和方法·····	(248)
第一节	数学教学过程·····	(248)
第二节	数学教学基本模式·····	(252)
第三节	数学教学方法·····	(265)
第八章	数学教学技能·····	(276)
第一节	备课·····	(276)
第二节	教学活动的设计与组织·····	(290)
第三节	数学教学的语言艺术·····	(299)
第四节	课外工作·····	(309)
第九章	数学教学测量与评价·····	(317)
第一节	数学教学测量与评价概述·····	(317)
第二节	数学学习质量的测量与评价·····	(324)
第三节	数学课堂教学质量的评价·····	(339)

第一章 数学教学目的与任务

教育,作为人类生存和发展必须进行的一种活动,其主要特征是具有明确的目的性.对于数学学科而言,数学教学要达到的目的,既是数学教育的出发点,又是数学教育的归宿.它在很大程度上决定了数学学科的教学内容、教学方法,乃至教学评价的标准.

中学数学教学大纲是根据国家发展经济、振兴科学技术、繁荣教育事业的需要,对中学数学教育提出的法令性文件.

在教学大纲中所规定的中学数学教学目的,是国家就中学生的知识教养、智能发展和个性品德教育三方面对数学教育提出的要求.

中学数学教学目的是教学工作的指南,是确定教学内容,掌握教学原则,运用教学手段和环节的准则,反过来,它也是衡量教学质量高低的唯一标准.

每一堂课也要受教学目的的制约,看一堂课上得好坏,首先看这堂课的教学目的是否明确,教学目的能否完成,而不仅仅看板书是否漂亮,课讲得是否流畅,课堂气氛是否热烈.当然,这些都是上好一堂课的必要条件.

由此可见,全面深刻地理解教学目的,并以它为指导来进行与检查日常的教学工作,不仅是提高当前教学质量的需要,也是进行数学教学改革,实现数学教学现代化的需要.

第一节 制定数学教学目的的依据

社会的需要与人自身的发展是辩证统一的,教学目的必须反

全书共分九章,包括数学教学目的、教学内容、数学学习理论、数学教学实践、数学教学评价五个部分。由于数学教学目的既是教学过程的出发点,又是最后的归宿,具有总管全书的作用,因此第一章阐述了数学教学目的的制定依据和内容分析并介绍了世界各国关于数学教学目的的一些新提法。要实施高质量的数学教学,离不开对数学课程内容的理解和把握,于是,第二、三章分别从宏观和微观两个角度阐述了数学课程的设计与数学知识素材的有关内容,包括数学课程内容的选择与组织,数学概念、命题、问题与数学思想方法等。数学教学论的最重要的课题之一是探讨数学教学过程的规律性,也就是学生在教师指导下掌握数学知识的本质与特性,因此,第四至第六章分别论述了数学学习的基本理论、数学思维的方法与形式以及数学能力的培养。数学教学的新思想、新观点、新理论,最终必须落实于教学实践,所以,第七、八章分别阐述了关于数学教学的模式、方法与教学技能等有关内容。最后第九章讨论了教学评价的有关问题,着重阐述了学生的学习质量和教师课堂教学质量的测量与评价的一般方法。每章末配置了适量的思考题,以供教学时选用。

在撰写过程中,笔者学习了一些教学论、学习心理学、数学教育的论著,参考了国内外数学教学的成功经验和研究成果,在此谨向有关作者致以最诚挚的敬意。

本书得以出版,完全仰仗于一些关心我的师长和朋友的热情鼓励与帮助,仰仗于东南大学出版社的理解与支持。在此,谨向他们表示最深切的感谢。

由于本人的水平有限,书中一定有许多不足和疏漏之处,恳请同行专家和读者不吝赐教。

作者

2000年3月于瘦西湖畔

科中的渗透,人们对数学的认识产生了极大的变化,这种变化必然要对数学教育提出新的要求.现在每天的报纸和公众传媒广泛使用图表、统计数据,由于计算机的介入,大多数职业要求从业人员具有分析能力而不单纯是机械操作技能.1980年前后,一批具有科学与技术融合特性的新技术的出现,使科学与技术之间不再界限分明,这种被称为“高科技”的新技术的发明、掌握与应用,对人的素质提出更高要求.所有这些都说明了这样一个结论,人们必须具有较高的数学修养和更强的数学能力,才能适应这种现代化社会的生活与工作.美国国家研究委员会(NRC)1990年发表的关于数学教育未来的报告《Everybody Counts》对此作了精辟的论述:“21世纪的劳动力将是较少体力的而较多智力型的,较少机械的而较多电子的,较少稳定的而较多变化的.”^①这表明信息社会的公民必须普遍地具有较高的智力水平.

我国为了适应信息时代对人才培养的需求,提出了公民素质教育的基本要求.九年制义务教育大纲与所规定的教学目的集中体现了素质教育的思想.不久的将来,高中课程目标与标准也要进行相应的变革.对于数学教学来说,要达到这种普遍的高标准,就不能满足于会解题,得高分,而应该“发展学生广泛的基本数学能力”,帮助学生学会“数学地思考”,学会“数学地观察世界、解决问题”,等等.

二、数学学科的特点及其教育价值

数学教学目的的制定,除了满足社会发展的需求,还应考虑数学学科的特点及其育人价值.

谈及数学学科的特点,比较经典的说法是亚历山大洛夫在其《数学——它的内容、意义和方法》一书中指出的,数学具有高度抽象性,逻辑严密性与结论的确定性,以及广泛的应用性.

^① 美国国家委员会,方企勤等译.人人关心数学教育的未来.世界图书出版公司,1993.12

抽象性从最原始的数学概念——数与几何图形中就已经表现出来,在原始概念基础上逐渐产生诸如复数、函数、积分、泛函,甚至无限维空间等高度抽象的概念,以至于似乎与现实世界失去了一切联系.今日数学,既舍去了对象具体的性质,也舍去了对象的具体关系,只把抽象对象之间的关系结构作为研究对象.

不过,抽象是任何一门学科乃至全部人类思维都具有的属性,那么,与其它学科相比,数学抽象性具有怎样的特征呢?

首先,数学抽象出物体或现象所固有的量的关系或空间形式,而舍弃了其它的一切.其次,数学的抽象是经过一系列逐级抽象阶段而产生的,它所达到的抽象程度大大超过了自然科学中一般的抽象,以数与形的概念形成为例可对此作详细解释.最后,不仅数学概念是抽象的,并且获得结果的方法也是抽象的.自然科学家为了证明理论的真实性的求助于实验,而数学家获取定理只能依赖于逻辑与计算,虽然有时也凭实际模型、具体事例发现某个数学命题,但命题最终成立必须得到严格的逻辑论证才行.

由于获取数学结论的基本方法是逻辑推理,由逻辑推理的精密性导致了数学结论的逻辑严密性和确定性.

但是,数学的严密性和确定性不是绝对的,在某个数学系统内,从原始概念和公理出发,运用正确的推理所得到的结论必定是无可争辩、确定无疑的.然而,如果所在的系统不同,相同的条件不一定得出相同的结论.例如在欧氏几何中,三角形内角之和等于 π ,但在仅改动一条公理的罗氏几何中,三角形内角之和小于 π ,这从另一角度反映了数学证明的精密性和确定性.

数学的高度抽象性决定了数学具有广泛应用性.在日常生活,我们几乎每时每刻地与数学概念和结论打交道.在科学技术发展之中,离开了数学理论和计算,也许任何一点技术的改造也不可能,在新的技术发展潮流中数学起了十分重要的作用.最后,几乎所有的科学都或多或少地运用着数学.数学发展简史表明,一些

学科不仅给数学提供新问题,而且成为数学应用的广阔天地,力学、天文、物理、化学等学科在发展自己理论时都广泛地运用了数学.例如,通过数学计算,发现了太阳系行星之一海王星.伽罗瓦的有限域理论应用于编码,发展了 20 世纪的通讯事业.在现代数学发展中,数学理论、数学方法与某些学科相结合,形成许多边缘学科——生物数学、经济数学、控制论等等.如今,人们普遍认识到,高新技术的基础是应用科学,而应用科学的基础是数学.事实上,数学已经成为自然科学、社会科学和行为科学的基础,并结合计算机的应用形成了一种“数学技术”,它为人们交流信息提供了一种有效的、简洁的手段.数学技术这个术语的出现标志着数学的应用达到了一个新的阶段.数学同时具有科学与技术两种品性,这是其它学科难以具备的.

数学的三大特点使得数学教育具有其独特的应用价值与文化价值.

1. 应用价值

现代科学技术发展的重要特征之一,就是迅猛发展的数学化趋势,如今数学的内容、思想、方法在人类社会生活中已经得到广泛应用.在科学成为直接的社会生产力的现代条件下,数学为人们认识世界与科学研究提供了表述关系与模式的高度精确化的数学语言,如数学的术语、词汇、符号等.此外,数学还为人们解决问题提供了数学模型和方法.当我们解决实际问题时,首先要把这些问题的翻译成数学问题,经过数学处理后再用所得的结果对原来的问题作出解释与回答.这种由实际问题抽象为“数学模型”的所谓“数学化”过程,既用到各种数学知识,如概念、符号、公式、定理,又用到各种数学方法与思想,如定量分析的方法,数学模型方法,随机思想,优化思想等等.从长远观点看,这些思想方法比具体的数学知识具有更重要的应用价值.

因此,数学教学目的必须体现数学的应用价值,必须让学生切

身感受到数学在他们生活中以及未来事业中获得成功所起的决定性作用,必须教给他们适应社会发展需要进一步学习的最基础的数学知识与技能,必须通过数学知识的学习发展他们的各种数学能力.

2. 文化价值

数学所具有的特性使得数学教育对提高一个民族的文化素质起到非常关键的作用.

首先,数学教育可使人们养成从数学的角度看待问题的习惯;头脑中有数量与规律概念;处理问题时既有准确的定性分析,又有具有说服力的定量方法;面对错综复杂的事物及其联系,能够把注意力集中在对研究问题起关键作用的特征上,并用恰当的方式来表示这种特征,从而方便地、精确地进行思考与交流.总之,数学教育可使人形成正确的数学观,学会数学地观察世界、思考问题的方法.

其次,数学是思维的体操.这句名言生动形象地表明了数学学习对思维训练的特殊作用.由于数学学习是一个充满着观察、实验、猜测、矫正与调控的探索过程,因此,数学的思维训练功能在两方面有突出的表现,即数学学习既能促进逻辑思维的发展,又有利于人们的数学直觉和创造才能的发展.

数学发展到今天,其研究对象已不是直接来自于客观世界.作为纯数学的研究对象,一般数学概念都有定义,数学运算、求解、推理必须依据相应的定义、定理、公式和逻辑规则来进行.在解决问题时,人们必须掌握各种解题方法,选择解题策略,领悟解题思想,学会自我评价与调整.所有这些学习活动都是对思维的强有力的磨炼,其结果可使学生掌握思维方法,提高思维品质,发展思维能力.

数学对思维训练功能的另一方面表现为对数学美的领悟、欣赏与追求.数学的高度抽象性、逻辑严谨性使得数学是科学美的主

要形式.数学美的基本内容在于它的统一性(对称性)、简单性、奇异性和抽象性.^①所谓统一性,是指部分与部分、部分与整体之间的和谐一致,包括事物之间的对称现象,不同数学对象之间所存在的共同规律与内在联系.所谓简单性,是指用简单的数学公式揭示出隐藏在复杂问题中的规律与本质.所谓奇异性,是指所得出的结果或有关的发展出乎人的意料,在惊愕之余从而产生情感上的赞叹与欣赏.奇异性结果的获得往往意味着旧的观念的更新,意味着人的认识的飞跃,数学史上不乏此类实例.数学的统一性、简单性、奇异性之源在于数学的抽象性,数学的高度抽象性,充分反映了人的理性、智慧和创造才能的力量;反之,人类的智慧借助数学抽象得到了最大可能的发展.因此,把抽象作为一种数学美,很大程度上意味着对人类自身智慧的赞美.

数学家对数学美的追求导致数学科学的发展,而从教育的角度看,学生对数学美的追求不仅可以激发学习兴趣,而且有利于学生审美直觉的发展,为培养创造才能打好基础.

最后,对抽象的、逻辑的、辩证的数学知识的学习,必然会对学习者的学习态度、钻研精神等非智力因素产生潜移默化的影响.非智力因素也是人的文化素质的一个组成部分,因此,数学教育应当将掌握数学知识、发展数学能力与培养非智力因素结合起来.

正因为数学教育对人的文化素质与理性精神具有上述重要影响,而这种影响往往是潜在的、缓慢的、长期的,所以,数学常被称为“看不见的文化”.数学教学目的的制定应当体现这种文化价值.

三、学生的年龄特征

制定中学数学教学目的,还应慎重考虑学生的年龄特征与认识水平.学生的年龄特征与认识水平在某种程度上,决定了教学目的中所规定的基础知识和基本能力的深度和广度.

^① 郑毓信.数学方法论.南宁:广西教育出版社,1995.188

学生的认识能力(尤其是思维能力)的发展是有规律的,但也是有限度的.中学阶段青少年的智力正处于成长发展时期,知识经验和认识能力尚未成熟,因此,教学目的中对知识、技能、能力的要求必须适应学生的年龄特征与发展水平,这就决定了对基础知识、基本技能与能力的要求不能偏高、偏深,“拔苗助长”势必产生事与愿违的结果.另一方面,我们必须认识到,中学阶段正是学生获取知识、发展能力的关键时期,而教学过程是一个特殊的认识过程,最有利于学生的知识经验的积累与能力的发展,因此,提出的学习目标与要求,既要适应学生已有水平,又能促使学生在原有基础上的进一步发展.任何过低估计学生的认识能力或者降低要求的做法都会给人才培养带来损失.

由此可见,学生的年龄特征决定着教学目的的“量”与“度”,其基本准则是在适应的基础上促其发展.

第二节 我国数学教学目的的提法的演变

五四运动之后,提倡科学、民主的新思想,极大地推动了我国数学教育的发展.从此,我国的数学教育开始走向正轨,成为世界数学教育的一部分.自1949年新中国成立至今,我国先后颁布了六套数学教学大纲,关于中学数学教学目的的提法随之经历了下述演变.

新中国成立之初,我国于1951年颁布的《中学数学科课程标准》(草案)中提出的目的是:

(1)形数知识.以讲授数量计算、空间形式,及其相互关系之普遍知识为主;

(2)科学习惯.教学须用数理之严谨来培养学生观察、分析、归

纳、判断、推理等科学习惯,树立探索科学的精神和良好的学习风尚;

(3)辩证思想.教学须相机指示因某数量(或形式)之变化所引起之量变质变,借以启发学生之辩证思想;

(4)应用技能.教学须训练学生熟悉工具(名词、记号、定理、公式、方法等),使之能准确计算、精密绘图,稳妥地应用它们去解决(在日常生活、社会经济及自然环境中所遇到的)有关形与数的实际问题.

这种提法既强调数学在日常生活中的应用,也要求掌握与函数概念有关的辩证思想,既强调“普通知识”的学习,又强调“科学习惯”、“应用技能”的培养,这在今天仍有其积极意义.

1952年,我国教育部编订了《中学数学教学大纲》(草案),尽管带有浓厚的前苏联色彩,但这是新中国的第一个中学数学教学大纲.大纲中规定:^①

“中学数学教学的目的是教给学生以数学的基础知识,并培养他们应用这种知识来解决各种实际问题所必须的技能 and 熟练技巧.教师在讲授数学的过程中,要贯彻新民主主义教育的一般任务:形成学生辩证唯物主义的世界观,培养他们的新的爱国主义以及民族自尊心,锻炼他们的坚强的意志和性格.”

1958年的“教育革命”,受当时左倾错误的影响,过分强调教育与生产劳动相结合,打乱了正常的教学秩序,降低了教学质量.但也提出了一些积极意见,如结合中国实际,提高中小学数学教学质量,改变中小学数学范围窄、内容浅的状况等等.1959年修订的中、小学数学教学大纲中,对中学数学教学目的作了如下规定:

“使学生获得数学的基本知识,掌握计算、作图和测量等技能,并且能够把这些知识和技能技巧运用到生活、生产和学习其它科

^① 马忠林等.数学教育史简编.南宁:广西教育出版社,1991.190

学方面去,通过数学教学,发展学生的逻辑思维和空间想象力,向学生进行共产主义的思想政治教育,培养学生的辩证唯物主义观点。”

在总结搬用原苏联数学课程模式、1958年教育大革命和1960年数学课程现代化经验教训的基础上,具有我国特色的《全日制中学数学教学大纲》(草案)问世,并于1963年颁布实施。其中规定中学数学教学的目的是:

“使学生牢固地掌握代数、平面几何、立体几何、三角和平面解析几何的基础知识,培养学生正确而迅速的计算能力、逻辑推理能力和空间想象能力,以适应参加生产劳动和进一步学习的需要。”

该大纲规定的教学目的正式提出了数学的三大能力,并强调数学教学中的知识掌握,但不太重视知识与现实的联系,不强调知识的应用。这种提法对后来的数学教育产生较大影响。

1966年,我国开始了“文化大革命”。“文革”之后,拨乱反正便成了当务之急。在数学教育方面,1978年颁布的《全日制十年制学校中学数学教学大纲》(试行草案)规定中学数学教学的目的是:

“使学生切实学好参加社会主义革命和建设,以及学习现代科学技术所必需的数学基础知识;具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力,从而逐步培养学生分析问题和解决问题的能力。”同时指出:“要激励学生为实现四个现代化学好数学的革命热情,培养学生的辩证唯物主义观点。”

经全国中小学教材审定委员会审定,由国家教育委员会于1987年颁布的《全日制中学数学教学大纲》规定中学数学的教学目的是:

“使学生学好从事社会主义现代化建设和进一步学习现代科学技术所必需的数学基础知识和基本技能,培养学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力,以逐步形成运用数学知识来分析 and 解决实际问题的能力”。同时指出:“要培养学生对数学的兴趣,