高中数学

考点透视

与专项训练

Maths

丛书主编
陈占勇　李保卫

平面几何

Difficulties Analysis & Special practice for Senior High school Maths

江 西 高 校 出 版 社

Analysis & Special Practice

高中数学

考点透视与专项训练

平面几何

丛书主编：陈占勇　李保卫

本册主编：李学端　张保仕

江西高校出版社

图书在版编目(C I P)数据

高中各科考点透视与专项训练丛书·数学·平面几何/陈占勇,李保卫主编;李学端,张保仕编著.—南昌:江西高校出版社,2003.7

ISBN 7-81075-498-X

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈… ②李… ③李… ④张… Ⅲ.几何课-高中-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 051376 号

本册责任编辑:辜晓波

江西高校出版社出版发行
(江西省南昌市洪都北大道 96 号)
邮编:330046 电话:(0791)8592235,8504319
江西恒达科贸有限公司照排部照排
江西教育印刷厂印刷
各地新华书店经销
*
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷
850mm×1168mm 1/32 8.125 印张 320 千字
印数:1~16000 册

定价:50.00 元(全五册)

目　录

第一章 平面向量

第一节 平面向量

一 知识点强化速记

1. 已知正方形 $ABCD$ 边长为 1，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，则 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的模等于 ( )

A. 0　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{2}$

2. 下列算式中不正确的是 ( )

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$

B. $\vec{m}-\vec{n}=-(\vec{n}-\vec{m})$

C. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$　D. $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

3. 已知 $\vec{a}=(10,5)$，$\vec{b}=(5,x)$ 且 $\vec{a}/\!/\vec{b}$，则 x 的值为 ( )

A. 2.5　　B. 2　　C. 5　　D. 0.5

4. 已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 均为非零向量，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 是 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的 ( )

A. 充分非必要条件　　B. 必要非充分条件

C. 充要条件　　D. 非充分非必要条件

5. 已知 $A(1,2)$，$B(4,2)$，则向量 $\overrightarrow{AB}$ 按向量 $(-1,3)$ 平移后得到的向量是 ( )

A. $(3,0)$　　B. $(3,5)$　　C. $(-4,3)$　　D. $(2,3)$

6. 已知 $A(3,y)$、$B(-2,2)$、$C(6,-9)$ 三点共线，则 $y=$________.

7. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|$ 的值是________.

8. 已知 $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\overrightarrow{OP_3}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{OP_1}|=|\overrightarrow{OP_2}|=|\overrightarrow{OP_3}|=1$，则 $\overrightarrow{OP_1}$、$\overrightarrow{OP_2}$、$\overrightarrow{OP_3}$ 两两夹角是________.

9. 给出下列结论：①若 $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\vec{b}=\vec{0}$，②若 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$，③$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$，④$\vec{a}\cdot[\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})]=0$

其中正确结论的序号是________.

二 高考命题分析与预测

平面向量是近三年高考每年必考内容，分值由前两次的 7 分，上升到 2002 年的 13 分，有一个小题和一个大题中的一部分。预测今后还会出现一个小题考查其基础知识，一个大题与三角或圆锥曲线等联系、结合考查。这几

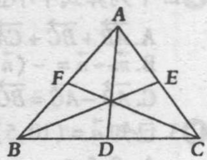
年的试题考查的主要内容是向量的加减法、实数与向量的和、向量共线的充要条件、平面向量的数量积及其坐标表示、向量垂直的条件等. 这几年小题难度不大,而 2000 年(文理)22 题难度系数为 0. 07 – 0. 08,2002 – 文(22)理(21)难度系数为 0. 16 – 0. 25. 因此,复习时应掌握好向量的运算,打好基础很重要. 大题都考查了数量积,建议对向量数量积的定义、几何表示,以及在求长度、角度、证明垂直等应用上做好复习. 此外,复习时要对两个向量的数量积和两个实数积进行对比,找出异同点,还要重视坐标运算及定比分点的学习.

三　典题精析、考点透视

【例1】已知:D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 的中点,证明:$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$.

【答案】 $\vec{0}$

【精析】 根据题意画出图形,把这三个向量分别表示成两个向量的线性组合.



例 1 题图

解:如图所示,设$\overrightarrow{BC}=\vec{a}$,$\overrightarrow{CA}=\vec{b}$

则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=-\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$

$=\vec{b}+\frac{1}{2}(-\vec{b}-\vec{a})=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

所以$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=\vec{0}$

【点评】熟练掌握求两个向量的和与差的法则是解题的关键.

【例2】已知四边形 $ABCD$,且存在实数 t_1、t_2、t_3,使得 $t_1\overrightarrow{DA}+t_2\overrightarrow{DB}+t_3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$ 和 $t_1+t_2+t_3=0$ 同时成立,求证:$t_1=t_2=t_3=0$.

【证明】 由 $t_1+t_2+t_3=0$ 得 $t_1=-(t_2+t_3)$

因为 $t_1\overrightarrow{DA}+t_2\overrightarrow{DB}+t_3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$　　所以 $-(t_2+t_3)\overrightarrow{DA}+t_2\overrightarrow{DB}+t_3\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

即 $t_2(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})+t_3(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA})=\vec{0}$　　所以 $t_2\overrightarrow{AB}+t_3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

因为$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$不共线　　所以 $t_2=t_3=0$　　所以 $t_1=0$　　故 $t_1=t_2=t_3=0$

【点评】已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为不共线的向量,且存在实数 x、y 使 $x\vec{a}=y\vec{b}$ 则 $x=y=0$,这种方法求一些向量等式中的待定系数很有效.

【例3】(2001 年全国)若向量 $\vec{a}=(1,1)$,$\vec{b}=(1,-1)$,$\vec{c}=(-1,2)$,则$\vec{c}=$ (　).

A. $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}$　　B. $\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{3}{2}\vec{b}$

C. $\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$　　D. $-\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】 B

【精析】 若设 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，实际是求 x,y. 使
$\vec{c}=(-1,2)=x(1,1)+y(1,-1)=(x+y,x-y)$
解：设 $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b},x,y\in R$

则 $\vec{c}=(-1,2)=x(1,1)+y(1,-1)=(x,x)+(y,-y)$

$=(x+y,x-y)$

所以 $\begin{cases}x+y=-1\\x-y=2\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{2},y=-\dfrac{3}{2}$

所以 $\vec{c}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{3}{2}\vec{b}$.

【点评】解本题的关键是熟练掌握平面向量坐标运算的法则.

【例4】已知 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(x,1)$. 若 $\vec{\mu}=\vec{a}+2\vec{b},\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}$，且 $\vec{\mu}/\!/\vec{v}$，则 x 等于 ( )

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

【答案】 B

【精析】 解本题的关键是如何运用平行向量基本定理：向量 $\vec{b}$ 与非零向量 $\vec{a}$ 共线的充要条件是存在唯一实数 λ，使 $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

解：$\vec{\mu}=\vec{a}+2\vec{b}=(1,2)+2(x,1)=(1+2x,4)$

$\vec{v}=2\vec{a}-\vec{b}=2(1,2)-(x,1)=(2-x,3)$

因为 $\vec{\mu}/\!/\vec{v}$ 所以存在实数 λ，使 $\vec{\mu}=\lambda\vec{v}$ 即

$(1+2x,4)=(2\lambda-\lambda x,3\lambda)$

所以 $\begin{cases}2x+1=2\lambda-\lambda x\\4=3\lambda\end{cases}$ 解得 $x=\dfrac{1}{2}$

另：也可用 $\vec{a}=(x_1,y_1),\vec{b}=(x_2,y_2),\vec{a}/\!/\vec{b}$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$ 来解. 即

因为 $\vec{\mu}/\!/\vec{v}$ 所以 $(2x+1)\times3-4\times(2-x)=0$，所以 $x=\dfrac{1}{2}$.

【点评】应认真复习，充分理解，灵活运用平行向量基本定理.

【例5】(2000 年全国)设 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是任意的非零平面向量，且相互不共线，则

①$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{0}$；

②$|\vec{a}|-|\vec{b}|<|\vec{a}-\vec{b}|$；

③$(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ 不与 $\vec{c}$ 垂直；

④$(3\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})=9|\vec{a}|^2-4|\vec{b}|^2$

中，是真命题的有 ( )

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ②④

【答案】 D

【精析】 正确运用平面向量的概念、运算、几何意义等是解题的关键.

解：两个向量的数量积是一个实数，实数与向量的积是一个向量，$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ 是一个与 $\vec{c}$ 共线的向量，$(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ 是与 $\vec{b}$ 共线的向量，而由条件 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 非零且不共线，故①是假命题.

因为 $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$，据向量加减法几何意义知②真，对于③，先看：$[(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]\cdot\vec{c}=(\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-(\vec{c}\cdot\vec{a})\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})=0$

所以 $(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 垂直. 故③假.

据平面向量数量积的运算可知④真，故选 D.

【点评】本题涉及知识点较多,但重点考查了实数的积与平面向量的数量积的异同点,复习时应进行对比,加深理解.

【例6】在$\triangle PQR$中,$\overrightarrow{PQ}=(2,3)$,$\overrightarrow{PR}=(1,k)$,且$\triangle PQR$的一个内角为直角,求$k$的值.

【答案】 $-\frac{2}{3}$、$\frac{11}{3}$或$\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})$

【精析】 哪个内角是直角,不确定,需分情况讨论,再利用向量垂直的充要条件进行解题.

解:(1)若$\angle P=90°$,则$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$,

所以$2\times1+3k=0$, 即$k=-\frac{2}{3}$

(2)若$\angle Q=90°$,则$\overrightarrow{QR}\cdot\overrightarrow{PQ}=0$

而$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PR}-\overrightarrow{PQ}=(1,k)-(2,3)=(-1,k-3)$

所以$-1\times2+(k-3)\times3=0$ 即$k=\frac{11}{3}$

(3)若$\angle R=90°$,则$\overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{QR}=0$,

所以$-1+k(k-3)=0$ 即$k^2-3k-1=0$

所以$k=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{13})$

【点评】若$\vec{a}=(x_1,y_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2)$,则$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直的充要条件是$x_1x_2+y_1y_2=0$.此结论的应用是高考中的一个重要知识点.

【例7】已知$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$,$\vec{a}$与$\vec{b}$有关系$|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}-k\vec{b}|$,其中$k>0$.

(1)用k表示$\vec{a}\cdot\vec{b}$.

(2)求$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值,并求此时$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的大小.

【答案】 答案见精析

【精析】 由条件知$|\vec{a}|=1$,$|\vec{b}|=1$,关系式两边平方,即可得到$\vec{a}\cdot\vec{b}$与k的关系式,也可由$\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos(\alpha-\beta)$,想到先求向量$k\vec{a}+\vec{b}$,$\vec{a}-k\vec{b}$再求模,进而求之.

解法一:(1)因为$|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}-k\vec{b}|$

两边平方得$k^2\vec{a}^2+\vec{b}^2+2k\vec{a}\cdot\vec{b}=3(\vec{a}^2+k^2\vec{b}^2-2k\vec{a}\cdot\vec{b})$即$8k\vec{a}\cdot\vec{b}=(3-k^2)\vec{a}^2+(3k^2-1)\vec{b}^2$

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{(3-k^2)\vec{a}^2+(3k^2-1)\vec{b}^2}{8k}$

又因为$\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ $\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$

所以$\vec{a}^2=1$,$\vec{b}^2=1$ 所以$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3-k^2+3k^2-1}{8k}=\frac{k^2+1}{4k}$

(2)因为$k>0$,所以$k^2+1\geqslant2k$ 即$\frac{k^2+1}{4k}\geqslant\frac{2k}{4k}=\frac{1}{2}$

所以$\vec{a}\cdot\vec{b}$的最小值为$\frac{1}{2}$.

又$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$($\theta$为$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角)

由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，知 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

所以 $\theta=60^\circ$，即此时 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 60°.

解法二：(1) 因为 $\vec{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\vec{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$

所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$

由条件 $k\vec{a}+\vec{b}=(k\cos\alpha+\cos\beta,k\sin\alpha+\sin\beta)$

$\vec{a}-k\vec{b}=(\cos\alpha-k\cos\beta,\sin\alpha-k\sin\beta)$

所以 $|k\vec{a}+\vec{b}|^2=(k\cos\alpha+\cos\beta)^2+(k\sin\alpha+\sin\beta)^2$

$=k^2+1+2k\cos(\alpha-\beta)$

$|\vec{a}-k\vec{b}|^2=(\cos\alpha-k\cos\beta)^2+(\sin\alpha-k\cdot\sin\beta)\backslash+2$

$=k^2+1-2k\cos(\alpha-\beta)$

又 $|k\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}|\vec{a}-k\vec{b}|$

所以 $k^2+1+2k\cos(\alpha-\beta)=3(k^2+1-2k\cos(\alpha-\beta))$

解得 $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{k^2+1}{4k}$　即 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{k^2+1}{4k}$.

(2) 同解法一

【点评】含有向量的式子左右两边平方，形式上与代数运算相同，注意：$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$.

再者，要注意：一般求模需将该向量平方再开方即：$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$，这是常用方法，要切实掌握.

【例8】在平面直角坐标系中，已知平行四边形 $ABCD$，O 为原点，且 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$. E 在 BA 上，且 $BE:EA=1:3$，F 在 BD 上，且 $BF:FD=1:4$，用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$、$\vec{d}$ 分别表示 $\overrightarrow{OE}$、$\overrightarrow{OF}$、$\overrightarrow{EF}$、$\overrightarrow{EC}$，并判断 E、F、C 是否共线.

【答案】　答案见精析

【精析】　由题中所给的比例条件可想到定比分点公式，这样可设出各点的坐标，也可由三角形法则直接进行，证明三点共线的工具是向量平行的充要条件.

解：设 $A(a_1,a_2)$、$B(b_1,b_2)$、$C(c_1,c_2)$、$D(d_1,d_2)$、$E(e_1,e_2)$、$F(f_1,f_2)$、$O(o_1,o_2)$，则

由定比分点公式得

$$e_1=\frac{b_1+\frac{1}{3}a_1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}a_1+\frac{3}{4}b_1\qquad e_2=\frac{b_2+\frac{1}{3}a_2}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}a_2+\frac{3}{4}b_2$$

所以 $\overrightarrow{OE}=(e_1,e_2)=(\frac{1}{4}a_1+\frac{3}{4}b_1,\frac{1}{4}a_2+\frac{3}{4}b_2)$

$$=\frac{1}{4}(a_1,a_2)+\frac{3}{4}(b_1,b_2)=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

同样可得：$\overrightarrow{OF}=\dfrac{4}{5}\vec{b}+\dfrac{1}{5}\vec{d}$.

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}=\frac{4}{5}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{20}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}$$

$\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}=\vec{c}-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$

因为 $ABCD$ 是平行四边形　　所以$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

所以$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}$　　即 $\vec{b}-\vec{a}=\vec{c}-\vec{d}$

所以 $\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}$

所以$\overrightarrow{EC}=\vec{b}+\vec{d}-\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}=-\frac{5}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}$

$$=5\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{20}\vec{b}+\frac{1}{5}\vec{d}\right)=5\overrightarrow{EF}$$

由向量共线的充要条件可知 E、F、C 三点共线.

另:如不设坐标,可证明如下:

因为 $BE:EA=1:3$,　由题设可知　$\overrightarrow{EA}=3\overrightarrow{BE}$

所以$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=3(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OB})$

$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+3\cdot\overrightarrow{OB})=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}.$

由$\overrightarrow{FD}=4\overrightarrow{BF}$　得:　$\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OF}=4(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB})$

即$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{5}(\overrightarrow{OD}+4\cdot\overrightarrow{OB})$

即$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{5}\vec{d}+\frac{4}{5}\vec{b}.$

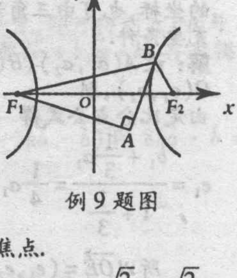
其它同上面解法.

【点评】上述两种解法实质一样,反反复复用一些向量表示另一些向量及用向量证明一些几何问题的主要目的,是要熟悉向量的基本语言,能用向量的基本知识解决一些实际问题(如,平面几何中的一些证明).通过本题要掌握定比分点公式的应用,并理解和掌握公式的实质.

【例9】F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点,点 A 的坐标是$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,点 B 在双曲线上,且$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{AB}=O$

(1)求点 B 的坐标;

(2)求证:$\angle F_1BA=\angle F_2BA$.



例 9 题图

【答案】 答案见精析

【精析】 证明角相等可用两个向量的数量积公式进行.

解:(1)因为 F_1,F_2 是双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左、右焦点.

所以 F_1,F_2 的坐标分别为$(-\sqrt{2},0)$,$(\sqrt{2},0)$如图所示,　$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

设 $B(x_0,y_0)$

则 $x_0^2-y_0^2=1$　①

$\overrightarrow{F_1A}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\overrightarrow{AB}=\left(x_0-\frac{\sqrt{2}}{2},y_0+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

因为$\overrightarrow{F_1A}\cdot\overrightarrow{AB}=0$　　所以$\frac{3\sqrt{2}}{2}(x_0-\frac{\sqrt{2}}{2})-\frac{\sqrt{2}}{2}(y_0+\frac{\sqrt{2}}{2})=0$

即 $3x_0-y_0=2\sqrt{2}$　②

由①②得：$x_0^2-(3x_0-2\sqrt{2})^2=1$

所以$(2\sqrt{2}x_0-3)^2=0$

所以 $x_0=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，所以 $y_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$

所以 $B(\frac{3\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{4})$.

(2)由(1)得　$\overrightarrow{BF_1}=(-\frac{7\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4})$

$\overrightarrow{BF_2}=(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4})$

$\overrightarrow{BA}=(-\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{3\sqrt{2}}{4})$

所以 $\cos\angle F_1BA=\frac{\overrightarrow{BF_1}\cdot\overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BF_1}|\cdot|\overrightarrow{BA}|}=\frac{\frac{7\times2}{4\times4}+\frac{3\times2}{4\times4}}{\frac{10}{4}\times\frac{\sqrt{20}}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

$\cos\angle F_2BA=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BF_2}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BF_2}|}=\frac{\frac{14}{16}+\frac{6}{16}}{\frac{\sqrt{20}}{4}\times\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

所以 $\cos\angle F_1BA=\cos\angle F_2BA$，结合图形知$\angle F_1BA=\angle F_2BA$.

【点评】解析几何题目中涉及到垂直、共线、角时常可用向量作为工具进行解答.

【例10】(1)将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+2$ 经过平移后，得到函数 $y=\sin2x$ 的图象，求平移向量$\vec{a}$.

(2)将函数 $y=x^2-2x-1$ 经过怎样的平移，才可以得到函数 $y=x^2$.

【答案】　(1)$\vec{a}=(\frac{\pi}{6},-2)$　(2)见精析

【精析】　解决这两个问题都可用待定系数法(即平移公式代入)进行解答，也可经整理或配方换元而求得.

解：(1)设$\vec{a}=(h,k)$　　所以平移公式为$\begin{cases}x'=x+h\\y'=y+k\end{cases}$

即$\begin{cases}x=x'-h\\y=y'-k\end{cases}$代入 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+2$ 得

$y'-k=\sin[2(x'-h)+\frac{\pi}{3}]+2$

即 $y'-k-2=\sin(2x'-2h+\frac{\pi}{3})$

与 $y=\sin 2x$ 比较有：

$$\begin{cases}k+2=0\\-2h+\frac{\pi}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}h=\frac{\pi}{6}\\k=-2\end{cases}$$

所以 $\vec{a}=(\frac{\pi}{6},-2)$

(2) $y=x^2-2x-1$ 配方得 $y+2=(x-1)^2$

令 $\begin{cases}x'=x-1\\y'=y+2\end{cases}$ 则 $y'=x'$ 此即为平移后的解析式 $y=x^2$.

所以平移向量 $\vec{a}=(-1,2)$

故函数 $y=x^2-2x-1$ 经过平移向量 $\vec{a}=(-1,2)$ 平移后才可以得到函数 $y=x^2$ 图象.

【点评】平移公式的用途是将复杂函数解析式简化，而图象不变，要会用平移公式，学会待定系数法、配方法、换元法.

四　考点专项训练

一、选择题

1. 下列命题中正确命题的个数是　（　）

①$|\overrightarrow{AB}|>|\overrightarrow{CD}|$，且$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$同向，则$\overrightarrow{AB}>\overrightarrow{CD}$.

②若 $\vec{a}//\vec{b}$，$\vec{b}//\vec{c}$，则 $\vec{a}//\vec{c}$.

③$\vec{a}-\vec{a}=0$.

④两个向量相等的充要条件是它们起点相同，终点相同.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

2. 下列命题正确的是　（　）

A. 若$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{CD}$且$|\overrightarrow{AB}|\neq|\overrightarrow{CD}|$，则 $ABCD$ 为梯形.

B. $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$存在唯一实数 λ，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

C. $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow$存在实数，使 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

D. 设 $\vec{a}=(x_1,y_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2)$，则 $\vec{a}//\vec{b}$ 的充要条件为 $x\backslash-1y_2-x_2y_1=0$.

3. 下列命题中正确命题的个数是　（　）

①已知 $\vec{a}\neq\vec{0}$，且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，则 $\vec{b}=\vec{0}$.

②已知 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，且 $\vec{b}\neq\vec{0}$，则 $\vec{a}=\vec{c}$.

③已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 是任意向量，则 $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$.

④$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|$.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

4. 已知向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$，$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$，则与 $2\vec{a}+\vec{b}$ 垂直的向量是　（　）

A. $2\vec{a}-\vec{b}$　　B. $\vec{a}-2\vec{b}$　　C. $2\vec{a}+\vec{b}$　　D. $\vec{a}+2\vec{b}$

5. 已知 $\vec{a}=(1,2)$，$\vec{b}=(x,1)$，当 $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$ 时，实数 x 的值是　（　）

A. 6　　B. -2　　C. $\frac{7}{2}$　　D. -2 或 $\frac{7}{2}$

6. 已知两点 $A(2,3)$，$B(-4,5)$，则与$\overrightarrow{AB}$共线的单位向量是　（　）

A. $\vec{e}=(-6,2)$

B. $\vec{e}=(-6,2)$ 或 $(6,2)$

C. $\vec{e}=(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10})$

D. $\vec{e}=(-\frac{3\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10})$或$(\frac{3\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10})$

7. 已知$\vec{m},\vec{n}$是夹角为60°的两个单位向量,则$\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$和$\vec{b}=-3\vec{m}+2\vec{n}$的夹角是 ( )

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

8. 已知$\vec{a}=(-2,3)$,$\vec{b}=(3,2)$,则$m=\vec{a}\cdot\vec{b}$,$n=(\vec{a}^2-\vec{b}^2)$,$t=(\vec{a}+\vec{b})^2$,$p=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$,$q=\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$的大小关系是 ( )

A. $t>p>q>n>m$ B. $t>p=q>m=n$

C. $q=p>t>n>m$ D. $t>p>q>m>n$

9. 已知点$A(-1,2)$和$B(6,1)$按向量$\vec{a}$平移后的坐标分别为$(-3,m)$和$(n,4)$,则$\vec{a}=$ ( )

A. $(-2,3)$ B. $(2,-3)$ C. $(-3,2)$ D. $(3,-2)$

10. 已知$\vec{a}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$,$\vec{b}=(1,\sqrt{3})$,则以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积为 ( )

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

11. 在直角三角形ABC中,$\angle A=90°$,$AB=1$,则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$的值是 ( )

A. 1 B. -1 C. 1或-1 D. 不确定

12. 若动点P,Q是椭圆$9x^2+16y^2=144$上的两点,O是其中心,若$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,则中心$O$到弦$PQ$的距离$OH$必为 ( )

A. $\frac{20}{3}$ B. $\frac{15}{4}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{4}{15}$

13. 已知向量$\overrightarrow{AB}=(1,2)$,$\overrightarrow{OB}=(0,1)$,则下列各点中在直线$AB$上的是 ( )

A. $(0,3)$ B. $(1,1)$ C. $(2,4)$ D. $(2,5)$

14. 设$\vec{a}=(\frac{3}{2},\sin\alpha)$,$\vec{b}=(\cos\alpha,\frac{1}{3})$,且$\vec{a}/\!/\vec{b}$,则锐角$\alpha$的度数是 ( )

A. 30° B. 60° C. 45° D. 75°

15. 已知点P分有向线段$\overrightarrow{P_1P_2}$的比是-3,则点P_1分$\overrightarrow{P_2P_1}$所成的比是 ( )

A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{4}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{1}{2}$

16. 为了得到$y=f(-2x)$的图象,可以把函数$y=f(1-2x)$的图象按向量$\vec{a}$进行平移,则$\vec{a}$等于 ( )

A. $(1,0)$ B. $(-1,0)$ C. $(\frac{1}{2},0)$ D. $(-\frac{1}{2},0)$

二、填空题

17. $\vec{a}=\vec{b}$是$\vec{a}/\!/\vec{b}$的________条件;$\vec{a}/\!/\vec{b}$是$\vec{a}=\vec{b}$的________条件(填充分不必要、充要、必要不充分).

18. 已知$\vec{e_1},\vec{e_2}$是一对不共线的非零向量,已知$\vec{a}=\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2}$,$\vec{b}=-2\lambda\vec{e_1}-\vec{e_2}$,若$\vec{a}/\!/\vec{b}$,则$\lambda$________.

19. 若$\vec{a}=(2,-3)$,$\vec{b}=(1,2)$,$\vec{p}=(9,4)$,且$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$,则$m=$________,$n=$________.

20. 已知向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的夹角为120°,且$|\vec{a}|=2$,$|\vec{b}|=5$,则$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{a}=$

高中数学考点透视与专项训练

__________.

21. 已知$|\vec{a}|=3\sqrt{10}$，$\vec{b}=(-1,3)$，若$\vec{a}/\!/\vec{b}$，则$\vec{a}=$__________.
22. 已知三点：$P(0,2)$，$Q(1,3)$，$R(2,4)$，A为平面上任意一点，则$\overrightarrow{AR}=$__________$\overrightarrow{AP}+$__________$\overrightarrow{AQ}$.
23. 已知$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$为两两不共线向量，且$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{c}$共线，$\vec{b}+\vec{c}$与$\vec{a}$共线，则$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=$__________.
24. 已知$\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}=\vec{e_1}\cdot\vec{x}\neq0$，且$\vec{e_1}\perp(\lambda\vec{e_2}-\vec{x})$，则$\lambda=$__________.
25. 如果直线l按向量$\vec{a}=(-3,1)$平移后位置不变，那么l的倾斜角等于__________.
26. 设$\triangle ABC$中，$A(4,5)$，$B(-2,-1)$，$C(7,2)$，且M、N分$\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{AC}$所成的比为$1:2$，则$S_{\triangle AMN}:S_{\triangle ABC}=$__________.
27. 某学生购买了x支A型笔，y支B型笔，A型笔的价格为m元，B型笔的价格为n元，若购买A、B型的数量分别为x，y，并称(x,y)为数量向量，(m,n)称为价格向量，则数量向量与价格向量的数量积的意义是__________.

三、解答题

28. 已知$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$不共线，$\vec{a}=\vec{e_1}-\vec{e_2}$，$\vec{b}=-\frac{1}{2}\vec{e_1}+\frac{1}{2}\vec{e_2}$，试判断$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}-2\vec{b}$是否共线？
29. 设A、B为不同的两个点，O为任一点. 试证：点P在直线AB上的充要条件是存在实数t，使得$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}(-\infty<t<+\infty)$.
特别地，点P在线段AB上的充要条件是存在实数t，使得$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\,\overrightarrow{OB}(o\leqslant t\leqslant1)$.
30. 判断下列各题中$\triangle ABC$的形状：
(1)已知O为$\triangle ABC$所在平面内一点，且$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}-2\,\overrightarrow{OA}$与$\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$垂直.
(2)已知P为$\triangle ABC$所在平面上的一点，且$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{PA}|=|\overrightarrow{PB}|=|\overrightarrow{PC}|$.
31. 已知$\triangle ABC$中，$B(-4,0)$，$C(5,-3)$，D点分AB的比为$1:3$，E在BC上，且使$\triangle BDE$的面积是$\triangle ABC$面积的一半. 求E点坐标.
32. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足关系式$\sqrt{7}|\vec{a}-\lambda\vec{b}|=|\lambda\vec{a}+\vec{b}|(\lambda>0)$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$.
(1)求$\vec{a}\cdot\vec{b}$(用λ表示)
(2)求$\vec{a}$与$\vec{b}$所成夹锐角的最大值，并求、此时的λ值.
33. 设两向量$\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$满足$|\vec{e_1}|=2$，$|\vec{e_2}|=1$，$\vec{e_1}$、$\vec{e_2}$的夹角为$60°$，若向量$2t\vec{e_1}+7\vec{e_2}$与向量$\vec{e_1}+t\vec{e_2}$的夹角为钝角，求实数t的取值范围.
34. 已知向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为$\frac{2}{3}\pi$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，记$\vec{m}=3\vec{a}-2\vec{b}$，$\vec{n}=2\vec{a}+k\vec{b}$.
(1)若$\vec{m}$与$\vec{n}$互相垂直，求实数k的值.
(2)是否存在实数k，使$\vec{m}$与$\vec{n}$互相平行？
35. (1)将函数$y=f(x)$的图象按$\vec{a}=(-2,1)$平移后，得到$y=2x^2+8x+1$的图象. 求$f(x)$的解析式.
(2)将$y=\cos(3x-\frac{\pi}{4})+3$的图象按$\vec{a}$平移后得到$y=\cos3x$的图像，求平移向量$\vec{a}$.

36. 已知两点 $M(-1,0)$，$N(1,0)$，且点 P 使 $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN}$、$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$、$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{NP}$ 成公差小于零的等差数列.
(1)点 P 的轨迹是什么曲线?
(2)若点 P 坐标为 (x_0,y_0)，已知 θ 为 $\overrightarrow{PM}$ 与 $\overrightarrow{PN}$ 的夹角，求 $\tan\theta$.

37. 设向量 $\vec{a}=(\cos23°,\cos67°)$，$\vec{b}=(\cos68°,\cos22°)$，$\vec{\mu}=\vec{a}+t\vec{b}(t\in R)$.
(1)求 $\vec{a}\cdot\vec{b}$.
(2)求 $\vec{\mu}$ 的模的最小值.

38. 已知点 $F(1,0)$，直线 l: $x=2$，设动点 P 到直线 l 的距离为 d，已知 $|PF|=\frac{\sqrt{2}}{2}d$，且 $\frac{2}{3}\leqslant d\leqslant\frac{3}{2}$.
①求动点 P 的轨迹方程.
②若 $\overrightarrow{PF}\cdot\overrightarrow{OF}=\frac{1}{3}$，求向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OF}$ 的夹角.

39. 已知，长度为 2 的线段的两端点 A、B 分别在互相垂直的两条直线 l_1、l_2 上滑动，点 M 满足 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{MB}(\lambda>0,\lambda$ 为常数)，求点 M 的轨迹方程，并指出轨迹的曲线类型.

40. 已知 $\overrightarrow{OA}=(2,1)$，$\overrightarrow{OB}=(1,7)$，$\overrightarrow{OC}=(5,1)$，若 $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}$，$y=\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}(x、y\in R)$.
(1)求 $y=f(x)$ 的解析式.
(2)若点 $P(x,y)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上运动，求 $\frac{y}{x}$ 在 $1\leqslant x\leqslant2$ 条件下的最小值.
(3)把 $y=f(x)$ 的图象按向量 $\vec{a}=(-2,8)$ 平移得到曲线 C_1，过坐标原点 O 作 OM、ON 分别交 C_1 于 M、N 两点，直线 MN 交 y 轴于点 $Q(0,y_0)$，当 $\angle MON$ 为锐角时，求 y_0 的取值范围.

第二节 解斜三角形

知识点强化速记

一、选择题

1. 在直角三角形中两锐角为 A 和 B，则 $\sin A\sin B$ ( )
A. 有最大值 $\frac{1}{2}$ 和最小值 0　B. 有最大值 $\frac{1}{2}$ 但无最小值
C. 即无最大值也无最小值　D. 有最大值 1 但无最小值

2. 若 $a\cos A=b\cos B$，则 $\triangle ABC$ 一定是 ( )
A. 等腰三角形　B. 直角三角形
C. 等腰直角三角形　D. 等腰三角形或直角三角形

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$A>B$，下列四个不等式中不正确的是 ( )
A. $\sin A>\sin B$　B. $\cos A<\cos B$　C. $\sin2A>\sin2B$　D. $\cos2A<\cos2B$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，若 $(a-c)(a+c)=b(b+c)$，则 A 等于 ( )
A. 30°　B. 60°　C. 120°　D. 150°

5. 在$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$中,若$\cos\dfrac{B-C}{2}<\cos\dfrac{B'-C'}{2}$,则 ( )

A. $B-C>B'-C'$　　B. $|B-C|>|B'-C'|$
C. $B-C<B'-C'$　　D. $|B-C|<|B'-C'|$

6. 在$\triangle ABC$中,下列三角式:①$\sin(A+B)+\sin C$;②$\cos(B+C)+\cos A$;③$\tan\dfrac{A+B}{2}\tan\dfrac{C}{2}$;④$\cos\dfrac{B+C}{2}\sec\dfrac{A}{2}$值为常数的是 ( )

A. ①②　　B. ②③　　C. ①④　　D. ②④

7. 在$\triangle ABC$中,$C=90°$,则$\sin(A-B)+\cos 2A=$________.

8. 在$\triangle ABC$中,已知$a=10$,$A=30°$,$B=120°$,则$S_\triangle=$________.

9. 设A是$\triangle ABC$中的最小角,且$\cos A=\dfrac{a-1}{a+1}$,则a的取值范围是________.

10. 已知等腰三角形中顶角的正弦为$\dfrac{24}{25}$,则底角的余弦是________.

高考命题分析与预测

从近几年高考来看,试题对正、余弦定理的直接考查基本上是间隔出现;与解三角形有关的试题每年都有,因为本章有较多重要公式,历来是高考命题热点;解斜三角形是三角知识直接应用的重要途径,近几年成为高考题的重要素材,因此对正、余弦定理的要求不可放松. 高考中有关三角形的试题大多属于容易题,最高到中等题,以考查有关定理的应用、三角恒等变换的能力,运算能力及转化的数学思想,解三角形常常作为解题工具用于立体几何和解析几何的计算和证明.

典题精析、考点透视

【例1】(1993 年全国)在半径为 30m 的圆形广场中央上空,设置一个照明光源,射向地面的光呈圆锥形,且其轴截面顶角为 120°,若要光源恰好照亮整个广场,则其高度应为________m(精确到 0.1m).

【答案】 17.3m

【精析】 设高为h,如图所示是由高与广场半径直角边的直角三角形,于是$h=30\cot 60°=10\sqrt{3}=17.3$m.

【点评】本题以几何为背景,主要考查三角函数的概念和直角三角形中的边角关系.

【例2】(2000 年上海)在三角形ABC中,$\sqrt{2}\sin A=\sqrt{3\cos A}$,则$\angle A=$________.

【答案】 $A=60°$

【精析】 $2\sin^2 A=3\cos A$, $2(1-\cos^2 A)=3\cos A(2\cos A-1)(\cos A+2)=0$,所以$\cos A=\dfrac{1}{2}$,$A=60°$.

【例3】(1995 年全国)在直角三角形中两锐角为A和B,则$\sin A\sin B$

A. 有最大值$\frac{1}{2}$和最小值 0　　　　B. 有最大值$\frac{1}{2}$但无最小值

C. 既无最大值也无最小值　　　　D. 有最大值 1 但无最小值

【答案】 B

【精析】 因为 $A+B=\frac{\pi}{2}$, $\sin A\sin B=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]=\frac{1}{2}\cos(A-B)$，又 $-\frac{\pi}{2}<A-B<\frac{\pi}{2}$，而 $0<\cos(A-B)<1$，故 $\sin A\sin B$ 有最大值无最小值.

【点评】该题考查了积化和差公式及弦函数在固定区间上的最值问题.

【例4】(1998 年全国) 一个直角三角形三内角的正弦值成等比数列，其最小内角为

A. $\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　B. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$　C. $\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2}$　D. $\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【答案】 B

【精析】 设 $\sin a$, $\cos a$, 1 成等比例，则 $1-\sin^2 a=\sin a$，解得 $\sin a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $\sin a=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍）所以 $a=\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故应选 B.

【点评】本题综合考查了直角三角形的性质、等比数列、三角变换、反三角方程等知识，构造方程求解为常规解法.

【例5】(2000 年北京、安徽) 设 α,β 是一个钝角三角形的两个锐角，下列四个不等式中不正确的是

A. $\tan\alpha\tan\beta<1$　　　　B. $\sin\alpha+\sin\beta<\sqrt{2}$

C. $\cos\alpha+\cos\beta>1$　　　　D. $\frac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)<\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

【答案】 D

【精析】 1：取特殊情况，若 $\alpha=\beta$，则 $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$, $0<\tan<1$, $0<1-\tan^2\alpha<1$.

因为$\frac{1}{2}\tan(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}\tan2\alpha=\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}>\tan\alpha=\tan\frac{\alpha+\beta}{2}$

解法二因为 $\alpha+\beta<\frac{\pi}{2}$，所以 $\alpha<\frac{\pi}{2}-\beta$

$\tan\alpha$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上是增函数，所以 $\tan\alpha<\tan(\frac{\pi}{2}-\beta)=\cot\beta$

所以 $\tan\alpha\tan\beta<\tan\beta\cot\beta=1$，所以 A 正确.

其他同方法一.

【例6】(1998 年全国) 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是角 A,B,C 的对边，设 $a+c=2b$, $A-C=\frac{\pi}{3}$，求 $\sin B$ 的值.

【答案】 $\frac{\sqrt{39}}{8}$

高中数学考点透视与专项训练