

# 無限小

一個危險的數學理論如何形塑現代世界

現代世紀的靈魂取決於無限小

無限小的戰爭是一場你死我活的生存之戰，  
無限小的勝利帶來了現代文明的進步

無限小理論是微積分與許多現代數學以及科技的基礎，

它究竟如何影響十六、十七世紀的文明發展？

從歐洲宗教戰爭到英國內戰，從耶穌會到英國皇家學會，

從伽利略到牛頓，無限小是無數神學家、數學家、

哲學家熱辣辣戰爭的主角，它也是歐洲科學進步、

思想自由以及更寬容社會的關鍵，

義大利與英國成為現代國家的分野。

## Infinitesimal

How a Dangerous  
Mathematic  
Theory Shaped the Modern World  
by Amir Alexander

長庚大學電子工程學系助理教授與數學作家 賴以威

導讀

歷史評論家 公孫策

台中市立中港高中數學科教師 彭甫堅（數學咖啡館館長）

愛讀推薦

山大 著

麥慧芬 譯

# 無限小

一個危險的數學理論如何形塑現代世界

## Infinitesimal

How a Dangerous  
Mathematic  
Theory Shaped the Modern World  
by Amir Alexander

艾米爾·亞歷山大 著 麥慧芬 譯

無限小：一個危險的數學理論如何形塑現代世界 / 艾米爾·亞歷山大 (Amir Alexander) 著；麥慧芬譯。-- 初版。-- 臺北市：商周出版：家庭傳媒城邦分公司發行，2015.10  
面：公分。-- (莫若以明書房；6)  
譯自：Infinitesimal : how a dangerous mathematical theory shaped the modern world  
ISBN 978-986-272-909-0(平裝)

I. 幾何

316

104020454

莫若以明書房 06

## 無限小：一個危險的數學理論如何形塑現代世界

作者 / 艾米爾·亞歷山大 Amir Alexander  
譯者 / 麥慧芬  
企劃選書 / 黃靖卉  
責任編輯 / 黃靖卉  
編輯協力 / 蕭秀嫻

版權 / 林心紅、翁靜如、吳亭儀  
行銷業務 / 黃崇華  
總編輯 / 黃靖卉  
總經理 / 彭之琬  
發行人 / 何飛鵬  
法律顧問 / 台英國際商務法律事務所 羅明通律師  
出版 / 商周出版

台北市104民生東路二段141號9樓  
電話：(02) 25007008 傳真：(02) 25007759

E-mail: bwp.service@cite.com.tw

Blog: <http://bwp25007008.pixnet.net/blog>

發行 / 英屬蓋曼群島商家庭傳媒股份有限公司 城邦分公司  
台北市中山區民生東路二段141號2樓  
書虫客服服務專線：02-25007718；25007719  
服務時間：週一至週五上午09:30-12:00；下午13:30-17:00  
24小時傳真專線：02-25001990；25001991  
劃撥帳號：19863813；戶名：書虫股份有限公司  
讀者服務信箱：service@readingclub.com.tw  
城邦讀書花園：www.cite.com.tw

香港發行所 / 城邦（香港）出版集團有限公司  
香港灣仔駱克道193號東超商業中心1樓；E-mail: hkcite@biznetvigator.com  
電話：(852) 25086231 傳真：(852) 25789337

馬新發行所 / 城邦（馬新）出版集團 Cite (M) Sdn. Bhd.  
41, Jalan Radin Anum, Bandar Baru Sri Petaling,  
57000 Kuala Lumpur, Malaysia.  
Tel: (603) 90578822 Fax: (603) 90576622 Email: cite@cite.com.my

封面設計 / 徐璽設計工作室  
排版 / 極翔企業有限公司  
印刷 / 中原造像股份有限公司

■ 2015年10月29日初版一刷  
定價350元

Printed in Taiwan

Infinitesimal: How a Dangerous Mathematical Theory Shaped the Modern World  
by Amir Alexander

Copyright © 2014 by Amir Alexander

Published by arrangement with Scientific American, an imprint of Farrar, Straus and Giroux LLC, New York  
through Bardon-Chinese Media Agency

Complex Chinese translation copyright © 2015 by Business Weekly Publications, a division of Cité Publishing Ltd.  
ALL RIGHTS RESERVED

城邦讀書花園

[www.cite.com.tw](http://www.cite.com.tw)

版權所有，翻印必究 ISBN 978-986-272-909-0

〈導讀〉 無限的矛盾，無限的力量 賴以威 7

〈專文推薦〉 新想法的成功之道——有智慧、有策略地說服舊秩序  
公孫策 11

## 前言 出國的大臣 15

法國大臣索必耶拜訪英國，也受到倫敦皇家學會的熱情招待，但是索必耶卻盛讚皇家學會的敵人霍布斯，並害得自己遭路易十四驅出宮廷。幕後隱情其實與當時的數學理論戰爭頗有關連。

## 第一部 對抗失序的戰爭：耶穌會與無限小的對立

### 第一章 聖羅耀拉的弟子 28

耶穌會創建在一個天主教開始沒落的時代，羅耀拉的依納爵和他的弟子們展開一連串復興天主教的行動，但其中最耀眼的成就，卻是在各地區建立的教育學院。

### 第二章 數學秩序 63

耶穌會的教育體系中，原本並不特別注重數學，但在克拉維烏斯神父持續努力下，終於成為耶穌會的教育重心。耶穌會重視數學，因為數學是一種以邏輯步驟說出真理、無人能否定其證明結果的學科，但這時的數學，仍以歐幾里得數學理論為主。

### 第三章 數學失序 92

虔誠的天主教徒伽利略，也是當時最偉大的科學家。他為了自己的學說，槓上了耶穌會和教廷，最終被送進宗教審判所，人生最後十幾年都在軟禁中度過。伽利略的弟子卡瓦列里與托里切利持續提出不可分量和無限小的理論證明，更持續增強耶穌會想要壓制這個矛盾理論的決心，無限小的戰爭即將引爆。

### 第四章 你死或我亡：「無限小」的戰爭 131

耶穌會總校訂決議整個耶穌會體系都不得教授與討論無限小。耶穌會和支持伽利略的銳眼學會之間，為了維持歐幾里得幾何學理論或迎接新的無限小方式而開戰。

## 第五章 數學家的戰役 165

支持歐幾里得幾何學論點的耶穌會數學家古爾丁、貝蒂尼與塔凱，與支持無限小與不可分量學說的耶穌教團卡瓦列里、托里切利和安潔里，雙方舌戰和筆戰不休。表面上是數學論戰，實際上耶穌會數學家還為了護衛神學上的論點。

## 第二部 《巨靈論》與無限小

### 第六章 《巨靈論》的出現 200

英國內戰和空位期當時的民不聊生與內部動亂，令卡文迪許家族的家臣霍布斯，寫下政治哲學傑作《巨靈論》。

### 第七章 幾何學家湯瑪斯·霍布斯 229

幾何學中，每一個結果都是建立在另一個較簡單的結果之上，因此可以一步步符合邏輯地向前推進，從不證自明的真理，朝著愈來愈複雜的真理邁進。霍布斯因此認為數學應該沒有解不開的難題。

### 第八章 約翰·瓦里斯是何方神聖？ 249

在數學家瓦里斯的眼中，數學毫無貴族氣息，徹頭徹尾就是一個得到有用結果的實用工具。也因此，他和「隱形大學」（後來成為「皇家學會」）的夥伴使用數學的方式與霍布斯大相逕庭。

### 第九章 新世界的數學 277

歸納法和實驗數學，讓皇家學會的會員逐漸將這種開放討論與有彈性的態度應用到學術與政治立場上，於是英國邁上君主立憲之途，各種科學研究和科技也不斷開花結果，使得英國成為歐洲最先現代化的國家。

### 後記 兩個現代 309

隨著無限小戰爭的開打，義大利的尖端數學停滯不前，英國的數學卻快速成為主導歐洲的國家傳統之一，僅有法國可與之匹敵。

### 人物表 315

### 大事記 323

### 致謝辭 328

# 無限小

一個危險的數學理論如何形塑現代世界

現代世紀的靈魂取決於無限小

無限小的戰爭是一場你死我活的生存之戰，  
無限小的勝利帶來了現代文明的進步

無限小理論是微積分與許多現代數學以及科技的基礎，

它究竟如何影響十六、十七世紀的文明發展？

從歐洲宗教戰爭到英國內戰，從耶穌會到英國皇家學會，

從伽利略到牛頓，無限小是無數神學家、數學家、

哲學家熱辣辣戰爭的主角，它也是歐洲科學進步、

思想自由以及更寬容社會的關鍵，

義大利與英國成為現代國家的分野。

## Infinitesimal

How a Dangerous  
Mathematic  
Theory Shaped the Modern World  
by Amir Alexander

長庚大學電子工程學系助理教授與數學作家 賴以威

導讀

歷史評論家 公孫策

台中市立中港高中數學科教師 彭甫堅 (數學咖啡館館長)

愛讀推薦

山大 著

麥慧芬 譯



1632年8月10日，五位穿著飄拂黑袍的人，受召在一棟堂皇卻陰沉的羅馬建築物中，裁定一個令人誤以為簡單的理論：一條連續的線是由獨立但無限的微小部分組成。耶穌會的神父總校訂們大筆一揮，禁止了無限小的概念，宣布永遠不能教授這個理論，甚至連提都不准提。耶穌會認為這個概念危險又具顛覆性，他們害怕整個世界若接受了這個概念，將墮入混沌。

獲獎歷史學家艾米爾·亞歷山大在《無限小》中揭發了耶穌會這個裁決背後的深層原因，並敘述研究無限小的數學家如何前仆後繼，終於讓它成為微積分與許多現代數學以及科技的基礎。因為並非所有人都贊同耶穌會的看法，在歐洲有許多哲學家、科學家與數學家都接受無限小的概念，並將之視為科學進步、思想自由以及更寬容社會的關鍵。

這個故事把我們從歐洲宗教戰爭與英國內戰的血腥戰場，帶到當時最偉大的數學家與哲學家的生活中，包括伽利略、托里切利、牛頓、貝拉明樞機主教、湯瑪斯·霍布斯、克里斯多佛·克拉維烏斯與約翰·瓦里斯。在義大利，無限小的挫敗預告了這個國家主導歐洲文化的朝代已經結束，而在英國，無限小的勝利則幫助了這個島國走向了世界第一個現代國家之路。

「無限小」這個數學觀念，差一點就被威權扼殺了。而你無法想像，如果沒有「無限小」這個觀念，人類文明會停滯在哪個階段！所以，這本書講的是歷史，而不是數學。……好好讀一下這本書，大有益。

歷史評論家

公孫策

這本書其實就很像托里切利的21道拋物線面積證明，名為介紹拋物線，實則宣揚無限小概念；名為介紹數學概念，實則介紹了整個中世紀錯綜複雜的學術、宗教、信念之爭。……如果說我們覺得課本裡的數學無趣，那很可能不是知識本身的問題，而是我們學習的方法，將前人所有的努力濃縮成一行結果、一條式子，讓知識失去了靈魂，只剩下冰冷的軀殼。

這本書重新替無限符號「 $\infty$ 」注入了靈魂。

長庚大學電子工程學系助理教授與數學作家

賴以威





---

· 書系緣起 ·

---

早在二千多年前，中國的道家大師莊子已看穿知識的奧秘。  
莊子在《齊物論》中道出態度的大道理：莫若以明。

莫若以明是對知識的態度，而小小的態度往往成就天淵之別  
的結果。

「樞始得其環中，以應無窮。是亦一無窮，非亦一無窮也。  
故曰：莫若以明。」

是誰或是什麼誤導我們中國人的教育傳統成為閉塞一族？答  
案已不重要，現在，大家只需著眼未來。

共勉之。





# 無限小

一個危險的數學理論如何形塑現代世界

## Infinitesimal

How a Dangerous  
Mathematic  
Theory Shaped the Modern World  
by Amir Alexander

艾米爾·亞歷山大 著 麥慧芬 譯

僅以此書獻給  
裘登與愛拉

〈導讀〉

# 無限的矛盾，無限的力量

長庚大學電子工程學系助理教授與數學作家 賴以威

「我把這扇門掩上一半，再掩剩下的一半，不斷重複下去，這扇門也永遠不會被關上。」

國中時，老師站在教室前門旁解釋無限的概念。

對現在的我來說這不難回答——

「不對，造成永遠的錯覺是『會重複無限次的掩門』，但到後來每次掩門的幅度都是無限小，門最終還是會被關上。」

但我永遠記得當時對老師的這項譬喻有多麼困擾，順著老師的邏輯，彷彿可以看到門就算被關上了，依然存在一道微微的縫隙。在那之前的數學課儘管複雜，可是只要遵循規則，按部就班就能理解。直到無限的出現，是第一次我覺得數學課裡也有「無法理解，只好先記起來」的觀念。

現在，儘管能破解無限的矛盾，能解釋阿基里斯為什麼能追上烏龜，能知道一尺之棰，日取其半，必然有取完的那天。但那樣的理解就好像回答「為什麼天空是藍色的？」、「因為空氣折射的緣故。」

只是拿了一個名詞、一套道理來解釋，並沒有真正理解背後的原因。甚至可以說，是因為相處久了，在課本、考卷裡面出現夠多次，就習以為常，覺得無限的概念是理所當然了。

不是的，無限小一點都不理所當然，他是個在歷經了上百年激辯後，才正式被引入的數學概念，背後還牽扯了超出數學之外的宗教、政治糾葛。

※

本書從馬丁・路德的宗教改革開始，當時羅馬教廷勢力衰退，作為教廷忠誠部屬的耶穌會趁勢興起。以菁英分子組成的耶穌會在各地辦學，他們推崇階級與秩序。在克里斯多佛・克拉維烏斯（Christopher Clavius）的努力下，服膺於邏輯性的數學地位逐漸提高，作為耶穌會宣揚紀律性的強而有力工具。握有數學知識，他們便能宣稱握有真理。

數學也沒辜負他們的期待。

曆法過時一直是古人面臨的問題，西元 500 年左右，中國有祖沖之與祖恆父子兩代努力，推行大明曆；西元 1700 年左右，日本有澀川春海改良中國曆法，製成大和曆。曆法的制定需要豐富的天文、量測以及不可或缺的數學知識。不論是祖氏父子或是澀川春海都是一時的數學名家。在西方，則由耶穌會的克里斯多佛・克拉維烏斯領銜，協助教廷制定了全新的格里高里曆法。這套曆法相當精確，逼得歐洲各地儘管已經因為宗教改革而與教廷漸行漸遠，甚至反對教廷，但還是得乖乖接受格里高里曆法，變相承認了頒布曆法的教宗權威性。

**數學可以強行讓人接受真理，並擊潰謬誤，建立起取代混亂與困惑的穩固秩序與確定性。**

耶穌會以數學做武器，在宗教改革上打了一場漂亮勝仗，從此也更重視數學。正確地說，他們認為數學是個最好的例子，代表一切都該從定理出發，現實生活中的每件事都必須遵循一定的規則。數學提供了一個完美的理性模型，讓人們看清宇宙真理是如何統治世界。

然而，當時的數學世界裡尚未存在能夠解釋無窮小的定理，但數學家們已經從愈來愈多的地方發現這個無可迴避的概念。於是，數學家想從現實生活的觀察，反過來歸納出一個新的定理。推崇數學的耶穌會卻毫不猶豫地站到了打壓新知的那側。

從不同教派的宗教之爭，在一方執起數學獲得勝利後，手中的數學卻反噬主人，展開了另一場數學之爭。

※

許多耳熟能詳的科學家、數學家都參加了這場數學之爭，被尊

為現代科學之父的伽利略（Galileo Galilei）帶領他的兩位徒弟卡瓦列里（Bonaventura Cavalieri）與托里切利（Evangelista Torricelli），前仆後繼地提出對無限小、不可分量的詮釋。課本裡的托里切利是以發明了氣壓計而聞名，在這本書裡我們看到了他另一個偉大的貢獻，他發表了一篇「拋物線面積（De dimensione parabola）」，裡面極其華麗地用上了 21 種不同方式去證明拋物線與一條直線相夾的面積，其中有 10 種用上了不可分量的概念。

這篇論文的重點根本不在拋物線面積，而是在介紹不可分量、無限小。

儘管數學家看到了無限小的廣泛用途（有一半以上的證明需要靠引入無限小的概念才能完成），但耶穌會堅決反對。他們設立了「總校訂（Revisors General）」這個最高地位的學術審查機構，扮演著類似那個時代的「金盾」腳色，把所有對教會帶來混亂與不安的知識排除在耶穌會主導的教育機構之外，無限小是數學界的新概念，他甚至推翻了一些傳統幾何的想法；從這個角度來看，他就像數學界的宗教改革，耶穌會無論如何都要將他的聲浪壓下來。

這次對決中，耶穌會佔了上風，哪怕面對的是伽利略與銳眼協會（L'Accademia Nazionale dei Lincei，現今的義大利國家科學院），那個時代最強的宗教團體成功地馴服了數學，讓數學依然作為宗教秩序而存在。

然而，如果把格局拉大，這場數學的戰爭還沒結束，只是換了一個戰場，到英國重新開始。在差不多的時間，英國也上演了一場關於無限小的學術論戰，場上的選手更是赫赫有名。站在否定無限小那方的是政治哲學家名著《巨靈論》的作者霍布斯（Thomas Hobbes）。身為那個時代最有名的哲學家之一，他在過世前的自傳裡認為自己最偉大的成就竟然是解開了一題經典數學難題——化圓為方，畫出一個和圓一樣面積大小的正方形。

可惜的是，他解錯了。

連同這條錯誤的解答，他否定無限小的立場遭受到英國皇家學會（Royal Society）創辦人之一，約翰·瓦里斯（John Wallis）的猛烈抨

擊。當時英國學術界在培根的倡行下，實驗是驗證、發現科學知識的重要途徑。也因為這種想法，從現實狀況觀察到的無限小概念，自然能較被接受，並且透過歸納法，成為了數學領域新的一分子。在瓦里斯發明了「 $\infty$ 」的無限符號後，這個符號被他的晚輩牛頓（Isaac Newton）開花結果，建立出了微積分，成為現代許多科學、科技的基礎。

當然，在微積分的身上同樣少不了戰爭，屬於牛頓跟萊布尼茲（Gottfried Wilhelm Leibniz）的發明人之爭，不過那又是另一件故事了。

※

我想，這本書其實就很像托里切利的 21 道拋物線面積證明，名為介紹拋物線，實則宣揚無限小概念；名為介紹數學概念，實則介紹了整個中世紀錯綜複雜的學術、宗教、信念之爭。我們現今認為很多理所當然的觀念，其實背後往往都有一長串故事，一群遠比我們聰明的人在努力。我有時候會想，如果說我們覺得課本裡的數學無趣，那很可能不是知識本身的問題，而是我們學習的方法，將前人所有的努力濃縮成一行結果、一條式子，讓知識失去了靈魂，只剩下冰冷的軀殼。

這本書重新替無限符號「 $\infty$ 」注入了靈魂。



〈專文推薦〉

## 新想法的成功之道——有智慧、有策略地說服舊秩序

歷史評論家／公孫策

萬物皆由無限小的成分（粒子）構成，這是現代人的常識，不會有人覺得奇怪，更不會有人認為難以接受。

可是，「無限小」這個數學觀念，差一點就被威權扼殺了。而你無法想像，如果沒有「無限小」這個觀念，人類文明會停滯在哪個階段！

所以，這本書講的是歷史，而不是數學。說得更明確一些，這本書告訴我們，科學家不能永遠屈服於威權之下，可是他們除了勇於堅持、勇於抗拒威權之外，仍必須有智慧、有技術（甚至謀略）的進行說服——殺身成仁絕非最高境界。

為此，書中必須述說很多數學。雖然它令多數人望而卻步，不喜歡數學的讀者卻無須硬「吞」下去，可以選擇跳過去。然而，一定要明白的是，科學家必須讓自己的學說經得起千錘百鍊，否則不足以承受威權方面的打擊。因為，威權那一邊也有科學家，而且都是當時最負盛名的科學家。

處在今天這個「新科技正在顛覆舊社會」的時代，新想法肯定受到舊秩序的打壓。然而，切不可孤芳自賞的嚷嚷「他們都不了解」，而應該提出更多證據來進行說服。

好好讀一下這本書，大有益。

〈導讀〉 無限的矛盾，無限的力量 賴以威 7

〈專文推薦〉 新想法的成功之道——有智慧、有策略地說服舊秩序  
公孫策 11

## 前言 出國的大臣 15

法國大臣索必耶拜訪英國，也受到倫敦皇家學會的熱情招待，但是索必耶卻盛讚皇家學會的敵人霍布斯，並害得自己遭路易十四驅出宮廷。幕後隱情其實與當時的數學理論戰爭頗有關連。

## 第一部 對抗失序的戰爭：耶穌會與無限小的對立

### 第一章 聖羅耀拉的弟子 28

耶穌會創建在一個天主教開始沒落的時代，羅耀拉的依納爵和他的弟子們展開一連串復興天主教的行動，但其中最耀眼的成就，卻是在各地區建立的教育學院。

### 第二章 數學秩序 63

耶穌會的教育體系中，原本並不特別注重數學，但在克拉維烏斯神父持續努力下，終於成為耶穌會的教育重心。耶穌會重視數學，因為數學是一種以邏輯步驟說出真理、無人能否定其證明結果的學科，但這時的數學，仍以歐幾里得數學理論為主。

### 第三章 數學失序 92

虔誠的天主教徒伽利略，也是當時最偉大的科學家。他為了自己的學說，槓上了耶穌會和教廷，最終被送進宗教審判所，人生最後十幾年都在軟禁中度過。伽利略的弟子卡瓦列里與托里切利持續提出不可分量和無限小的理論證明，更持續增強耶穌會想要壓制這個矛盾理論的決心，無限小的戰爭即將引爆。

### 第四章 你死或我亡：「無限小」的戰爭 131

耶穌會總校訂決議整個耶穌會體系都不得教授與討論無限小。耶穌會和支持伽利略的銳眼學會之間，為了維持歐幾里得幾何學理論或迎接新的無限小方式而開戰。