大学数学

（经济、管理类专业适用）

主编　李选民
参编　张宇萍　曹黎侠
王文海

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

大学数学

（经济、管理类专业适用）

主编　李选民

参编　张宇萍　曹黎侠

王文海

西安交通大学出版社

XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书分上、下两篇。上篇为线性代数与线性规划，主要介绍了行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组的解、特征值与特征向量、二次型及线性规划的基本概念和单纯形法。下篇为概率论与数理统计，主要介绍了事件与概率、一维与多维随机变量及分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、分布参数的点估计和区间估计、参数的假设检验等内容。

本书在编写的过程中遵循“拓宽基础、强化能力、立足应用”的原则与“必须、够用”的尺度，在知识内容与结构体系上做到由浅入深、循序渐进，有利于学生对知识的理解和掌握。

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/李选民主编.—西安：西安交通大学出版社，2011.8

经济、管理类专业适用

ISBN 978-7-5605-3959-1

Ⅰ.①大…　Ⅱ.①李…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 130284 号

书　　名　大学数学(经济、管理类专业适用)
主　　编　李选民
责任编辑　刘雅洁

出版发行　西安交通大学出版社
　　　　　(西安市兴庆南路 10 号　邮政编码 710049)
网　　址　http://www.xjtupress.com
电　　话　(029)82668357　82667874(发行中心)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
传　　真　(029)82668280
印　　刷　西安明瑞印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16　**印张** 16.75　**字数** 404 千字
版次印次　2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-3959-1/O·370
定　　价　30.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题，请与本社发行中心联系、调换。
订购热线：(029)82665248　(029)82665249
投稿热线：(029)82664954
读者信箱：jdlgy@yahoo.cn

前言

《大学数学（经济、管理类专业适用）》是一本为高等院校财经类学生撰写的教材，其内容涵盖了教育部颁布的高等财经类专业核心课程《经济数学基础》教学大纲中线性代数和概率论与数理统计部分的全部基本要求，并略有拓宽，可以满足普通高校经济、管理类各专业对本课程的要求。

在编写本书时，作者遵循"拓宽基础，强化能力，立足应用"与"必需、够用为度"的原则，注重基本概念、基本理论和基本方法。在引入概念时，不吝用一定的篇幅引入实际问题，以其为背景直观地给予说明；对部分定理，不过分强调严格抽象的理论推导，而代之以例证；在内容表达方式上，不像对数学系学生的要求那么严格，而是将数学语言在某些地方"通俗化"；在例题的选择上，淡化解题技巧的训练，而是通过较多的基本且典型的例题培养学生的基本能力；在知识体系、结构体系上尽量做到由浅入深，循序渐进，有利于学生对基本概念、基本理论的掌握，同时也利于学生自学。

本书也可供对线性代数、概率论与数理统计要求较低的工科类学生使用，还可作为高职高专、成人教育类非数学专业的相关课程的教材。书中带"*"号的内容和习题，可根据专业的不同需要与学时安排略去不讲，供学有余力的学生自学。

本书由李选民教授主编，杨力教授主审。参编人员有张宇萍教授、曹黎侠副教授及王文海老师。其中上篇的线性代数与线性规划，由李选民、王文海编写，下篇的概率论与数理统计，由张宇萍、曹黎侠编写，最后由李选民负责修改、统稿。本书在编写的过程中得到了西安工业大学、西安工业大学理学院及数学系的大力支持和帮助，并得到西安交通大学出版社大力支持，在此深表感谢。

由于水平所限，书中难免存在一些不妥之处，恳切希望读者批评指正。

编　者

2011 年 5 月

目 录

上篇 线性代数与线性规划

下篇　概率论与数理统计

上　篇

线性代数与线性规划

在科学研究、工程技术及经济管理中，经常遇到需要解决的问题可以直接或者近似地表示成变量之间的线性关系，或者虽是非线性关系但可以转化为线性关系，因此对线性关系的研究显得尤为重要. 线性代数是研究线性关系最基本的数学工具. 线性规划是运筹学中的重要内容，它在解决技术问题中的最优化，工业、农业、交通运输业的计划与管理、分析与决策中都有广泛的应用.

本篇的第 1 章至第 6 章介绍了线性代数的一些基本内容，第 7 章介绍了线性规划的基本概念和方法.

第 1 章　行列式

行列式是一种基本的数学工具.本章主要内容包括介绍 n 阶行列式的定义,以三阶行列式为主介绍行列式的性质及计算方法,最后介绍用 n 阶行列式求解 n 元线性方程组的克拉默(Cramer)法则.

1.1　二阶与三阶行列式

1.1.1　二元线性方程组与二阶行列式

行列式的概念首先是在求解方程组个数与未知量个数相同的一次方程组(以后常把一次方程组称为线性方程组)中提出来的.例如,用消元法解二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

为消去未知数 x_2,以 a_{22} 、a_{12} 分别乘上列两个方程的两端,然后两个方程相减,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地消去 x_1,得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时,方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \tag{1.2}$$

为了表述方便,引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

这个记号称为**二阶行列式**,它由 2^2 个数组成,它代表一个算式,等于数 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

数 a_{ij} $(i,j = 1,\ 2)$ 称为行列式(1.3)的**元素**,元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标,表明该元素位于第 i 行,第二个下标 j 称为列标,表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义,可用对角线法则来记忆.如图 1-1 所示,把 a_{11} 到 a_{22} 的实连线称为主对角线,a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线,于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.这种方法称为二阶行列式的**对角线法则**.

图 1-1

利用二阶行列式的概念,那么式(1.2)中 x_1,x_2 的分子也可以写成二阶行列式,即

$$b_1a_{22} - a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{11}b_2 - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则式(1.2)可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

注意,这里的分母 D 是由方程组(1.1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式),x_1 的分子 D_1 是用常数 b_1、b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}、a_{21} 所得的二阶行列式,D_2 是用常数 b_1、b_2 替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}、a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1.1 求解二元线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2=9 \\ x_1-2x_2=-4 \end{cases}$.

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=3\times(-2)-1\times1=-7\neq0$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}=9\times(-2)-1\times(-4)=-14$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=3\times(-4)-9\times1=-21$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{-14}{-7}=2, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{-21}{-7}=3$$

1.1.2 三阶行列式

对于 9 个元素 $a_{ij}\ (i,j=1,2,3)$,记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**,它由 3^2 个数组成,也代表一个算式,等于

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.4}$$

式(1.4)中右端含有 6 项,每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号,其代数和也可以用划线(见图 1-2)的方法记忆.其中各实线连接的三个元素的乘积是代数和中的正

项,各虚线连接的三个元素乘积是代数和中的负项.这种方法称为三阶行列式的对角线法则.

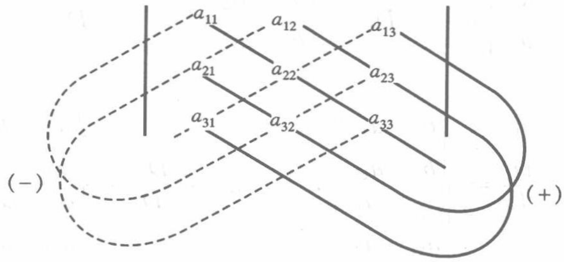

图 1-2

当引入三阶行列式的概念后,对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

若系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

用消元法求解这个方程组,可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

其中 D_j ($j = 1,2,3$)是用常数 b_1,b_2,b_3 替换 D 中的第 j 列所得的行列式,即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

例 1.2 求解三元线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 9 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7 \end{cases}$.

解 按对角线法有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1\times 2\times(-2) + 2\times 1\times(-3) + (-4)\times(-2)\times 4 - (-4)\times 2\times(-3) - 2\times(-2)\times(-2) - 1\times 1\times 4 = -14$$

同理

$$D_1 = \begin{vmatrix} 9 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -14,\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & -2 \end{vmatrix} = -28,\ D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 14$$

所以

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = 2, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D} = -1$$

例 1.3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？

解 按对角线法则有 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$. 由于 $a^2 - 1 > 0$ 当且仅当 $|a| > 1$，所以 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $|a| > 1$.

注：对角线法则只适合用于二阶与三阶行列式.

1.2 全排列及逆序数

上节我们引进了二、三阶行列式的概念，得到了求解二元一次方程组及三元一次方程组的行列式解法，该方法使得方程组的求解公式化、程序化. 那么对于一般的 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

能否类似引入 n 阶行列式的概念，是否可得 n 元一次方程组的行列式解法？为此，先介绍全排列及逆序数的概念.

定义 1.1 将 n 个不同的元素按某种顺序排成一列，称为这 n 个元素的一个**全排列**（简称**排列**，也称 **n 级排列**）.

显然，当 $n > 1$ 时，按不同的顺序它们可以组成不同的排列，其排列的总数通常用 P_n 表示.

例如，三个元素 1,2,3 可以组成以下六种全排列：123，132，213，231，312，321，故 $P_3 = 6$.

一般，从 n 个不同的元素中任取一个放在一个位置上，有 n 种取法；取定后从剩下的 $n-1$ 个元素中又取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；如此继续进行下去，直到最后只剩下一个元素放在第 n 个位置，只有一种取法，故有

$$P_n = n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

在本章内容中，我们所提到的排列中各元素均为正整数，取 n 个元素的一个全排列表示 n 个元素 $1,2,\cdots,n$ 的一个 n 级排列，记为 $a_1a_2\cdots a_n$.

对于 n 个不同的正整数，我们规定从小到大为标准次序，从小到大的排列称为标准排列，其他的排列都或多或少地改变了标准次序.

例如 4213 是 1,2,3,4 的一个排列，显然改变了标准排列 1234.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中，某两元素 a_i，$a_j(i,j = 1,2,\cdots,n)$，如果 $i < j$，而 $a_i > a_j$，则称数对 a_i，a_j 构成该排列的一个**逆序**. 一个排列中，逆序的总数称为这个排列的

逆序数.

例 1.4　求排列 4213 的逆序数.

解　该排列中共有 4 与 2,4 与 1,4 与 3,2 与 1 这四个逆序,所以排列 4213 的逆序数是 4. 为了方便起见,我们用 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 表示 $a_1a_2\cdots a_n$ 的逆序数.即,$\tau(4213)=4$.

给定排列 $a_1a_2\cdots a_n$,我们可以按照以下方法计算逆序数,设在第一个数 a_1 后面比它小的数有 t_1 个,在第二个数 a_2 后面比它小的数有 t_2 个,…,第 $n-1$ 个数 a_{n-1} 后面比它小的数有 t_{n-1} 个,则该排列的逆序数

$$\tau(a_1a_2\cdots a_n)=t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}$$

例 1.5　求排列 32514 的逆序数.

解　$t_1=2$,$t_2=1$,$t_3=2$,$t_4=0$,于是 $\tau(32514)=5$.

例 1.6　求排列 $n(n-1)\cdots 321$ 的逆序数.

解　$t_1=n-1$,$t_2=n-2$,…,$t_{n-2}=2$,$t_{n-1}=1$,于是

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

由逆序数定义不难得出:标准排列的逆序数为零.

定义 1.3　设 $a_1a_2\cdots a_n$ 是一个 n 级排列,若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个偶数,则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**偶排列**;若 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$ 是一个奇数,则称 $a_1a_2\cdots a_n$ 为**奇排列**.

1.3　n 阶行列式的定义

1.1 节给出了二阶、三阶行列式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

由二阶、三阶行列式容易看出:

(1) 二阶行列式表示所有不同行不同列的两元素的乘积的代数和.两元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2 为 2 级排列,当 j_1j_2 取遍了 2 级排列 12,21 时,即得到二阶行列式所有项(不包含符号),共为 2! =2 项.

三阶行列式表示所有位于不同行不同列的 3 个元素乘积的代数和,3 个元素乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

$j_1j_2j_3$ 为 3 级排列,当 $j_1j_2j_3$ 取遍了 3 级排列时,即得到三阶行列式所有的项(不包含符号),共为 3! =6 项.

(2) 每一项的符号是,当这一项中元素的行标按标准排列后,如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,对应的列标构成的排列是奇排列则取负号.例如三阶行列式中带正号的三

项列标排列 123,231,312 都是偶排列,带负号的三项列标排列 132,213,321 都是奇排列.

综上所述,二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2} (-1)^{\tau(j_1 j_2)} a_{1j_1} a_{2j_2}$$

式中 $\sum\limits_{j_1 j_2}$ 表示对 1,2 所有排列求和. 三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

式中 $\sum\limits_{j_1 j_2 j_3}$ 表示对所有的 1, 2, 3 的求和.

仿此,可给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.4 由 n^2 个数 a_{ij} $(i,j = 1, 2, 3, \cdots, n)$ 排成 n 行 n 列,并记为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称为 **n 阶行列式**,简记作 $det(a_{ij})$. 这 n^2 个数称为行列式的**元素**,a_{ij} 称为行列式第 i 行第 j 列元素,i 称为 a_{ij} 的行标,j 称为 a_{ij} 列标. n 阶行列式是一个数,这个数等于所有取自不同行、不同列的 n 个元素,并将行标按标准次序排列起来作乘积

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

的代数和. 这里 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 1, 2, …, n 的一个排列,式(1.6)的乘积共有 $n!$ 项,式(1.6)的每项都按下列规则带符号:当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时带有正号,当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时带负号.

为此行列式(1.5)可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \tag{1.7}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 1, 2, …, n 的所有排列求和,故式(1.7)是 $n!$ 项的代数和.

例如,四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中共有 $4! = 24$ 项. 其中含有一项 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$,而 $\tau(1324) = 1$,则 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 前面应冠以负号;此行列式同时也含有另一项 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$,而 $\tau(3412) = 4$,则 $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$ 前面应冠以正号. 注意:24 项中不会含有 $a_{11}a_{13}a_{22}a_{44}$ 或 $a_{13}a_{22}a_{32}a_{41}$. 想想为什么?

例 1.7 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}$$

解　根据定义，D是$4!=24$项的代数和.但是，由于D中不少元素为零，所以24项不少的项为零.不为零的项只有四项：$acfh$，$bdeg$，$adeh$，$bcfg$，它们对应的列标排列依次为1234,4321(偶排列),1324,4231(奇排列),因此

$$D=acfh+bdeg-adeh-bcfg$$

例 1.8　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　这样的行列式叫**下三角形行列式**.

由于D的第一行除了a_{11}外其他元素都是零，于是要得到非零项，第一行必须选a_{11}，而第二行不能选a_{21}，因为第一列中只能选一个元素，所以在第二行中只能选非零元素a_{22}，同理第三行只能选a_{33}，…，第n行只能选a_{nn}，这样D不含零元素的只有一项$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，又该项行标、列标都是按标准次序排列，前面的符号取正，所以

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

这表明下三角形行列式等于主对角线上元素的乘积.

行列式中从左上角到右下角的对角线称为**主对角线**，从右上角到左下角的对角线称为**副对角线**.

同理可得**上三角形行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

例 1.9　证明对角行列式

(1) $D_1=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

(2) $D_2=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$

证 因(1)是上三角形行列式特殊情况,结果显然.

现证(2).由于行列式 D_2 不含零的项只有 $\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1$,而该项行标已按标准次序排列,列标排列 n(n－1)…321 的逆序数为

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=\frac{n(n-1)}{2}$$

所以

$$D_2=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_n\lambda_{n-1}\cdots\lambda_2\lambda_1=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n$$

1.4 行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式,一般来说是较繁琐的,因此必须对行列式作进一步的研究,找出切实可行的计算方法.本节我们不加证明地给出行列式的性质,只用三阶行列式加以验证,详细证明读者可参考相关的资料.

将行列式 D 的行与相应的列互换后得到的新的行列式,称为 D 的**转置行列式**,记为 D^{T} 或 D',其互换过程称为对 D 的**转置**.即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式具有如下性质:

性质 1 行列式转置后,其值不变,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

例如

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-12+1+4=-7$$

其转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-12+1+4=-7$$

此性质说明了行列式中,行、列地位的对称性,由此可知,行列式中行的性质对列也同样成立.

性质 2 互换行列式中的任意两行(列),行列式仅改变符号.

例如

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -2 & 1\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}=-7$$

互换第一行和第三行得

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\0 & -2 & 1\\3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-4+12-1=7$$

则

$$D=-D_1$$

推论　若行列式 D 中有两行(列)对应元素相同,则行列式为零.

这是因为互换 D 中相同的两行,由性质 2 知 $D=-D$,于是 $D=0$.

性质 3　用 k 乘行列式 D 中的某一行(列),等于以数 k 乘此行列式. 即

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & & \vdots\\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

例如,用数 $k=2$ 乘 $\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -2 & 1\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}$ 的第三行得

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -2 & 1\\2 & 0 & 4\end{vmatrix}=-24+2+8=-14$$

即

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -2 & 1\\2 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3 & 1 & 2\\0 & -2 & 1\\1 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\times(-7)=-14$$

推论 1　如果行列式 D 中某行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式外面.

推论 2　如果行列式 D 中有两行(列)的对应元素成比例,则 $D=0$.

推论 3　如果行列式 D 中某行(列)的所有元素全为零,则 $D=0$.

性质 4　如果行列式 D 中的某一行(列)的元素都是两数之和(设第 i 行元素都是两数之和),即若

$$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和: