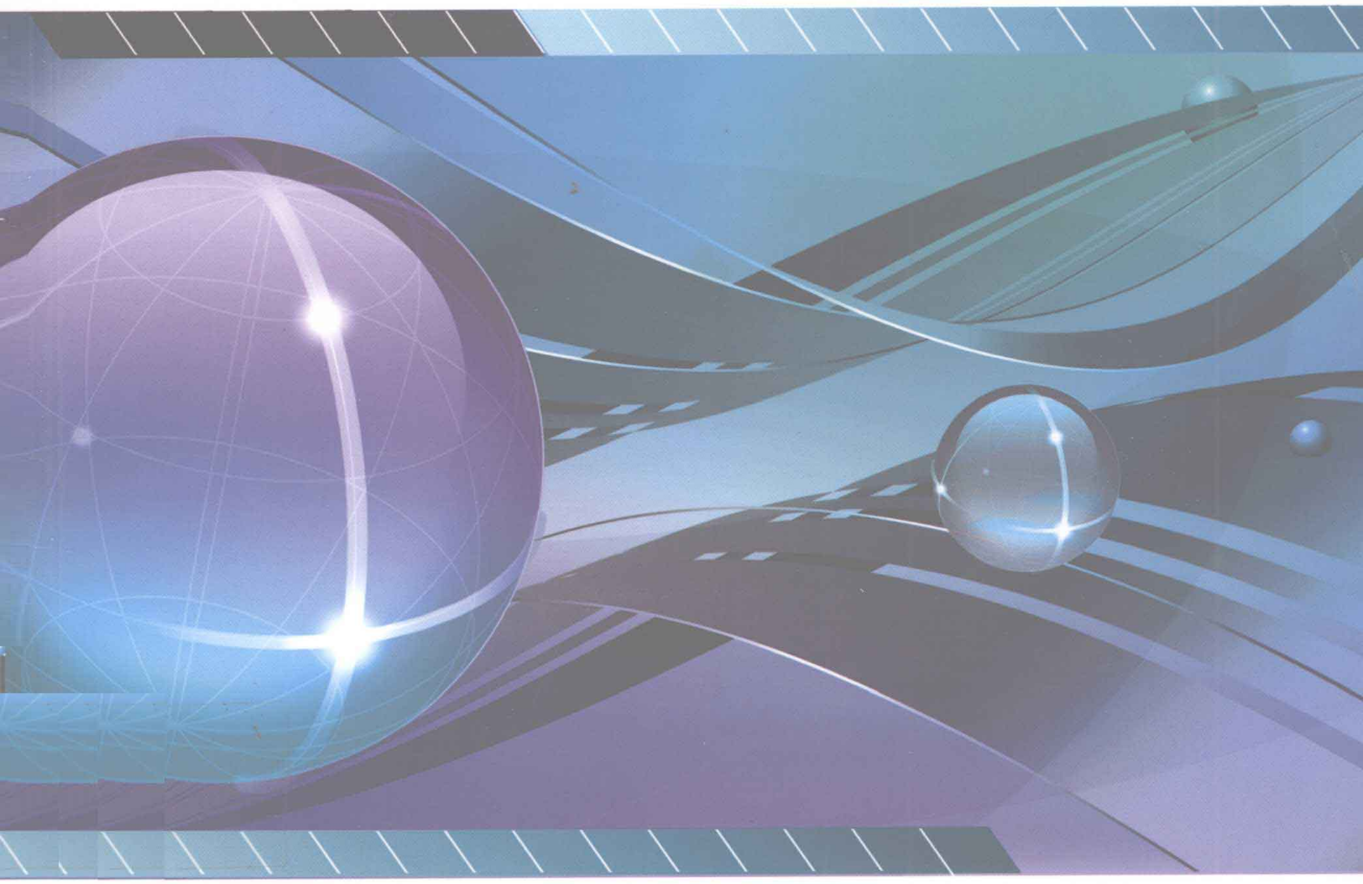
高等学校教材

大学物理学习指导

鄢泽林 主编 郦文忠 李建 副主编



電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

高等学校教材

大学物理学习指导

鄢泽林　主编
郦文忠　李　建　副主编

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书是主教材“大学物理教程”的配套辅助学习教材。全书共分五个模块16章，内容包括：模块一，运动和力（第1～4章）；模块二，电磁学（第5～9章）；模块三，振动与波（第10～12章）；模块四，热力学（第13～14章）；模块五，近代物理与新技术（第15～16章）。全书加强了基本概念的掌握，同时对学习的一些难点给出了解答，并给出了大量的例题和习题。

本书可作为高等院校理工科各专业学习“大学物理”课程的辅助教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

大学物理学习指导 / 鄢泽林主编. —北京：电子工业出版社，2011.3
高等学校教材
ISBN 978-7-121-12812-7

Ⅰ. ①大… Ⅱ. ①鄢…

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第010283号

策划编辑：章海涛
责任编辑：章海涛　谭海平
印　　刷：涿州市京南印刷厂
装　　订：涿州市桃园装订有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编　100036
开　　本：787×1 092　1/16　印张：13.75　字数：330千字
印　　次：2011年3月第1次印刷
印　　数：5 200册　　定价：30.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前 言

物理学作为一门基础理论科学，已经发展成为一套较为完善的体系，但它同时也在不断地与时俱进，紧跟时代步伐，促进着现代科学技术的进步。现代高新技术的每一步发展都离不开物理学基础，物理学也不断地完善并丰富着自己的理论体系。可以说，没有物理学的发展，就没有人类社会和文明的巨大进步。

物理学的基础理论科学地位，其重要性随着现代科学技术的发展而日益明显。学生只有学好物理学，才能在专业课学习及科研工作的开拓中取得更大的成就。为了使广大学生学好物理学，我们针对本科（尤其是二、三本院校理工科）学生编写了这本配套学习指导书。编写本书的目的是：配合教材，帮助学生更深入理解课程内容，理清思路，注重应用。本书对每章提出了基本要求，总结了基本内容，并提供了答疑解惑和例题讲解，每章后还附上了相应的习题，以便学生自我检测知识掌握情况。

编者在独立学院从事“大学物理”课程教学工作多年，普遍有感于课程学时不足、学生基础相对较差、教材不好选等实际问题。在建设“大学物理”精品课程工作中，加强教学研究，针对三本院校理工科各专业的特点，因人施教，因才施教。我们开展了分层次、分模块教学，注重基础，突出应用；轻分数，重能力；强调概念和规律，淡化理论与推导；既有经典物理模型，更重现代工程应用。本书正是在这一指导思想下编撰而成的，是《大学物理教程》的辅助学习教材。

本书在成都理工大学工程技术学院教务处指导下，由大学物理教研室组织编写，全书由鄢泽林审定并统稿。参与编写工作的有张小娟（第 1～2 章），王相星（第 3～4 章），李建（第 5～6 章），张宁（第 7～9 章），鄢泽林（第 10～11 章），刘鹏（第 12 章）、王坤（第 13～14 章），张辉（第 15～16 章）。

在本书的编写过程中参考了若干现有教材和参考书，在许多方面得到启发和教益，在此特致谢意。

由于编者水平有限，书中难免有遗漏甚至错误，恳请读者批评指正。

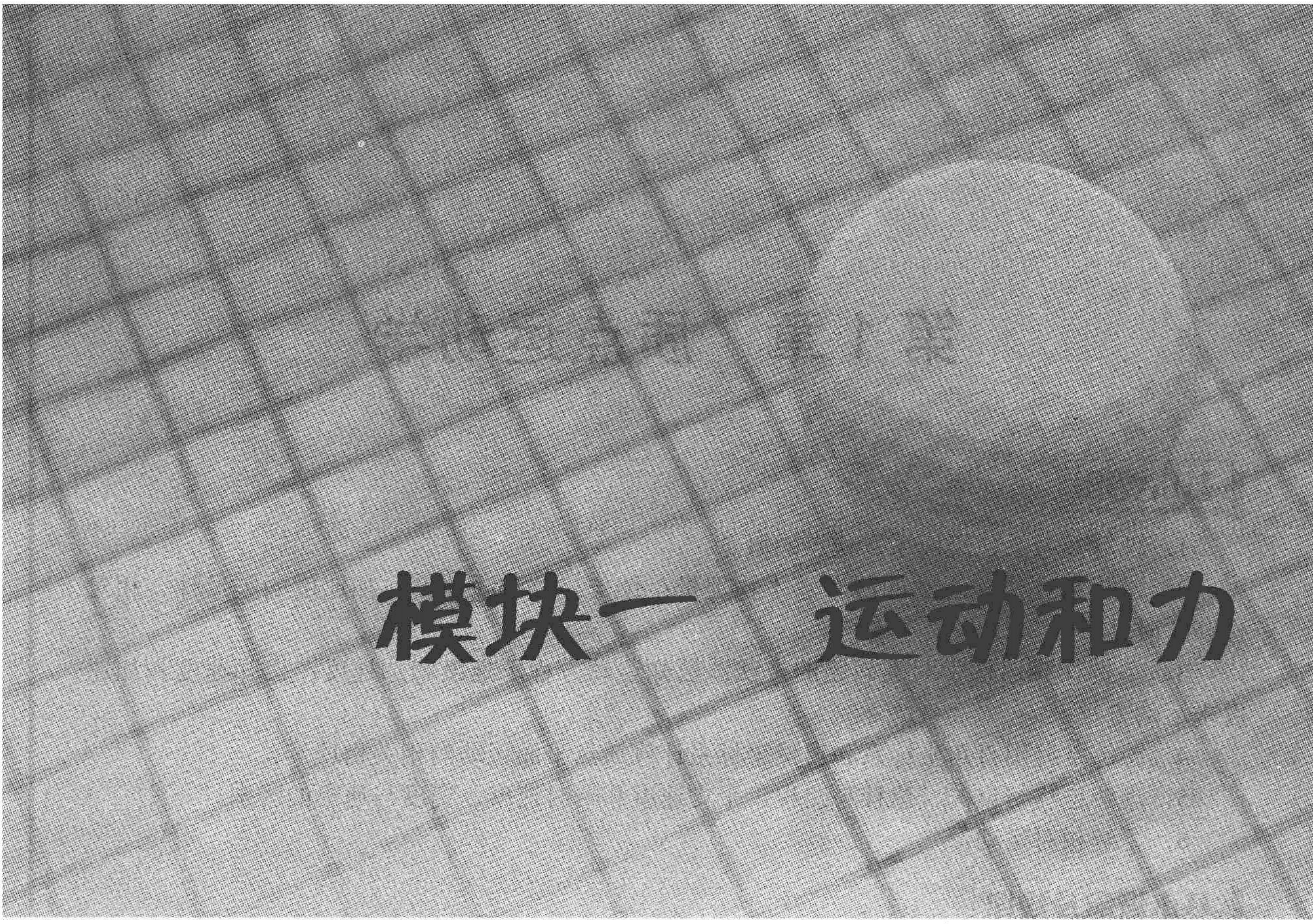
编 者

目　录

模块三　振 动 与 波

模块四　热　力　学

模块五　近代物理与新技术



模块一　运动和力

第 1 章　质点运动学

基本要求

1. 理解参考系、坐标系、质点的概念。

2. 掌握描述质点运动的四个基本物理量：位矢、位移、速度、加速度的矢量性、相对性和瞬时性。

3. 掌握计算运动学两类问题的方法：已知运动方程求速度和加速度；已知速度和加速度求运动方程。

4. 熟练掌握用直角坐标系和自然坐标系计算质点平面运动的相关物理量。

5. 理解位移与位矢、位移与路程、平均速度和瞬时速度、速度与速率的区别。

6. 了解相对运动。

基本概念及规律

一、基本概念

（1）参考系　为描述物体的运动而选的标准物。

（2）坐标系　在参考系上建立标明数量的坐标轴叫坐标系，如直角坐标系、自然坐标系和极坐标系等。

（3）质点　在一定条件下，可以忽略物体的大小和形状，把物体当做一个有一定质量的点，称为质点。

（4）位置矢量（位矢）$\boldsymbol{r}$　从坐标原点指向 P 点的有向线段称为位置矢量，$OP = \boldsymbol{r}$。

（5）运动方程　位置矢量随时间变化的关系式称为质点的运动方程，即 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$。

（6）轨迹方程（参数方程）　运动方程消去 t，便得到质点运动的轨迹方程。

（7）位移矢量（位移）$\Delta\boldsymbol{r}$　位矢在一段时间 Δt 内的增量，即自始点 A 指向终点 B 的有向线段，即

$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A$$

（8）平均速度 $\overline{\boldsymbol{v}}$　在 Δt 时间内，质点的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}$，单位时间内的位移即平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

（9）瞬时速度 $\boldsymbol{v}$　$\Delta t \to 0$ 时，平均速度的极限值或位矢对时间的一阶导数：

$$\boldsymbol{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

（10）平均加速度 $\overline{\boldsymbol{a}}$　在 Δt 时间内，质点的加速度的增量为 $\Delta\boldsymbol{v}$，则单位时间内的速度增

量即平均加速度为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

（11）瞬时加速度（加速度）$\boldsymbol{a}$ $\Delta t \to 0$ 时，平均加速度的极限值，或称为速度对时间的一阶导数（位矢对时间的二阶导数）

$$\boldsymbol{a}=\lim\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}^2 t}$$

（12）角量及角量与线量的关系

质点做圆周运动的角量表示

角坐标： $\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}(t)$ （rad）

角速度： $\boldsymbol{\omega}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\theta}}{\mathrm{d}t}$ （$\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$）

角加速度： $\boldsymbol{\alpha}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}$ （$\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$）

角量与线量的关系：

$$s=r\theta$$
$$v=r\omega$$
$$a_t=r\alpha$$
$$a_n=r\omega^2$$

（13）运动独立性原理（运动叠加原理）

一个运动可以视为由几个同时进行的相互独立的运动叠加而成，称为运动叠加原理。比如抛体运动可以视为两个同时进行的各自独立的直线运动的叠加。

（14）相对运动

描述任何运动都应该选择一定的参考系，用不同的参考系描述同一运动的质点，将有不同的 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{a}$。

设有两个参考系，一个为 s 系，另一个为 s' 系，s' 系沿 x 轴以恒定速度 $\boldsymbol{u}$ 相对 s 系运动。如图 1.1 所示，一个质点 p 在两个参考系中位矢和速度的变换式分别是

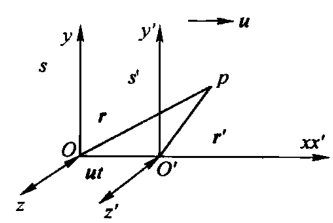


图 1.1

1）位矢变换式 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{u}t$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为质点在 s 系中的位矢，$\boldsymbol{r}'$ 为质点在 s' 系中的位矢，$\boldsymbol{u}t$ 为 s' 系相对 s 系的位矢。

2）速度变换式 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$

式中 $\boldsymbol{v}$ 为质点相对 s 系的速度（绝对速度），$\boldsymbol{v}'$ 为质点相对 s' 系的速度（相对速度），$\boldsymbol{u}$ 为 s' 系相对 s 系的速度（牵连速度）。

二、在平面曲线运动中的应用

1．平面直角坐标系

（1）位矢

矢量式： $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$

大小：
$$|r| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

方向：
$$\alpha = \arctan\frac{y}{x}\text{（}\alpha\text{ 为 }r\text{ 与 }x\text{ 轴的夹角）}$$

（2）运动方程（如图 1.2 所示）

矢量式
$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\boldsymbol{i} + y(t)\boldsymbol{j}$$

分量式
$$x = x(t),\quad y = y(t)$$

（3）轨迹方程
$$y = y(x)$$

（4）位移（如图 1.3 所示）

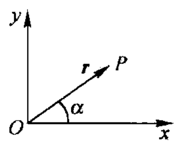


图 1.2

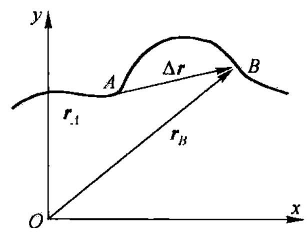


图 1.3

矢量式：
$$\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_B - \boldsymbol{r}_A = (x_B - x_A)\boldsymbol{i} + (y_B - y_A)\boldsymbol{j} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$$

大小：
$$|\Delta r| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

方向：A 点指向 B 点的方向

（5）平均速度

矢量式：
$$\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\boldsymbol{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\boldsymbol{j} = \overline{v_x}\boldsymbol{i} + \overline{v_y}\boldsymbol{j}$$

大小：
$$\overline{\boldsymbol{v}} = \sqrt{\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2}}$$

方向：$\Delta\boldsymbol{r}$ 的方向

（6）速度

矢量式：
$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

大小：
$$|v| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

方向：沿该点曲线的切线方向

（7）加速度

矢量式：
$$\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$$

大小： $$|a| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

方向： $$\theta = \arctan\frac{a_y}{a_x} \quad (\theta\text{为}a\text{与}x\text{轴之间的夹角})$$

2．自然坐标系

如图 1.4 所示，在质点作平面运动，并且运动轨迹 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}(t)$ 已知的情况下，我们可以选定轨迹上任意一点 O 为原点，用轨迹的长度 s 来描写质点的位置，用 $\boldsymbol{e}_t$ 表示质点沿轨迹切向的单位矢量，$\boldsymbol{e}_n$ 表示沿轨迹法向（指向凹面）的单位矢量，$\boldsymbol{e}_t \perp \boldsymbol{e}_n$，方向随时间而变化，这种顺着已知的质点运动轨迹建立起来的坐标系称为自然坐标系。

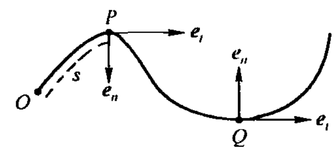


图 1.4

（1）自然坐标

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{s}(t)$$

（2）速度

$$\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_t = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e}_t \quad (\boldsymbol{v}\text{沿轨迹切线方向})$$

（3）加速度

矢量式：

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_t + \boldsymbol{a}_n = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{e}_t + \frac{\boldsymbol{v}^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n = r\alpha\boldsymbol{e}_t + r\omega^2\boldsymbol{e}_n$$

大小：

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$

方向：

$$\varphi = \arctan\frac{a_n}{a_t} \quad (\varphi\text{为}\boldsymbol{a}\text{与}\boldsymbol{a}_t\text{之间的夹角})$$

3）平面极坐标系

对于位矢限制在一平面上的情形，也可采用平面极坐标系。这时质点的位矢为 $\boldsymbol{r}$ 和 θ（θ为 $\boldsymbol{r}$ 与极轴之间的夹角），设以 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\theta$ 代表沿径向和横向（同径向垂直指向θ角增加的方向）的单位矢量，它们的数值不变，但方向均随质点的位置而变，如图 1.5 和图 1.6 所示，则

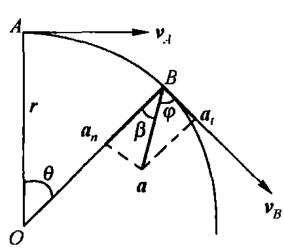


图 1.5

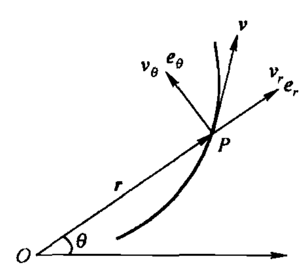


图 1.6

（1）位矢：

$$\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{e}_r$$

（2）速度：

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + r\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_r + \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\theta$$

释疑解惑

（1）位移与位矢的区别？

位矢是在某一时刻，以坐标原点为起点，以运动质点所在位置为终点的有向线段；而位移是在一段时间间隔内，从质点的起始位置指向质点的终止位置的有向线段。位矢描述的是在某一时刻运动质点在空间中的位置；而位移描述的是在某一时间间隔内运动质点位置变动的大小和方向。位矢与时刻相对应；位移与时间间隔相对应。在一般情况下，两者不相同。

（2）位移与路程的区别？

路程为某段时间内，质点所经过的路径（轨迹）的总长度，一般为曲线的弧长，为一标量；而位移是该段时间内，由其起始位置引向终止位置的有向线段，为一矢量。曲线运动时，$|\Delta\boldsymbol{r}| \neq \Delta s$。只有在质点作单方向直线运动时，位移的大小与路程的量值才相等，或当$\Delta t \to 0$时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$。

（3）速度与速率的区别？

速率$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，描述质点运动的快慢，只有大小，没有方向，是标量；而速度$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，描述了质点运动的快慢和方向，不仅有大小，而且有方向，是矢量。因为当$\Delta t \to 0$时，$|\mathrm{d}\boldsymbol{r}| = \mathrm{d}s$，所以$|\boldsymbol{v}| = v$。一般说匀速圆周运动、匀速曲线运动，实际上都省略了一个“率”字，都是匀速率运动，由于它们运动的方向随时都在变化，所以都是变速运动。

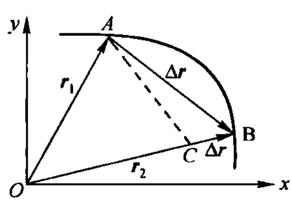


图 1.7

（4）曲线运动中，Δr与$|\Delta\boldsymbol{r}|$是否相同？

$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1|$表示两位矢的绝对值之差，而$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|$表示两位矢之差的绝对值。一般情况下两者并不相等。在图 1.7 中，设质点从 A 点运动到 B 点，则$\Delta r = |\boldsymbol{r}_2| - |\boldsymbol{r}_1| = \overline{BC}$，$|\Delta\boldsymbol{r}| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \overline{AB}$，二者并不相等。

（5）平均速度与瞬时速度有何区别？

平均速度$\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$与一段时间间隔相联系，只能粗略地描述质点的运动。瞬时速度$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$是当时间$\Delta t \to 0$时平均速度的极限值，与某一时刻相联系，精确地描述质点的运动。

（6）平均速度与平均速率的区别？

平均速率是运动质点所经过的路程与时间的比值，即$\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$是标量；平均速度是运动质点的位移与时间的比值，即$\bar{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$，一般情况下，$|\bar{\boldsymbol{v}}| \neq \bar{v}$，只有当质点作单方向直线运动时，平均速度的大小与平均速率的量值才相等。

例题讲解

运动方程是运动学问题的核心，实际遇到的运动学问题，大致可以分成以下两种类型。

Ⅰ 已知运动方程$\boldsymbol{r}(t)$，求速度和加速度。

这类问题只需按公式$\boldsymbol{v}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\boldsymbol{a}=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，将已知的$\boldsymbol{r}(t)$函数对时间$t$求导即可。

Ⅱ 已知速度及初始条件求运动方程，或已知加速度及初始条件求速度和运动方程。这类问题应用积分法，在计算上较为复杂一些。

【例 1-1】 一质点沿x轴作直线运动，其运动方程为$x=10+4t-t^2$（SI）。求：（1）第 3 秒末的速度和加速度；（2）第 1 秒末到第 3 秒末的位移、平均速度和路程。

【解】 对一维直线运动，可以忽略矢量号

（1）任一时刻的速度 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-2t$

任一时刻的加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-2$

将$t=3$代入得

$$v_3=-2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\qquad a_3=-2\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

（2）第 1 秒末到第 3 秒末的位移

$$\Delta x=x_3-x_1=13-13=0$$

第 1 秒末到第 3 秒末的平均速度

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=0$$

由$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=4-2t$可知质点的换向时刻 $t=2\mathrm{s}$

第 1 秒末到第 3 秒末的路程 $s=|x_2-x_1|+|x_3-x_2|=|14-13|+|13-14|=2\mathrm{m}$

【例 1-2】 已知质点的坐标为$x=2t$，$y=6-2t^2$。求：（1）1～2s 内的$\Delta\boldsymbol{r}$和$\overline{\boldsymbol{v}}$；（2）$t$=1s 时刻的瞬时速度；（3）任一时刻的加速度。式中各量均采用国际单位制（SI）

【解】（1）任意时刻的位矢

$$\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(6-2t^2)\boldsymbol{j}$$

将$t=1\mathrm{s}$和$t=2\mathrm{s}$代入得

$$\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}_2=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$$

则 1～2s 内的位移为

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

平均速度为

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=2\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}$$

（2）由 $$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 2\boldsymbol{i} - 4t\boldsymbol{j}$$

代入 $t=1$ 得

$$\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$$

（3）由 $\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ 得，任一时刻的 $\boldsymbol{a} = -4\boldsymbol{j}$。

【例 1-3】 在湖中有一小船，岸边有一人用绳子跨过一定滑轮用恒定的速度 v 拉船靠岸，试分析船运动的速率比 v 大还是比 v 小？船是否作匀速运动？

【解】 设船的速率为 u，t 时刻船位于 A 处，绳长为 l，船离岸上 O 点的距离为 x，定滑轮离湖面的高度为 h，船前进时，绳长 l、x 和 α 都在改变，在三角形 ACO 中，

$$l^2 = h^2 + x^2$$

两边求导数得

$$2l\frac{dl}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

因为 $v = \frac{dl}{dt}$，$u = \frac{dx}{dt}$，故

$$u = \frac{l}{x}v = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v = \frac{v}{\cos\alpha}$$

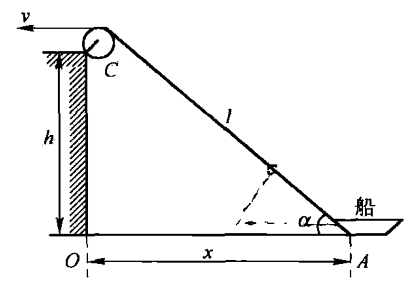


图 1.8

可见，船速率 u 大于绳头速度 v，船前进时 α 角增大，v 是恒量，故船的速率越来越快，船作加速运动，设船的加速度为 a，则

$$a = \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v\right] = -\frac{h^2}{x^3}v^2 \qquad \text{（负号表示 } a \text{ 与 } x \text{ 轴反向）}$$

船作变加速直线运动。

那么为什么不能用 $u = v\cos\alpha$ 来求船速呢？这是因为虽然绳头的速率为 v，但由于角 α 也在变化，所以通过定滑轮后绳上各点的速率并不是 v，从定滑轮到船头的这段绳上各点速率均不相同，绳上各点既有平动又有绕定滑轮的转动，是两种运动的合成，因此与船相连处绳尾的速率并不是 v，而是大于 v，故不能用 $u = v\cos\alpha$ 来求船速。

【例 1-4】 一质点在平面上运动，已知质点位矢的表示式为 $\boldsymbol{r} = at^2\boldsymbol{i} + bt^2\boldsymbol{j}$，其中 a、b 为常量，问该质点作什么运动？

【解】（1）先求出质点运动的轨迹方程进行判断。

根据题意可知 $$x = at^2,\quad y = bt^2$$

消去 t，得

$$y = \frac{b}{a}x$$

故质点作直线运动。

（2）求出质点运动的速率 v，以判别运动的性质。

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(2at)^2 + (2bt)^2} = 2t\sqrt{a^2+b^2}$$

故质点作变速直线运动。

（3）根据
$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{a^2+b^2}$$

得 a 是常量，故质点作匀变速直线运动。

【例 1-5】 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$，在 t=0 时，$\boldsymbol{r}_0=10\boldsymbol{i}$，$v_0=0$。求：（1）任意时刻的速度和位矢；（2）质点为 Oxy 平面上的轨迹方程，并画出轨迹的示意图，式中各量均采用 SI 制。

解题思路：该题属于质点运动学的第二类问题，已知加速度 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(t)$ 及初始条件，求速度及运动方程，采用积分的方法来解决。

【解】（1）由加速度定义式 $\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 $t_0=0$ 时，$v_0=0$，积分可得

$$\int_0^v \mathrm{d}\boldsymbol{v}=\int_0^t \boldsymbol{a}\mathrm{d}t=\int_0^t(6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$
$$\boldsymbol{v}=6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j}$$

又由 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ 及初始条件 t=0 时，$\boldsymbol{r}_0=10\boldsymbol{i}$，积分可得

$$\int_{r_0}^{r} \mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_0^t \boldsymbol{v}\mathrm{d}t=\int_0^t(6t\boldsymbol{i}+4t\boldsymbol{j})\mathrm{d}t$$
$$\boldsymbol{r}=(10+3t^2)\boldsymbol{i}+2t^2\boldsymbol{j}$$

（2）由上述结果可得质点运动方程的分量式，即

$$x=10+3t^2$$
$$y=2t^2$$

消去参数 t，可得运动的轨迹方程

$$3y=2x-20$$

这是一个直线方程，直线斜率 $k=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{2}{3}$，$\alpha=33°\ 41'$，轨迹如图 1.9 所示。

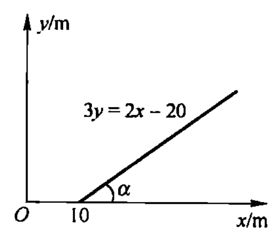


图 1.9

【例 1-6】 一气球以速率 v_0 从地面上升，由于风的影响，随着高度的上升，气球的水平速度按 $v_x=by$ 增大，其中 b 是正的常量，y 是从地面算起的高度，x 轴取水平向右的方向。

（1）计算气球的运动学方程；

（2）求气球水平飘移的距离与高度的关系；

（3）求气球沿轨道运动的切向加速度和轨道的曲率与高度的关系。

解题思路：该题属于质点运动学的两类问题的综合题，已知速度及初始条件，求运动方程和加速度。既要用微分法，又要用积分法。关键是根据 $v_x(y)$，v_y 的关系式，先找出 $v_x(t)$ 关系式，再求出 $x(t)$、$y(t)$ 关系式，即可写出运动学方程。

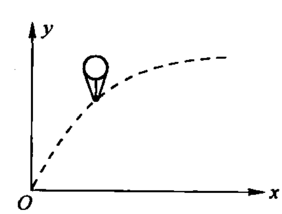


图 1.10

【解】 取平面直角坐标系 Oxy（见图 1.10），令 t=0 时气球位于坐标原点（地面）。

已知 $v_y = v_0$

$v_x = by$

显然有 $y = v_0 t$ ①

而 $\dfrac{dx}{dt} = by = bv_0 t$

或 $dx = bv_0 t dt$

对上式两边取定积分

$$\int_0^x dx = \int_0^t bv_0 t dt$$

得到 $x = \dfrac{bv_0 t^2}{2}$ ②

气球的运动学方程为

$$\boldsymbol{r} = \frac{bv_0}{2} t^2 \boldsymbol{i} + v_0 t \boldsymbol{j}$$

从式①和式②消去 t，得到轨迹方程

$$x = \frac{b}{2v_0} y^2$$

又因气球的运动速率

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2 y^2 + v_0^2} = \sqrt{b^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}$$

所以气球的切向加速度为

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{b^2 v_0^2 t}{\sqrt{b^2 v_0^2 t^2 + v_0^2}} = \frac{b^2 v_0 y}{\sqrt{b^2 y^2 + v_0^2}}$$

而由 $a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2}$ 和 $a^2 = a_x^2 + a_y^2 = \left(\dfrac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dv_y}{dt}\right)^2 = b^2 v_0^2$，可求出

$$a_n = \frac{bv_0^2}{\sqrt{b^2 y^2 + v_0^2}}$$

再由 $\dfrac{v^2}{\rho} = a_n$，求得

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(b^2 y^2 + v_0^2)^{\frac{3}{2}}}{bv_0^2}$$

【例 1-7】 路灯离地面高度为 H，一个身高为 h 的人，在灯下水平路面上以匀速 v_0 步行，如图 1.11 所示。求当人与灯的水平距离为 x 时，他的头顶在地面上的影子移动的速度大小。

【解】 建立如图 1.12 所示的坐标。

t 时刻头顶影子的坐标为 $x + x'$，设头顶影子的移动速度为 v，则

$$v = \frac{d(x + x')}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dx'}{dt} = v_0 + \frac{dx'}{dt}$$

由图得

$$\frac{H}{x+x'}=\frac{h}{x'}$$

则有

$$x'=\frac{hx}{H-h}$$

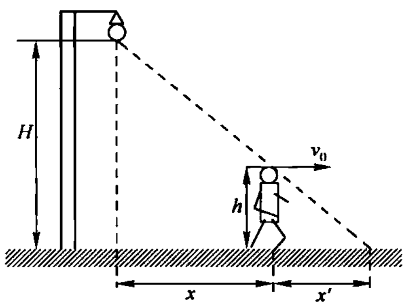


图 1.11

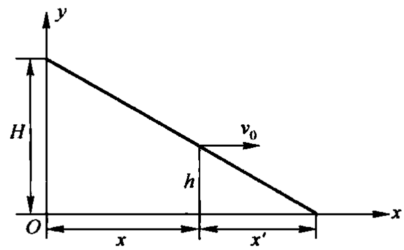


图 1.12

$$\frac{dx'}{dt}=\frac{hv_0}{H-h}$$

所以有

$$v=v_0+\frac{hv_0}{H-h}=\frac{H}{H-h}v_0$$

【例 1-8】 一半径为 0.50m 的飞轮在启动时的短时间内，其角速度与时间的平方成正比，在 $t=2.0\text{s}$ 时测得轮缘一点的速度为 $4.0\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。

求：(1) 该轮在 $t'=0.5\text{s}$ 时的角速度，轮缘一点的切向加速度和总加速度；

(2) 该点在 2.0s 内所转过的角度。

解题思路：首先应确定角速度的函数关系 $\omega=kt^2$。依据角量与线量的关系，由特定时刻的速度值可得相应的角速度，从而求出式中的比例关系 k，$\omega=\omega(t)$ 确定后，注意到运动的角量描述与线量描述的相应关系，由运动学中两类问题求解的方法（微分法和积分法），即可得到特定时刻的角加速度、切向加速度和角位移。

【解】 因 $\omega r=v$，由题意 $\omega\propto t^2$，得比例系数

$$k=\frac{\omega}{t^2}=\frac{v}{rt^2}=2$$

故

$$\omega=2t^2$$

则 $t'=0.5\text{s}$ 时的角速度、角加速度和切向加速度分别为

$$\omega=2t'^2=0.5\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\alpha=\frac{d\omega}{dt}=4t'=2.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a_t=\alpha r=1.0\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

总加速度矢量及大小分别为