微积分
学习辅导（上册）

主　编　李剑秋
副主编　卢俊峰　孙景楠
陈赛君　宋秀迎

浙江工商大學出版社
ZHEJIANG GONGSHANG UNIVERSITY PRESS

微积分学习辅导(上册)

主　编　李剑秋
副主编　卢俊峰　孙景楠
　　　　陈赛君　宋秀迎

图书在版编目(CIP)数据

微积分学习辅导. 上册 / 李剑秋主编. —杭州：浙江工商大学出版社，2011.8

ISBN 978-7-81140-386-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 177560 号

微积分学习辅导(上册)

李剑秋 主编

责任编辑	陈维君
封面设计	刘　韵
责任印制	汪　俊
出版发行	浙江工商大学出版社 (杭州市教工路 198 号　邮政编码 310012) (E-mail:zjgsupress@163.com) (网址:http://www.zjgsupress.com) 电话:0571—88904980,88831806(传真)
排　版	杭州朝曦图文设计有限公司
印　刷	杭州杭新印务有限公司
开　本	787mm×960mm　1/16
印　张	13
字　数	266 千
版印次	2011 年 8 月第 1 版　2011 年 8 月第 1 次印刷
书　号	ISBN 978-7-81140-386-2
定　价	26.00 元

前　言

微积分是高等院校学生的重要基础课之一，为使学生更好地掌握教材内容，我们编写了这本与教材配套的辅导书。书中的每章按照内容提要、例题解析、自测题及教材复习题解答四个部分编写。内容提要比较详细地总结了各章节的定义、重要定理和公式，特别对于一些重要的基本概念，从不同的角度加以剖析，并指出需注意的重点；例题解析对各章节重点题型作了归纳和总结，精选各类典型例题，力求解释详尽，着重分析，并通过一题多解的讲解，帮助学生提高综合分析能力；自测题主要取自于教材，难易程度适中，目的是检测学生在理解本章内容的基础上，掌握必备的解题能力，也可以作为考查学生是否掌握该章节知识的基本试题内容；复习题解答给出了教材各章复习题的详细解答，帮助学生更好地学习和掌握各章内容，起到辅助参考的作用。为检测学生是否全面掌握知识要点和解题能力，特精选了五套模拟试卷，并附试卷详细解答。

本书上册由浙江工商大学五位老师合作完成。其中，孙景楠编写第一章、模拟试卷（三）及解答；陈赛君编写第二章、模拟试卷（四）及解答；宋秀迎编写第三章、模拟试卷（五）及解答；李剑秋编写第四章、模拟试卷（一）及解答；卢俊峰编写第五章、模拟试卷（二）及解答，最后由李剑秋统稿、定稿。

限于编者水平，不周之处切望同行、读者指正。

编　者

于浙江工商大学杭州商学院

2011 年 6 月

目　　录

第一章　函　数

内容提要

区间、邻域的表示法；函数的定义、表示法及性质；反函数与反三角函数；复合函数与初等函数.

一、区间与邻域

(一) 区间

1. 闭区间：$[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$.

2. 开区间：$(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$.

3. 半开区间：$[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$ 或 $(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$.

4. 无穷型区间：$[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x < +\infty\}$，$(a,+\infty)=\{x \mid a < x < +\infty\}$，$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty < x \leqslant b\}$，$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty < x < b\}$.

特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可表示为无穷区间 $(-\infty,+\infty)$.

(二) 邻域

设 δ 是某一正数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}=\{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

点 a 称为该邻域的中心，δ 称为该邻域的半径.

有时需要把邻域的中心去掉，点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)$ 去掉中心 a 后，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)=\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

二、函数的概念

(一) 函数的定义

1. 函数的定义

设数集 $D \subset \mathbf{R}$，$D \neq \varnothing$，如果对 D 中的每一个 x，按照某个对应法则 f，有唯一的数 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数，记为

$$y = f(x), \ x \in D.$$

注 定义域 D 和对应法则 f 是构成函数的两个要素，即两个函数只有在定义域、对应关系都相同时，才是同一函数.

2. 函数的表示法

(1) 表格法；(2) 图象法；(3) 解析法.

(二) 函数的性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有 $f(x_1) < f(x_2)$(或 $f(x_1) > f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的(或单调减少的).

注 单调性是相对于区间而言的. 一个函数可能在一个区间内单调，而在另外的区间内没有单调性；也可能在一个区间内单调增加，而在另外的区间内单调减少.

2. 奇偶性

设 $y = f(x)$ 在关于原点对称的区间 D 内有定义，对任意 $x \in D$，若 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

3. 周期性

设函数 $y = f(x)$， $x \in D$，若存在常数 $T > 0$，有 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足上面等式的最小正数 T 称为函数 $f(x)$ 的最小正周期.

对于周期函数的图象，只需关心它在一个周期内的图象，其他区间的图象可以平移得到.

注 不是任意周期函数都有最小正周期，例如常值函数 $y = C$ 以任何实数为周期，但没有最小正周期.

4. 有界性

设 $y = f(x)$ 在区间 I 内有定义，若存在正数 M，使得对 $\forall x \in I$，均有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界. 如果这样的 M 不存在，就称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

一般地，如果对任一 $x \in X$，恒有 $f(x) \geqslant A$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上下有界，A 称为一个下界；如果对任一 $x \in X$，恒有 $f(x) \leqslant B$，则称函数 $f(x)$ 在 X 上上有界，B 称为一个上界，且上界和下界是不唯一的.

注 (1) $f(x)$ 有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 必上有界且下有界；

(2) $f(x)$ 的有界性是一个与区间 I 相联系的概念. 例如，$f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界，在 $(1,2)$ 上有界.

三、初等函数

(一) 反函数

设已给函数 $y=f(x)$，若将 y 作为自变量，x 作为 y 的函数，所确定的函数 $x=\varphi(y)$ 称为函数 $f(x)$ 的反函数，记为 $y=f^{-1}(x)$，而 $f(x)$ 称为直接函数. 原函数 $f(x)$ 与反函数 $f^{-1}(x)$ 的图象在同一坐标系里关于直线 $y=x$ 是对称的.

注 并不是每一个函数都存在反函数. 当且仅当函数 $y=f(x)$ 的对应关系是一一对应时，才有反函数. 特别地，单调函数的对应法则就是一一对应的，因此单调函数必有反函数.

(二) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 M_φ，若 $M_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$，则将 $y=f[\varphi(x)]$ 称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 称为中间变量，x 为自变量.

注 不是任何两个函数都可以合成一个复合函数的，关键是作为内层函数的函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与外层函数 $y=f(u)$ 的定义域要有交集.

(三) 初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常值函数：$y=C$ （C 为常数）.

(2) 幂函数：$y=x^\mu$ （μ 为实数）.

(3) 指数函数：$y=a^x$ （$a>0, a\neq 1$）.

(4) 对数函数：$y=\log_a x$ （$a>0, a\neq 1$）.

(5) 三角函数：正弦函数 $y=\sin x$；余弦函数 $y=\cos x$；正切函数 $y=\tan x$；余切函数 $y=\cot x$；正割函数 $y=\sec x$；余割函数 $y=\csc x$.

(6) 反三角函数：反正弦函数 $y=\arcsin x$；反余弦函数 $y=\arccos x$；反正切函数 $y=\arctan x$；反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算及有限次的复合而产生的能用一个解析式表示的函数，称为初等函数.

注 分段函数通常不是初等函数，但也有例外，如 $y=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$ 这是因为它可表达为 $y=\sqrt{x^2}$，故可看作是初等函数.

例题解析

【例 1】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-1}$ (2) $\arcsin\dfrac{x-5}{2}$

分析 求初等函数的定义域有下列原则:① 分母不能为零;② 偶次根式的被开方数不能为负数;③ 对数的真数不能为零或负数;④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$;⑤$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$;⑥$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

解 (1) $\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\ x^2-1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\ x\neq\pm 1\end{cases}\Rightarrow x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

(2) $-1\leqslant\dfrac{x-5}{2}\leqslant 1\Rightarrow x\in[3,7]$.

【例 2】 设 $f(x)$ 的定义域是$[0,1]$,求 $f(\sin x)$ 的定义域.

解 由题意应使 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以 $x\in[2k\pi,(2k+1)\pi],k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$.

【例 3】 设 $f(e^{x-1})=3x-2$,求 $f(x)$.

分析 由已知函数关系式求函数的表示式通常采取变量替换的方法.

解 设 $e^{x-1}=u$,则 $x=\ln u+1$,

所以 $f(u)=3(\ln u+1)-2=3\ln u+1$,即 $f(x)=3\ln x+1$.

【例 4】 (习题 1.2-4) 某餐店开始营业前,作如下估计:如设置 40 至 80 个座位,每个座位每周可获利润 8 元,但如果座位超过 80 个,每增加 1 个,每周每个座位将少赚 0.04 元.试将每周利润 L 表示为座位个数 x 的函数,并问:当座位数超过多少个时,预计将亏本.

解 用分段函数表示.

当 $40\leqslant x\leqslant 80$ 时,$L(x)=8x$,

当 $x>80$ 时,$L(x)=x[8-(x-80)\times 0.04]=x(11.2-0.04x)$,

令 $L(x)=0$,得 $x=280$.

故 $L(x)=\begin{cases}8x, & 40\leqslant x\leqslant 80,\\ x(11.2-0.04x), & 80<x\leqslant 280.\end{cases}$

当 $x>280$ 时,$L(x)<0$,亏本.

【例 5】 设 $f(x)$ 为奇函数,$g(x)$ 为偶函数,考察下列复合函数的奇偶性:

(1) $f[g(x)]$ (2) $g[f(x)]$ (3) $f[f(x)]$

分析 判定函数的奇偶性,只需从定义出发,考察 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系.

解 (1) $f[g(-x)]=f[g(x)]$,所以为偶函数;

(2) $g[f(-x)]=g[-f(x)]=g[f(x)]$,所以为偶函数;

(3) $f[f(-x)]=f[-f(x)]=-f[f(x)]$,所以为奇函数.

【例 6】 设存在两个实数 $a,b(a<b)$,使得对任意 x,函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(a-x)=f(a+x) \text{ 及 } f(b-x)=f(b+x),$$

试证 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

分析 判断周期函数只需从定义出发,找到 $T\neq 0$,使得 $f(x+T)=f(x)$.

证 对任意给定的 x,有

$$f[x+2(b-a)]=f[b+(x+b-2a)]$$
$$=f[b-(x+b-2a)]=f(2a-x)$$
$$=f[a+(a-x)]=f[a-(a-x)]=f(x),\text{得证}.$$

【例 7】 判断下列函数在指定区间内的有界性:

(1) $f(x)=\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 及 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内

(2) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(3) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

分析 判断函数有界性的常用方法是利用函数有界性的定义,对函数取绝对值,然后对不等式进行缩放处理.

解 (1) $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加,且当 $x\to\frac{\pi}{2}$ 时,$\tan x\to+\infty$,所以 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内无界.

当 $x\in\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 时,$|\tan x|<\tan\frac{\pi}{4}=1$,所以 $\tan x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$ 内有界.

(2) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内,因为 $1+x^2\geqslant 1$,所以 $|f(x)|\leqslant 1$,即 $f(x)$ 有界.

(3) 因为 $1+x^2\geqslant 2|x|$,所以 $\left|\dfrac{x}{1+x^2}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$,即 $f(x)$ 有界.

【例 8】 求 $y=\dfrac{2x-3}{3x+2}$ 的反函数.

解 由原式反解出 x 关于 y 的表达式,得 $x=\dfrac{3+2y}{2-3y}$,交换 x 与 y 位置得反函数为 $y=\dfrac{3+2x}{2-3x}$.

【例 9】 (习题 1.4-7) 试证 $y=\arccos x-\dfrac{\pi}{2}$ 是奇函数.

证 $f(-x)=\arccos(-x)-\frac{\pi}{2}=\pi-\arccos x-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\arccos x=-f(x)$,

故 $y=\arccos x-\frac{\pi}{2}$ 是奇函数.

【例 10】 求下列各式的值:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)$　　(2) $\arcsin(\sin 6)$

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$　　(4) $\operatorname{arccot}(-1)$

解 (1) $\arcsin\left(\sin\frac{5}{6}\pi\right)=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$.

(2) 因为 $6-2\pi\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,所以 $\arcsin(\sin 6)=\arcsin[\sin(6-2\pi)]=6-2\pi$.

(3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5}{6}\pi$.

(4) $\operatorname{arccot}(-1)=\pi-\operatorname{arccot}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}\pi$.

【例 11】 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 2,\\ 2, & |x|>2,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1,\end{cases}$

现要使 $|g(x)|\leqslant 1$,当且仅当 $|x|\leqslant 2$,且 $|2-x^2|\leqslant 1$ 时即可,即 $1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3}$,所以

$$f[g(x)]=\begin{cases}1, & 1\leqslant|x|\leqslant\sqrt{3},\\ 0, & |x|<1 \text{ 或 } |x|>\sqrt{3}.\end{cases}$$

【例 12】 **(习题 1.5－6)** 设 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,求 $\underbrace{f(f(f\cdots(f}_{n个f}(x)\cdots)))$.

解 $f(f(x))=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$, $f(f(f(x)))=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+2\frac{x^2}{1+x^2}}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+3x^2}}$,

归纳可得:$\underbrace{f(f(f\cdots(f}_{n个f}(x)\cdots)))=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$.

【例 13】 **(习题 1.5－8)** 设置中间变量,将下列复合函数分解为简单函数(由基本初等函数或其四则运算所成的函数):

(1) $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ (2) $y=\cos^3\sqrt{2-x^2}$

(3) $y=\arctan\sqrt{x^2-1}$ (4) $y=x^{\sin x}(x>0)$

分析 对复合函数的分解是要将复合函数逐层分解为若干个基本初等函数或多项式函数，不能遗漏，不能重复．这对今后学习复合函数求导和积分运算非常重要．

解 (1) $y=e^u$, $u=\sin v$, $v=\dfrac{1}{x}$.

(2) $y=u^3$, $u=\cos v$, $v=\sqrt{w}$, $w=2-x^2$.

(3) $y=\arctan u, u=\sqrt{v}, v=x^2-1$.

(4) $y=x^{\sin x}(x>0)$ 既不是幂函数，也不是指数函数，称为幂指函数．

由于 $x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$，所以分解为 $y=e^u, u=\sin x\cdot\ln x$.

自 测 题

一、单项选择题

1. $f(x)=\dfrac{1}{\lg|x-5|}$ 的定义域是(　　).

A. $(-\infty,5)\cup(5,+\infty)$

B. $(-\infty,6)\cup(6,+\infty)$

C. $(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$

D. $(-\infty,4)\cup(4,5)\cup(5,6)\cup(6,+\infty)$

2. $f(x)$ 与 $g(x)$ 不表示同一函数的是(　　).

A. $f(x)=|x|$, $g(x)=\sqrt{x^2}$

B. $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

C. $f(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$, $g(x)=\dfrac{1-x^2}{(1-x)^2}$

D. $f(x)=\arcsin x$, $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$

3. 下列函数中为奇函数的是(　　).

A. $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ B. $\sin x^2$

C. $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ D. 2^{-x}

4. 若 $f(\ln x)=x$,则 $f(2)$ 的值等于(　　).

A. 2^e　　B. e^2　　C. $\ln 2$　　D. $\log_2 10$

5. 下列函数在其定义域内为无界函数的是(　　).

A. $y=5$　　B. $y=2+\sin x$

C. $y=|\cos x|$　　D. $y=x\sin x$

二、填空题

1. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<2,\\ x^2-1, & x\geqslant 2,\end{cases}$ 则 $f[f(1)]=$________.

2. 已知 $y=f(x)$ 是偶函数,在 $(-\infty,0]$ 上是单调函数,且 $f(0)>f(-1)$,则 $f(-2)$, $f(-\pi)$, $f(3)$ 的大小关系是________.

3. $y=x^3$ 与 $y=\sqrt[3]{x}$ 的图形关于________对称.

4. 函数 $y=\sin 2x+\tan\frac{x}{2}$ 的最小正周期是________.

5. 设 $f(x)=\arctan x$, $g(x)=\sqrt{x}$, $\varphi(x)=\ln x$,则 $f\{g[\varphi(x)]\}=$________.

三、计算题

1. 用区间表示下面的邻域:

(1) 1 的 0.01 邻域　(2) x_0 的 ε 右邻域($\varepsilon>0$)　(3) x_0 的 δ 去心邻域

2. 求下列函数的自然定义域:

(1) $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

(2) $y=\dfrac{1}{\lg(x-\pi)}+\lg\dfrac{x}{2}$

3. 某产品年产量为 x 台,每台售价为 200 元.当年产量不超过 500 台时,可以全部售出;当年产量超过 500 台时,须经过广告宣传后才可售出一些,这时超额销售部分需花广告费每台 2 元和销售杂务费每台 15 元,但最多也只能售出 200 台.试求该产品年销售总收入与年产量 x 的函数关系.

4. 判断下列函数的奇偶性:

(1) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$　(2) $y=\begin{cases}\cos x, & 0<x<\pi\\ -\cos x, & -\pi<x<0\end{cases}$

5. 判断下列函数是否有界:

(1) $y=\sin^2 x+\cos x-3$　(2) $y=3\sin\dfrac{1}{x}$

(3) $y = 2^{\frac{1}{x}}$　　(4) $y = -\dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$

6. 求 $y = 1 + \lg(x+2)$ 的反函数.

7. 求 $y = \arcsin(3x-2)$ 的定义域.

8. 求下列各反三角函数的值：

(1) $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$　(2) $\arcsin 1$　(3) $\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})$　(4) $\arctan(-1)$

9. 已知 $f(x)$ 的定义域为$[-1, 1]$,求 $f(\ln x)$ 的定义域.

10. 设 $f(x^2-1) = \ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f(\varphi(x)) = \ln x$，求 $\varphi(x)$.

11. 分解下列函数为若干个基本初等函数：

(1) $y = 10^{x^2}$　　(2) $y = \lg(\cos\sqrt{x})$

(3) $y = \sqrt{\arccos(2^x)}$　　(4) $y = \dfrac{1}{\lg(\tan^3 x)}$

四、证明题

1. 证明 $y = x - [x]$ 是周期函数,并指出它的周期.

2. 设 $f(x)$ 是定义在$(-l,l)$ 上的任意函数,试证：

(1) $f(x) + f(-x)$ 是偶函数；　　(2) $f(x) - f(-x)$ 是奇函数.

自测题答案

一、1. D　2. B　3. C　4. B　5. D

二、1. 3　2. $f(-\pi) < f(3) < f(-2)$　3. $y = x$　4. 2π　5. $\arctan\sqrt{\ln x}$

三、1. (1) $(0.99, 1.01)$　(2) $(x_0, x_0+\varepsilon)$　(3) $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$

2. (1) $[-1, 1)$　(2) $(\pi, \pi+1) \cup (\pi+1, +\infty)$

3. $$f(x) = \begin{cases} 200x, & 0 \leqslant x \leqslant 500 \\ 200\times 500 + (200-17)\times(x-500), & 500 \leqslant x \leqslant 700 \\ 200\times 500 + (200-17)\times 200, & x > 700 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 200x, & 0 \leqslant x \leqslant 500 \\ 183x + 8500, & 500 \leqslant x \leqslant 700 \\ 136600, & x > 700 \end{cases}$$

4. (1) 奇函数　(2) 奇函数

5. (1) 有界　(2) 有界　(3) 无界　(4) 有界

6. $f^{-1}(x) = 10^{x-1} - 2$.　7. $\left[\dfrac{1}{3}, 1\right]$　8. (1) $\dfrac{3\pi}{4}$　(2) $\dfrac{\pi}{2}$　(3) $\dfrac{5\pi}{6}$　(4) $-\dfrac{\pi}{4}$

9. $\left[\frac{1}{e}, e\right]$　10. $\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1}$

11. (1) $y = 10^u$, $u = x^2$　(2) $y = \lg u$, $u = \cos v$, $v = \sqrt{x}$

(3) $y = \sqrt{u}$, $u = \arccos v$, $v = 2^x$

(4) $y = \frac{1}{u}$, $u = \lg v$, $v = w^3$, $w = \tan x$

四、1. 因为 $f(x+1) = x+1-[x+1] = x+1-[x]-1 = x-[x] = f(x)$,
所以 $f(x)$ 是周期函数,且其周期为 1.

2. (1) 设 $\varphi(x) = f(x)+f(-x)$,则 $\varphi(-x) = f(-x)+f(x) = \varphi(x)$,
所以 $f(x)+f(-x)$ 是偶函数.

(2) 设 $G(x) = f(x)-f(-x)$,则 $G(-x) = f(-x)-f(x) = -\varphi(x)$,
所以 $f(x)-f(-x)$ 是奇函数.

复习题一解答

一、单项选择题

1. 下列各对函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的是(**D**).

A. $f(x) = x\sqrt{x-1}, g(x) = \sqrt{x^4-x^2}$

B. $f(x) = \arcsin(\sin x), g(x) = x$

C. $f(x) = \lg x^2, g(x) = 2\lg x$

D. $f(x) = 1-\cos 2x, g(x) = 2\sin^2 x$

解　选 D

A 中 $f(x)$ 定义域是 $x \geqslant 1$,而 $g(x)$ 定义域是 $x \geqslant 1$ 或 $x \leqslant -1$;

B 中 $f(6) = \arcsin(\sin 6) = 6-2\pi$,而 $g(6) = 6$,故对应法则不同;

C 中 $f(x)$ 定义域是 $x \in (-\infty, +\infty)$,而 $g(x)$ 定义域是 $x > 0$;

D 中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域与对应法则均相同.

2. 若在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内,$f(x)$ 单调增,$g(x)$ 单调减,则 $f[g(x)]$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是(**B**).

A. 单调增　　B. 单调减

C. 非单调函数　　D. 单调增减性无法判定

解　选 B

当 x 递增时，$g(x)$ 递减，从而 $f[g(x)]$ 也递减，因此 $f[g(x)]$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调减函数.

3. $f(x)=\sin(x^2-x)$ 是（　**A**　）.

A. 有界函数　　B. 周期函数　　C. 奇函数　　D. 偶函数

解　选 A

由于 $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，所以 A 正确.

4. 函数 $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$ 是（　**B**　）.

A. 偶函数　　B. 奇函数　　C. 单调函数　　D. 有界函数

解　选 B

$\forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$，$f(-x)=\dfrac{1}{\arcsin(-x)}=-\dfrac{1}{\arcsin x}=-f(x)$，故 B 正确.

因为

$$f(-1)=\frac{1}{\arcsin(-1)}=-\frac{2}{\pi}<f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\arcsin\frac{1}{2}}=\frac{6}{\pi},$$

$$f(1)=\frac{1}{\arcsin 1}=\frac{2}{\pi}<f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\arcsin\frac{1}{2}}=\frac{6}{\pi}$$，故不选 C.

因为对 $\forall M>0$，取 $x_0=\sin\dfrac{1}{2M}$，就有 $f(x_0)=\dfrac{1}{\arcsin\left(\sin\frac{1}{2M}\right)}=2M>M$，故不选 D.

5. 下列函数为偶函数的是（　**C**　）.

A. $\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$　　B. $\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$

C. $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\geqslant 0\\ -x^3, & x<0\end{cases}$　　D. $f(x)=\dfrac{a^x}{a^x-1}-\dfrac{1}{2}$

解　选 C

对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\dfrac{a^{-x}-1}{a^{-x}+1}=\dfrac{1-a^x}{1+a^x}=-\dfrac{a^x-1}{a^x+1}$；

$$\lg(\sqrt{1+x^2}-x)=\lg\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}=-\lg(\sqrt{1+x^2}+x);$$

$$f(-x)=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 0\\ x^3, & x>0\end{cases}=f(x);$$

$$f(-x)=\frac{a^{-x}}{a^{-x}-1}-\frac{1}{2}=\frac{1+a^x}{2(1-a^x)}=-\left(\frac{a^x}{a^x-1}-\frac{1}{2}\right)$$，故选 C.

6. 若 $f(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{2}\right)^x, & x>0,\\ g(x), & x<0\end{cases}$ 为奇函数,则当 $x<0$ 时,$g(x)=$(**D**).

A. $\dfrac{1}{2^x}$　　B. $-\dfrac{1}{2^x}$　　C. 2^x　　D. -2^x

解　选 D

当 $x<0$ 时,$g(x)=f(x)=-f(-x)=-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-x}=-2^x$.

7. 若函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y)=f(x)+f(y)$,则 $f(x)$ 是(**A**).

A. 奇函数　　B. 偶函数

C. 非奇非偶函数　　D. 奇偶性不确定

解　选 A

令 $y=-x$,则有 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$,故 $f(x)$ 是奇函数.

8. 下列等式中,正确的是(**B**).

A. $\arcsin\dfrac{\pi}{5}+\arccos\dfrac{\pi}{5}=\dfrac{2}{5}\pi$　　B. $\arcsin\dfrac{\pi}{4}+\arccos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$

C. $\arcsin\dfrac{\pi}{6}+\arccos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$　　D. $\arcsin\dfrac{\pi}{3}+\arccos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$

解　选 B

因为当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$,故 A 和 C 不正确,而 $\dfrac{\pi}{3}>1$,故选 B.

9. 设函数 $y=f(x+1)$ 的定义域为 $[-1,1]$,则 $f(\arcsin x)$ 的定义域为(**B**).

A. $[-1,1]$　　B. $[0,1]$　　C. $[0,2]$　　D. $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

解　选 B

因为 $-1\leqslant x\leqslant 1\Rightarrow 0\leqslant x+1\leqslant 2$,故 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$. $f(\arcsin x)$ 的定义域为 $\{x\mid 0\leqslant\arcsin x\leqslant 2\}=[0,1]$.

10. 下列函数中,周期是 π,且在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上为增函数的是(**C**).

A. $y=\tan|x|$　　B. $y=\cot|x|$　　C. $y=|\tan x|$　　D. $y=|\cot x|$

解　选 C

A、B 显然不是周期函数,C、D 的周期是 π,但在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $y=|\tan x|$ 为增函数,而 $y=|\cot x|$ 是减函数。

11. 设函数 $y=2\arcsin(\cos x)$ 的定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right)$,则其值域是(**D**).