高等学校教材

高等数学

下册

赵洪牛 万彩云
胡国雷 王友国

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等学校教材

高 等 数 学

Gaodeng Shuxue

下 册

赵洪牛　万彩云
胡国雷　王友国

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是依据最新的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，结合多年的教学实践编写而成的。在编写过程中注重吸收国内外同类优秀教材的优点，突出微积分的基本思想和方法。在定理及公式论证上力求逻辑严谨，在内容编排上循序渐进，力求简明适用，在概念阐述上注重联系实际，深入浅出，在例题的选择上体现层次性、全面性、典型性。

全书分为上、下两册。下册包括多元函数微分学及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、复变函数与解析函数、复变函数的积分、复变函数级数与留数定理等内容。各章后还配备了本章小结和总习题，书末附习题参考答案与提示。

本书可作为普通高等学校工科类各专业本科生的高等数学课程教材，也可供其他相关专业师生使用。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/赵洪牛等编.—北京：高等教育出版社，2011.1

ISBN 978-7-04-031536-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第248004号

策划编辑 张长虹 **责任编辑** 张耀明 **封面设计** 王凌波
责任绘图 黄建英 **版式设计** 余 杨 **责任校对** 杨雪莲
责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	咨询电话	400-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
			http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
印 刷	北京东光印刷厂		http://www.landraco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2011年1月第1版
印 张	22.25	印 次	2011年1月第1次印刷
字 数	410 000	定 价	30.30元

物料号 31536-00

前　言

本书是由从事高等数学教学多年的教师，按照最新修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”，在编写过程中结合了近几年省级精品课程建设的教学实践，对教材的深度和广度及课程章节进行了适当的调整。同时，还注意吸收国内外优秀教材的优点，对内容的编排、例题的选择、习题的类型和数量进行了调整和充实，以帮助学生提高数学素养、培养创新意识、增强运用数学工具解决实际问题的能力。本书突出微积分的基本思想和方法，在定理及公式论证上力求逻辑严谨；在内容编排上循序渐进，力求简明、易懂、适用；在概念阐述上注意联系实际，深入浅出；在例题的选择上力求具有层次性、全面性、典型性。为了便于使用者复习，本书在每章之后都配备了本章小结，列出教学基本要求和内容提要，并配备了总习题。

本书下册由赵洪牛、万彩云、胡国雷、王友国撰写，最后由赵洪牛统一整理编写完成。

本书的编写工作在省级精品课程带头人刘颖范教授的指导下进行，我校高等数学教学中心的欧阳金丽、郦志新、张春跃、宋洪雪、严珍珍等老师也提出了不少建设性的意见，南京邮电大学教务处、理学院对本书编写给予很大的支持，在此表示衷心感谢。

限于编者水平，书中仍有诸多不足之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010 年 6 月

目　　录

第 7 章　多元函数微分学及其应用

在上册中,我们讨论了一元函数微积分及其应用,在自然科学与很多实际问题中常常会遇到一个变量依赖于多个自变量的情形,反映到数学上,就是多元函数的问题.从本章开始我们讨论多元函数的微积分及其应用.本章在一元函数微分学的基础上,先讨论多元函数的极限与连续性,再讨论多元函数的偏导数与全微分,重点讨论多元函数求导计算以及多元函数微分在几何与求极值方面的应用.

7.1　多元函数的概念

7.1.1　平面点集的有关概念

1. 邻域

设 P_0, P 是平面 xOy 上的两点,δ 是某一正数,集合

$$U(P_0,\delta) = \{P \mid |P_0P| < \delta\}$$

称为点 P_0 的 **δ 邻域**.若不计较半径的大小,点 P_0 的邻域记为 $U(P_0)$.集合 $\{P \mid 0 < |P_0P| < \delta\}$ 称为点 P_0 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

2. 区域

设平面点集 E,若存在点 P 的某邻域 $U(P) \subset E$,则称点 P 为点集 E 的**内点**;若点 P 的任一邻域中既有 E 中的点,又有不属于 E 的点,则称点 P 为点集 E 的**边界点**.点集 E 的边界点的全体称为 E 的**边界**(如图 7.1).

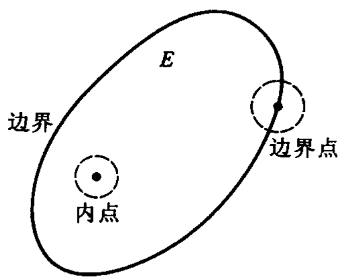

图 7.1

若点集 E 中的点均为 E 的内点,则称 E 为**开集**.例如,点集 $E_1 = \{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 中的每个点都是 E_1 的内点,因此点集 E_1 为开集,E_1 的边界是点$(0,0)$及圆周 $x^2 + y^2 = 1$.

若点集 E 中的任意两点都可用全部包含在 E 内的折线连接起来,则称 E 为**连通**的.连通的开集称为**开区域**,简称**区域**.如上例 E_1 是开区域.一个区域 E 与其边界的并,称为**闭区域**,记为 $\bar{E}$.如 $\bar{E}_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

对点集 E,若存在实数 $M>0$ 及定点 P_0,使得对任意 $P\in E$,恒有 $|P_0P|<M$,则称 E 为**有界点集**. 否则称为**无界点集**. 例如,上例中的 $\bar{E}_1$ 为有界闭区域,$E_2=\{(x,y)\mid xy>0\}$ 为无界开集.

3. 聚点

设平面点集 E,若点 P 的任一去心邻域内总有 E 中的点,则称 P 为 E 的**聚点**. 显然 E 的内点都是 E 的聚点. 此外,E 的边界点也可能是 E 的聚点,如点(0,0)是 E_1 的聚点,且这个聚点不属于 E_1.

如果 P 是 E 的聚点,则在 E 中有互不相同的点列 $\{P_n\}$,当 $n\to+\infty$ 时,$P_n\to P$,因此聚点也称为**极限点**.

4. n 维空间 $\mathbf{R}^n$

设 n 为一取定的自然数,称 n 元有序数组 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$(其中 $x_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n$)的全体为 **$n$ 维空间**,记为 $\mathbf{R}^n$. $\mathbf{R}^n$ 中的每个元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 称为 n 维空间中的一个**点**,数 x_i 称为该点的**第 i 个坐标**. 特别地,当 $n=3$ 时,$\mathbf{R}^3=\{(x_1,x_2,x_3)\mid x_i\in\mathbf{R},i=1,2,3\}$ 即为三维几何空间在直角坐标系下的解析表示.

$\mathbf{R}^n$ 中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 之间的距离定义为

$$|PQ|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}.$$

在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中,以"距离"为基础,定义点 P 的邻域为

$$U(P,\delta)=\{Q\,\big|\,|PQ|<\delta,Q\in\mathbf{R}^n\},$$

进而可以定义 $\mathbf{R}^n$ 中的点集的内点、边界点、区域等一系列概念.

7.1.2 多元函数的概念

在空间解析几何中,平面 $z=1-x-y$,上半球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$,旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 等曲面方程,变量 z 的值随变量 x,y 的取值而唯一确定.

定义 7.1.1 设 D 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个非空子集,$\mathbf{R}$ 为实数集,若 f 为 D 到 $\mathbf{R}$ 的一个映射,即对于 D 中的每一个点 $P(x,y)$,在 $\mathbf{R}$ 中存在唯一确定的实数 z 通过 f 与之相对应,则称 f 为定义在 D 上的二元函数,记为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D.$$

其中 x,y 称为**自变量**,z 称为**因变量**,D 称为 f 的**定义域**,$f(D)=\{z\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$ 称为 f 的**值域**.

一般地,将平面上的点集 D 改为 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的点集 D,则可定义 **n 元函数**

$$u=f(x_1,x_2,\cdots x_n).$$

若记点 $P(x_1,x_2,\cdots x_n)\in D\subseteq\mathbf{R}^n$,$n$ 元函数可简记为 $u=f(P)$. 当 $n\geqslant2$ 时,n 元函数统称为**多元函数**.

关于多元函数的定义域,若不考虑函数表达式中变量所表示的实际意义,就以使函数有确定值的自变量的点集为该函数的定义域. 如函数 $u=\ln(1-x^2-y^2)$ 的定义域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$.

对二元函数

$$z=f(x,y),(x,y)\in D,$$

在空间直角坐标系 $O\text{-}xyz$ 中(如图 7.2),使集合 D 位于坐标面 xOy 上,D 中任意点 $P(x,y)$ 对应于空间一点 $M(x,y,f(x,y))$,当 P 取遍 D 时,点 M 的全体构成一曲面,称此曲面为函数 $z=f(x,y)$ 的图形.

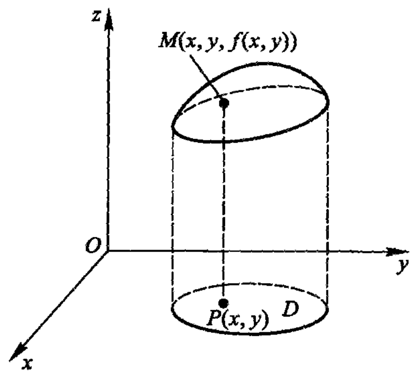

图 7.2

例 1 作出下列函数的图形:

(1) $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$; (2) $z=1-x^2$.

解 如图 7.3(1),(2),函数 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 的图形为锥面,函数 $z=1-x^2$ 的图形为抛物柱面.

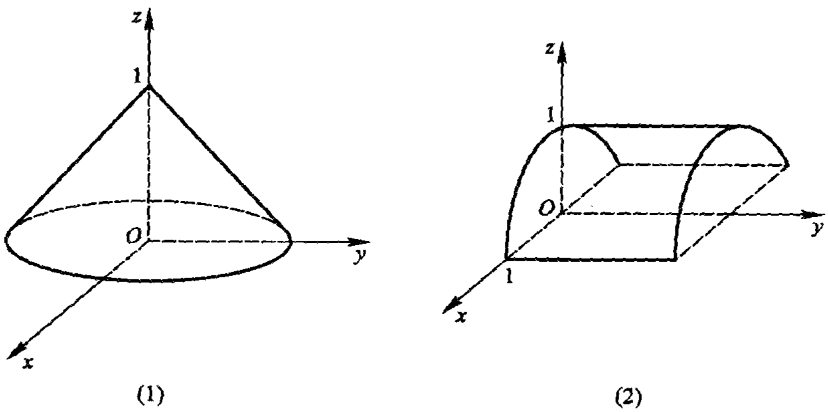

图 7.3

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y,z)=\sqrt{z-\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}$；

(2) $g(x,y,z)=\sqrt{z}\arcsin\dfrac{x^2+y^2}{4}+\sqrt{x^2+y^2-z}$.

解 (1) 由$\begin{cases}z-\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0,\\ 2-(x^2+y^2+z^2)\geqslant 0\end{cases}$ 可得函数 $f(x,y,z)$ 的定义域为

$$D_f=\left\{(x,y,z)\left|\begin{array}{c}\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant\sqrt{2-x^2-y^2},\\ -\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},\\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{array}\right.\right\}.$$

(2) 由$\begin{cases}z\geqslant 0,\\ \dfrac{x^2+y^2}{4}\leqslant 1,\\ x^2+y^2-z\geqslant 0\end{cases}$ 可得函数 $g(x,y,z)$ 的定义域为

$$D_g=\left\{(x,y,z)\left|\begin{array}{c}0\leqslant z\leqslant x^2+y^2,\\ -\sqrt{4-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{4-x^2},\\ -2\leqslant x\leqslant 2\end{array}\right.\right\}.$$

7.1.3 多元函数的极限

首先讨论二元函数 $z=f(x,y)$ 当点 $P(x,y)\to P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，这里 $P\to P_0$ 表示点 P 以任何方式趋于点 P_0，即 P 与 P_0 之间的距离趋于零（$|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\to 0$）. 如果在 $P\to P_0$ 的过程中，其对应的函数值 $f(x,y)$ 无限接近于某一确定的常数 A，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限. 下面用 “$\varepsilon-\delta$”语言描述这个概念.

定义 7.1.2 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 若存在常数 A，使得 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $P(x,y)\in D\cap\mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，恒有

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x,y)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A,\quad 或\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=A,\quad 或\quad \lim_{P\to P_0}f(P).$$

为区别于一元函数的极限，将二元函数的极限称为**二重极限**.

以上二元函数的极限概念，可相应地推广到 n 元函数 $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的 **n 重极限**.

例 3 讨论下列二元函数的极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 是否存在：

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$;　　　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$.

解 (1) 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}.$$

由此可见,当点 $P(x,y)$ 沿不同直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时,$f(x,y)$ 随 k 的变化而趋于不同的值,因此 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

(2) 当点 $P(x,y)$ 沿直线 $x=ky$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{ky^3}{k^2y^2+y^4}=0;$$

但若点 $P(x,y)$ 沿曲线 $x=y^2$ 趋于点 $(0,0)$ 时,有

$$\lim_{x=y^2\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^4+y^4}=\frac{1}{2}.$$

所以,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ 不存在.

例 4 利用定义证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$.

证明 对任意 $\varepsilon>0$,要使

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon,$$

只要取 $\delta=\varepsilon$,则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,恒有

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|<|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon.$$

由定义可知 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$.

关于例 3,例 4 所讨论的这类二元函数的二重极限,我们有如下结论:

定理 7.1.1 设 p,q,m,n 为正整数,则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^py^q}{x^m+y^n}$ 存在的充分必要条件是 m,n 为偶数,且 $\dfrac{p}{m}+\dfrac{q}{n}>1$.

证明从略,读者可查阅本书参考文献[1].

由于多元函数极限的定义与一元函数极限的定义类似,因此一元函数极限的性质及运算法则也可相应地推广到多元函数的极限.

例 5　计算：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{\sin xy}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解　(1) 令 $xy=t$，则

$$\text{原式}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin xy}{xy}\cdot y=\lim_{\substack{t\to 0\\ y\to 1}}\frac{\sin t}{t}\cdot y=1.$$

(2) 当 x,y 充分大时，有

$$0<\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2},$$

而 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2}=0$，由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}=0.$$

7.1.4　多元函数的连续性

有了多元函数极限的概念，就很容易建立多元函数连续性的概念.

1. 多元函数的连续性

定义 7.1.3　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，且 $P_0\in D$. 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 $z=f(x,y)$ **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **处连续**.

如果函数 $f(x,y)$ 在开区域（或闭区域）D 内的每一点处都连续，则称 $f(x,y)$ **在 D 内连续**，或称 $f(x,y)$ 是 **D 内的连续函数**.

关于二元函数 $f(x,y)$ 的连续性概念，可相应地推广到 n 元函数 $f(P)$ 在一点 P_0 处连续.

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的定义域 D 的聚点，若 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处不连续，则称点 $P_0(x_0,y_0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的**间断点**. 例如，点 $(0,0)$ 是函数 $z=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ 的间断点；函数 $z=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$ 间断点的全体为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$.

与一元函数类似，多元连续函数的和、差、积、商（分母不等于零）也是连续函数，连续函数的复合函数也是连续函数.

2. 多元初等函数的连续性

与一元初等函数类似，**多元初等函数**是指由常数及基本初等函数经过有限次四则运算与复合运算得到的能用一个式子表示的函数. 如 $\dfrac{x-y}{1+x^2}$，$\sin(x+y)$，