

21 世纪高等院校经典教材同步辅导  
ERSHIYISHIJIGAODENGYUANXIAOJINGDIANJIAOCAITONGBUFUDAO

# 量子力学教程

第二版

## 全程导学及习题全解

段 辰 李榜全 苗明川 编 张志勇 主审

 中国时代经济出版社

# 量子力学教程

第二版

全程导学及习题全解

图书在版编目(CIP)数据

量子力学教程(第二版)全程导学及习题全解 / 段辰, 李榜全, 苗明川编.  
—北京: 中国时代经济出版社, 2011.9  
(21世纪高等院校经典教材同步辅导)  
ISBN 978-7-5119-0949-7

I. ①量… II. ①段… ②李… ③苗… III. ①量子力学—  
高等学校—教学参考资料 IV. ①O413.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 149234 号

书 名: 量子力学教程(第二版)全程导学及习题全解

出 版 人: 王鸿津

作 者: 段 辰 李榜全 苗明川

出版发行: 中国时代经济出版社

社 址: 北京市丰台区玉林里 25 号楼

邮政编码: 100078

发行热线: (010)83910219

传 真: (010)68320584

邮购热线: (010)88361317

网 址: [www.cmepub.com.cn](http://www.cmepub.com.cn)

电子邮箱: [zgsdjj@hotmail.com](mailto:zgsdjj@hotmail.com)

经 销: 各地新华书店

印 刷: 北京市优美印刷有限责任公司

开 本: 787×1092 1/16

字 数: 120 千字

印 张: 10.625

版 次: 2011 年 9 月第 1 版

印 次: 2011 年 9 月第 1 次印刷

书 号: ISBN 978-7-5119-0949-7

定 价: 18.60 元

本书如有破损、缺页、装订错误,请与本社发行部联系更换

版权所有 侵权必究

# 内容简介

本书是根据高等教育出版社出版、周世勋先生编著的《量子力学教程》(第二版)编写的配套的参考书。《习题全解指导》按照《量子力学教程》各章节顺序对教材中所给的习题进行了详细的解答。较好的方便了读者掌握各章知识要点和基本解题方法。每章均分为知识重点,习题全解,补充题和内容小结。小结将《量子力学教程》中主要概念、理论、公式加以归纳总结。补充题则是对原书中习题的补充和提高。习题全解是本书的重点,按原教科书所列习题进行详细求解和证明。对其中部分习题还给出了多种解法或是不同的集体思路。另外本书在原《量子力学教程》基础上增加了附录,为复习量子力学提供参考,以便读者更好地学习。

本书可作为广大理工科院校或是相关从业人员的参考书,亦可帮助报考研究生进行复习备考,或作为相关教学人员的教学参考书。

# 前 言

量子力学作为“四大力学”之一,是物理学中一门重要的基础理论课程。它是研究微观粒子的运动规律的物理学分支学科,它主要研究原子、分子、凝聚态物质,以及原子核和基本粒子的结构、性质的基础理论,它与相对论一起构成了现代物理学的理论基础。量子力学的基本原理包括量子态的概念,运动方程、理论概念和观测物理量之间的对应规则和物理原理。鉴于该学科的重要性,国内高校的物理类专业及某些工科类专业均开设了量子力学课程。但是随着近年来专业范围的拓宽,原有基础理论课程学时逐渐减少,习题的数量及难度也相应的降低。为此我们希望编写这本《量子力学教程解题指导》来帮助同学更好地掌握、理解基本理论并掌握相关问题的分析和处理方法,以解决同学们在解题过程中所碰到的问题。

本书与周世勋先生编著的《量子力学教程》(第二版)相配套。全书由绪论、波函数和薛定谔方程、量子力学中的力学量、态和力学量的表象、微扰理论、散射、自旋与全同粒子、量子力学若干进展等章组成。

本辅导教材根据《量子力学教程》中的内容,编写以下几方面的内容:知识重点归纳:精练了各章中的主要知识点,理清各知识点之间的脉络联系,囊括了主要定理及相关推论和重要公式等,帮助读者迅速了解本章重要知识点,系统理解各章的体系结构,奠定扎实的理论基础。习题全解:依据教材各章节的习题,进行详尽的解答。考虑到不同层次读者的需求,在解答过程中,对于重点和难点习题进行了分析和讲解,归纳解题技巧。为了给读者拓展视野,本书每章后增加了大量补充题。这些题选自不同参考资料(见附录),有些补充题中存在不同的瑕疵,但为尊重原题,我们保持原有特点,未对其进行修改,仅供读者参考。本书在原《量子力学教程》基础上增加了附录,为复习量子力学提供参考,以便读者更好地学习。

本书由段辰、李榜全、苗明川等编写。全书由张志勇教授主审。张志勇老师高深的学术造诣,严谨的治学态度,使编者受益匪浅,在此深表感谢。本书编写过程中得到林一强、王天磊等给予大力支持和帮助,同时还得到中国时代经济出版社的领导和有关编辑的大力支持,编者深表谢意。

对《量子力学教程》(第二版)教材的作者周世勋、陈灏教授,表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,加之时间仓促,本书难免有缺点和疏漏,存在不妥之处,敬请各位专家及广大读者批评指正。

编 者  
2011年8月

# 目 录

<b>第一章 绪 论</b> .....	1
本章重点内容 .....	1
本章知识重点 .....	1
习题全解 .....	2
补充题解析 .....	7
本章内容小结 .....	9
<b>第二章 波函数和薛定谔方程</b> .....	11
本章重点内容 .....	11
本章知识重点 .....	11
习题全解 .....	14
补充题解析 .....	21
本章内容小结 .....	39
<b>第三章 量子力学中的力学量</b> .....	41
本章重点内容 .....	41
本章知识重点 .....	41
习题全解 .....	44
补充题解析 .....	56
本章内容小结 .....	63
<b>第四章 态和力学量的表象</b> .....	66
本章重点内容 .....	66
本章知识重点 .....	66
习题全解 .....	68
补充题解析 .....	76
本章内容小结 .....	88

<b>第五章 微扰理论</b> .....	91
本章重点内容.....	91
本章知识重点.....	91
习题全解.....	92
补充题解析.....	98
本章内容小结 .....	108
<b>第六章 散 射</b> .....	110
本章重点内容 .....	110
本章知识重点 .....	110
习题全解 .....	112
补充题解析 .....	116
本章内容小结 .....	118
<b>第七章 自旋与全同粒子</b> .....	119
本章重点内容 .....	119
本章知识重点 .....	119
习题全解 .....	122
补充题解析 .....	131
本章内容小结 .....	148
<b>第八章 量子力学若干进展</b> .....	151
本章重点内容 .....	151
本章知识重点 .....	151
<b>附录 A 常用物理常数</b> .....	152
<b>附录 B 常用数学公式</b> .....	153
<b>附录 C 量子力学大事年表</b> .....	160
<b>附录 D 参考文献</b> .....	161

# 第一章 绪 论

## 本章重点内容

- Planck 黑体辐射理论
- Einstein 光量子理论
- Bohr 旧量子论
- De Broglie 物质波
- 波粒二象性

## 本章知识重点

### 1. Planck 黑体辐射公式

为解决黑体辐射谱问题,1900年 Planck 提出 Planck 公式

$$\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

并提出了相应的物理解释,即对一定频率  $\nu$  的辐射,物体只能以  $h\nu$  为单位吸收或发射能量, $h$  即普朗克常量, $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{S}$

### 2. Einstein 光量子假说

为解释光电效应,1905年,Einstein 提出了光量子假说,认为光由光量子组成,每个光量子的能量  $\epsilon = h\nu$ ,动量  $p = \hbar k$ ,并得到 Einstein 光电效应方程  $h\nu = \frac{1}{2}m_e v_m^2 + W_0$ 。

可圆满地解释光电效应。

### 3. Bohr 旧量子论

1913年,Bohr 为解决 Rutherford 原子模型稳定性问题提出了原子的量子理论

(1) 定态的概念

(2) 定态间跃迁

(3) 角动量子化,后来 Sommerfeld 在此基础上提出 Sommerfeld 量子化条件

$$\oint p dq = \left(n + \frac{1}{2}\right)h, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

其中  $q$  是粒子的广义坐标, $p$  是粒子的广义动量

这一理论成功地解释了氢原子光谱的实验规律。但也存在许多不足,如无法解释氦原子及更复杂的原子结构等。

#### 4. De Broglie 物质波

$$\psi = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}-Et)}$$

1923年 De Broglie 将光的波粒二象性,推广到一切微观粒子,认为微观粒子也具有波动性,即满足 De Broglie 关系

$$E = \hbar\omega = h\nu \quad \mathbf{p} = \hbar\mathbf{k} = \frac{h}{\lambda}\mathbf{n}$$

这一理论为后来的电子衍射实验,电子双缝干涉实验,中子衍射等实验所证实。

#### 5. 物质的波粒二象性

由 De Broglie 关系出发描述物质粒子性与波动性的两组力学量通过 Planck 常量相互联系,波粒二象性是微观粒子的基本属性,这一结论被以后的诸多实验所证实。

## 习题全解

1.1 由黑体辐射公式导出维恩位移定律:能量密度极大值所对应的波长  $\lambda_m$  与温度  $T$  成反比,即

$$\lambda_m T = b(\text{常量});$$

并近似计算  $b$  的数值,准确到二位有效数字。

[证明] 由普朗克黑体辐射公式(以频率为变量)

$$\rho(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} d\nu \quad (1)$$

及波长频率间关系  $\nu = \frac{c}{\lambda}$

即  $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$  代入(1)得

以波长为变量的普朗克公式

$$\rho(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1} d\lambda \quad (2)$$

对波长  $\lambda$  求导数

$$\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}$$

$$\left[ -5 + \frac{hc}{\lambda k_B T} \frac{1}{1 - \exp(-hc/\lambda k_B T)} \right]$$

由  $\frac{d\rho(\lambda)}{d\lambda} = 0$  得

$$5[1 - \exp(-hc/\lambda k_B T)] = hc/\lambda k_B T$$

令  $x = hc/\lambda k_B T$ , 则

$$5(1 - e^{-x}) = x \quad (3)$$

这是个超越方程, 可以用数值方法或图解法

得到  $x = 4.97$

$$\text{即 } \frac{hc}{\lambda_m k_B T} = 4.97$$

$$\text{得 } \lambda_m T = \frac{hc}{4.97 k_B}$$

代入  $h, k_B, c$  的数值得

$$\lambda_m T = 2.9 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K} \quad (4)$$

即 Wien 位移定律。它的物理意义是若物体温度升高, 则辐射能量峰向短波长(或高频)移动

[说明] 本题主要考查 Planck 公式的推论

1.2' 在 0K 附近, 钠的价电子能量约为 3 电子伏, 求其德布罗意波长。

[解] 由德布罗意关系

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (1)$$

由相对论动量与能量关系

$$E^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4 \quad (2)$$

$$\text{得 } p = \sqrt{\frac{E^2}{c^2} - m_e^2 c^2}$$

电子  $m_e c^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$

0K 附近电子德布罗意波长

$$\lambda = hc / \sqrt{E^2 - (m_e c^2)^2} \quad (3)$$

其中  $hc = 1.24 \times 10^{-6} \text{ eV} \cdot \text{m}$

$E = 3 \text{ eV} + m_e c^2$  (这里认为价电子能量即动能)

$m_e c^2 = 0.511 \times 10^6 \text{ eV}$

得  $\lambda = 0.71 \text{ nm}$

我们也可以把(3)式写成

$$\lambda = hc / \sqrt{(E_k + m_e c^2)^2 - (m_e c^2)^2} = hc / \sqrt{E_k^2 + 2E_k m_e c^2}$$

由于  $E_k \ll m_e c^2$

$$\lambda \approx hc / \sqrt{2E_k m_e c^2} \quad (4)$$

由此式  $\left\{ \begin{array}{l} \text{当粒子质量越大则波长越短, 波动性越弱} \\ \text{当粒子动能越大则波长越短, 波动性越弱} \end{array} \right.$

因此宏观物体或者高能粒子的粒子性较强。

[说明] 本题主要考查物质波, 注意要区分相对论粒子与非相对论粒子

1.3 氦原子的动能是  $E = \frac{3}{2}k_B T$  ( $k_B$  为玻耳兹曼常数), 求  $T = 1\text{K}$  时, 氦原子的德布罗意波长。

[解] 同上题, 对于 He 原子可以认为是非相对性粒子

$$\text{因此 } p = \sqrt{2mE_k} \quad (1)$$

$$\text{由德布罗意关系 } \lambda = \frac{h}{p} \text{ 及 } E_k = \frac{3}{2}k_B T$$

$$\text{得 } \lambda = \frac{h}{\sqrt{3k_B T m}} \quad (2)$$

$$\text{代入数值 } \lambda = 0.37\text{nm} \quad (3)$$

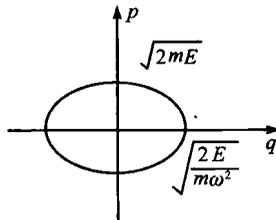
(2) 式说明体系温度越低粒子波动性越强

1.4 利用玻尔-索末菲的量子化条件, 求:

(1) 一维谐振子的能量;

(2) 在均匀磁场中作圆周运动的电子轨道的可能半径。

已知外磁场  $H = 10$  特斯拉, 玻尔磁子  $M_B = 9 \times 10^{-24}$  焦耳/特斯拉, 试计算动能的量子化间隔  $\Delta E$ , 并与  $T = 4\text{K}$  及  $T = 100\text{K}$  的热运动能量相比较。



解图 1-4(a)

[解] (1)[解法一]

$$\text{一维谐振子能量 } E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kq^2 \quad (1)$$

在相空间中轨迹是椭圆

$$\frac{p^2}{(\sqrt{2mE})^2} + \frac{q^2}{(\sqrt{\frac{2E}{k}})^2} = 1$$

$$\text{两半轴 } a = \sqrt{2mE} \quad b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \text{ (其中 } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{)}$$

$$\text{Sommerfeld 条件 } \oint pdq = nh \quad (2)$$

上式左边即相空间中椭圆面积  $\pi ab$

$$\text{故 } \pi \sqrt{2mE} \cdot \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} = nh, n = 1, 2, \dots$$

$$\text{求得 } E = nh\omega/2\pi = nh\nu = n\hbar\omega \quad (3)$$

此式说明能量是等间隔分布的量子化能级。后来严格的量子力学给出了更准确结果

$$E = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

并预言存在零点能  $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$

[解法 2] 一维谐振子方程

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2q = 0 \quad (1)$$

$$\text{通解 } q = A\sin(\omega t + \psi) \quad (2)$$

$$\text{广义动量 } p = m \frac{dq}{dt} = Am\omega \cos(\omega t + \psi)$$

$$\begin{aligned} \text{因此 } \oint pdq &= A^2\omega^2m \int_0^T \cos^2(\omega t + \psi) dt \quad (3) \\ &= \frac{1}{2}A^2\omega^2m \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\psi)] dt \\ &= \frac{1}{2}A^2\omega^2mT \end{aligned}$$

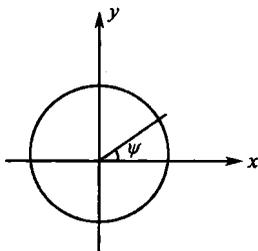
后一项余弦函数周期为  $\frac{T}{2}$ , 因此在  $0 \sim T$  积分为零

由 Sommerfeld 量子化条件  $\oint pdq = nh \quad (n = 1, 2, \dots)$

$$\text{得 } \frac{1}{2}A^2\omega^2mT = nh \quad (4)$$

$$\text{对于谐振子能量 } E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

$$\text{因此 } E = \frac{nh}{T} = nh\nu = n\hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$



解图 1-4(b)

(2) 电子在匀强磁场中作匀速圆周运动时洛仑兹力提供向心力, 即

$$m \frac{v^2}{R} = evB \quad (6)$$

$$\text{求出半径 } R = \frac{mv}{Be} \quad (7)$$

我们以角度  $\psi$  作为广义坐标求广义动量  $p_\psi$

$$\text{拉格朗日函数 } L = T - V = T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(R\dot{\psi})^2$$

$$\text{因此广义动量 } p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = mR^2\dot{\psi} = mRv = BeR^2$$

由 Sommerfeld 量子化条件, 把  $p_\psi, \psi$  代入

$$\oint p_\psi d\psi = nh \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{得 } \oint p_\psi d\psi = \int_0^{2\pi} p_\psi d\psi = \int_0^{2\pi} eBR^2 d\psi = 2\pi eBR^2 = nh$$

$$\text{即 } R = \sqrt{\frac{n\hbar}{eB}}, n = 1, 2, \dots \quad (8)$$

下面求动能, 把(7)式代入下式

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{BeR}{m}\right)^2 = \frac{B^2 e^2 R^2}{2m}$$

把(8)式代入上式有

$$E_k = \frac{n\hbar eB}{2m} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

又玻尔磁子  $M_B = \frac{e\hbar}{2m}$  得

$$E_k = nBM_B \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

$$\text{能级间隔为 } \Delta E = BM_B = 9 \times 10^{-23} \text{ J} \quad (5)$$

$$\text{能量均分定理 } E = \frac{n}{2}kT \quad (\text{热运动能量, } n \text{ 为自由度}) \quad (6)$$

这里是平面运动取  $n = 2$

所以  $E = kT$  利用  $k$  的数值  $1.38 \times 10^{-23}$ , 求出

$T = 4\text{K}$  时  $E = 5.52 \times 10^{-23} \text{ J}$  小于能级间隔  $\Delta E$

$T = 100\text{K}$  时  $E = 1.38 \times 10^{-21} \text{ J}$  大于能级间隔  $\Delta E$

[说明] 本题主要是准经典 Sommerfeld 关系的应用

1.5 两个光子在一定条件下可以转化为正负电子对。如果两光子的能量相等, 问要实现这种转化, 光子的波长最大是多少?

[解] 反应  $\gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^-$  转化条件  $h\nu \geq m_e c^2$

对心碰撞时能量最小, 即波长最长

$$\text{由 } h\nu = \frac{hc}{\lambda} = m_e c^2 \text{ 得}$$

$$\lambda = \frac{h}{m_e c} = \frac{6.626 \times 10^{-34}}{9.1 \times 10^{-31} \times 3 \times 10^8} m = 2.4 \times 10^{-3} mm$$

这里数值即电子的 Compton 波长  $0.024 \text{ \AA}$

[说明] 本题涉及物质波与质能关系

## 补充题解析

**补充题 1-1** 质量  $m$  的粒子在宽  $a$  的一维无限深势阱中运动。利用 de Broglie 驻波条件, 求能量可能取值

[解] 驻波条件在本题中为  $a = \frac{n}{2} \lambda (n = 1, 2, 3 \dots)$

$$\text{而粒子动量大小 } p = \frac{h}{\lambda} = \frac{n\pi\hbar}{a}$$

$$\text{粒子能量 } E = T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2} (n = 1, 2, 3 \dots)$$

**补充题 1-2** 用 Sommerfeld 条件求解上题

[解] 设某一时刻粒子从  $x = 0$  出发到  $x = a$  碰墙后原速返回,  $x = 0$  处形成一个周期运动

由 Sommerfeld 条件得

$$nh = \int_0^a p dx - \int_0^a (-p) dx = 2ap$$

$$\text{于是 } p = \frac{n\hbar}{a}$$

$$\text{能量 } E = T = \frac{p^2}{2m} = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

**补充题 1-3** 利用不确定关系估算一维谐振子基态能量

[解] 一维谐振子能量  $\bar{E} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \bar{x}^2$

由于对称性  $\bar{x} = 0$   $\bar{p} = 0$

$$\text{由此 } \overline{(\Delta x)^2} = \overline{(x - \bar{x})^2} = \overline{x^2}$$

$$\overline{(\Delta p)^2} = \overline{(p - \bar{p})^2} = \overline{p^2}$$

$$\text{由此 } \bar{E} = \frac{\overline{(\Delta p)^2}}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \overline{(\Delta x)^2}$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{\overline{(\Delta p)^2}}{2m} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2 \overline{(\Delta x)^2}} = \omega \sqrt{\overline{(\Delta p)^2} \overline{(\Delta x)^2}}$$

$$\text{按不确定关系 } \overline{(\Delta p)^2} \overline{(\Delta x)^2} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\text{因此 } \bar{E} \geq \frac{1}{2} \hbar \omega$$

$$\text{基态能量 } E_0 \approx \frac{1}{2} \hbar \omega$$

补充题 1-4 正电子  $e^+$  与电子  $e^-$  在库仑作用下形成束缚体系称电子偶素, 试用 Bohr 理论计算从  $n = 2$  跃迁到  $n = 1$  所发射谱线波长

[解] Bohr 理论能级公式

$$E_n = \frac{E_0}{n^2}$$

$$\text{其中 } E_0 = - \left( \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{mZ^2}{2\hbar^2}$$

$$\text{折合质量 } m = \frac{1}{2} m_e, Z = 1$$

$$\text{因此 } E_0 = -13.6\text{eV}/2 = -6.8\text{eV}$$

$$E_n = -\frac{6.8\text{eV}}{n^2}$$

$$E_2 = E_0/4 = -1.7\text{eV}$$

$$E_1 = E_0 = -6.8\text{eV}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi\hbar c}{E_2 - E_1} = 243\text{nm}$$

补充题 1-5 电子在半径  $R$ , 总电荷  $Ze$ , 均匀带电球内运动, 球心电势分布  $\varphi(r) = \frac{2e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} \right)$ 。试用 Bohr 理论求能级分布

[解] 体系动能  $T = \frac{p^2}{2m}$

$$\text{按玻尔量子化条件 } p = mv = \frac{n\hbar}{r} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{因此 } T = \frac{n^2 \hbar^2}{2m r^2} \text{ 而 } V = -e\varphi(r)$$

$$\text{总能量 } E = \frac{n^2 \hbar^2}{2m r^2} - \frac{2e^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2)$$

$$\text{由稳定条件 } \frac{dE}{dr} = 0 \text{ 求出 } r_0^4 = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2 R^3}{2e^2 m}, n = 1, 2, \dots, n_{\max}$$

代回能量表达式得

$$E_n = \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0}{2mR}} \frac{n\hbar}{e} - \frac{3}{2} \right]$$

补充题 1-6 由 Planck 定律推导 Stefan 定律

[解]  $\int_0^\infty \rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^3}{c^3} \frac{h d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$

$$\text{令 } x = h\nu/k_B T$$

$$\omega = \frac{k_B^4 T^4}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$$

$$\text{积分} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$\text{因此 } W = \left( \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 \hbar^3} \right) T^4$$

$$\text{于是 } \sigma = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^3 \hbar^3} = 5.67051 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

## 本章内容小结

表 1-1 Planck 黑体辐射理论

背景	黑体辐射曲线 Stefan 定律 Wien 定律
假设	黑体辐射的能量为 $\epsilon = nh\nu (n = 1, 2, \dots)$
结论	Planck 公式 $\rho_\nu d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \cdot \frac{d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$
推论	Wien 定律 Stefan 定律 高温区化为经典 Rayleigh-Jeans 公式

表 1-2 Einstein 光量子理论

背景	光电效应实验
假设	光量子假设 $\epsilon = h\nu$
结论	Einstein 方程 $\frac{1}{2} m\nu^2 = h\nu - W_0^*$
推论	光电效应实验现象

表 1-3 Bohr 旧量子论

背景	氢原子能级与线状光谱
----	------------

\*  $W_0$  称为金属的逸出功, 即使电子脱离金属表面所需最小能量

假设 1 原子具有不连续的能量定态满足  $\oint p dq = nh (n = 1, 2, \dots)$

假设 2 不同定态之间可以发生跃迁 频率满足  $\nu = \frac{E' - E}{h}$

结论 推导出了氢原子光谱公式以及氢原子基态半径

缺陷 无法解释原子的精细结构、无法定量计算谱线强度

表 1-4 De Broglie 物质波

背景	光的波粒二象性能否一般化?
结论	物质具有波粒二象性
推论	De Broglie 关系 $E = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda}$

表 1-5 证实物质波粒二象性的重要实验

年代	实验	结论
1887	Hertz 光电效应实验	光的粒子性
1923	Compton 效应实验	光的粒子性
1927	电子衍射实验	实物粒子的波动性
1961	电子双缝衍射实验	实物粒子的波动性