金榜

全国十二大考研辅导机构指定用书

2011李永乐考研数学系列之三

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100 TI (SHUXUEYI)

主编 李永乐

百道题目，精心设计　　考点难点，全面覆盖

名师讲解，细致入微　　金榜考研，全程协力

破解数学难题的迷雾　　避免题海战术的盲目

高效提升综合解题能力

坚定信心决胜2011考场

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

全国十二大考研辅导机构指定用书

2011李永乐考研数学系列之三

数学全程预测100题

数学一

SHUXUE QUANCHENG YUCE 100 TI (SHUXUEYI)

主编 李永乐

编者：北京理工大学 王式安
北京大学 刘西垣
北京大学 李正元
清华大学 李永乐
北京交通大学 赵达夫
(按姓氏笔画排序)

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学全程预测100题.1/李永乐主编.—西安:西安交通大学出版社,2010.7
ISBN 978-7-5605-3620-0

Ⅰ.①数… Ⅱ.①李… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—习题 Ⅳ.①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第128162号

敬告读者

本书封面粘有专用防伪标识,凡有防伪标识的为正版图书,敬请读者识别。

数学全程预测100题(数学一)

主　　编:李永乐
策　　划:张伟　陈丽
责任编辑:邹林　田华
装帧设计:金榜图文设计室
出版发行:西安交通大学出版社
地　　址:西安市兴庆南路10号(邮编:710049)
电　　话:(029)82668315　82669096(总编办)
　　　　　(029)82668357　82667874(发行部)
印　　刷:保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本:787mm×1092mm　1/16
印　　张:7.5
字　　数:177千字
版　　次:2010年8月第1版
印　　次:2010年8月第1次印刷
书　　号:978-7-5605-3620-0/O·341
定　　价:12.00元

图书如有印装质量问题,请与印刷厂联系调换　　电话:(010)82570560

前　言

本书是硕士研究生入学考试强化训练阶段的复习用书。本书是针对考生在前一个阶段，对考研数学的常见题型、方法已经进行了复习的基础上设计的重要练习题。它是《数学基础过关660题》的姊妹篇。旨在对考生在考前进行系统综合训练，以期巩固、提高复习成果，帮助考生查漏补缺，进而达到考试要求，增强应试能力，提高考试成绩。

我们在认真研究历年试题和新大纲的基础上，对考试的重点、难点以及对考生经常出现的错误加以剖析和归纳整理，用抓住基础、突出重点的方法，设计出不同解题思路和层次的试题并整合成书。本书**“解答”**——思路清晰、方法步骤详细、解题过程规范；**“评注”**——有针对性地指出该题所考查的知识点(或命题意图)，解题思路归纳总结和延伸，常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，注意扩展考生视野和思路。

数学离不开计算，硕士研究生入学考试也非常重视对计算能力的考查。因此，考生复习时要注意提高运算能力，提高计算的准确性，不仅要动脑而且要动手，不能华而不实，眼高手低，丢三落四，犯“低级”错误。

硕士研究生入学考试科目从2003年调整之后，数学科的权重在原有基础上增加了50%，因此数学成绩对总分将有更大的影响，数学科的地位愈显重要。同时由于数学科本身的特点，考生的数学成绩历年来差别较大，这说明数学科的考试选拔性质更突出。因此，希望考生要

根据考试大纲认真踏实、全面系统地复习，心态要平和，戒浮躁，要循序渐进，不断积累，步步提高。面对激烈的竞争，望有志者抓紧、抓细、抓早。

同学们在使用本书时，最好能先自己想动手算，不要急于看解答。评注中的一些题外话亦值得细心揣摩。

本书也可供大专院校的学生在学习高等数学、线性代数、概率论与数理统计时参考。

由于编者水平有限，加之时间比较仓促，书中难免有错误和疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2010 年 8 月

目　录

高等数学

1 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$. 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}.$$

2 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x - f(x)\tan x}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}$.

3 设函数 $f(x)$ 二次可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^3}\right)=3$，求 $f(0), f'(0)$ 与 $f''(0)$.

4 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x+1)}{x^2-1}, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型.

5 证明：$x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1\ (n>1)$，在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

6 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 求证：

(Ⅰ) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数；

(Ⅱ) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加；

(Ⅲ) $y=f(x)$ 的图像是 $(-\infty,+\infty)$ 上的凹弧.

7 证明不等式 $\dfrac{2x}{x+2}<\ln(1+x)<\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ 对任何 $x>0$ 成立.

8 设函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3+\frac{1}{2}bx^2+2x$,求常数 a,b,c 使得 $f(x)$ 在 $x=-2$ 取得极值,且 $x=c$ 是 $f(x)$ 的驻点而不是 $f(x)$ 的极值点.

9 证明:当 $x>0,a>0$ 时,$e^{-x}(x^2-2ax+1)<1$.

10 设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,且 $f(a)=0,f(b)>0$,又知它在 $x=a$ 处的一阶右导数 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}<0$.

求证:(Ⅰ)在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$;

(Ⅱ)在(a,b)内至少存在一点 η,使 $f''(\eta)>0$.

11 设 $f(x)$ 为非负连续函数,且 $f(x)\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\sin^4x$,求 $f(x)$ 在$[0,\frac{\pi}{2}]$上的平均值.

12 计算 $I=\int_1^2\left(\frac{1}{x\ln^2x}-\frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x$.

13 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$,$g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$,计算定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

14 (Ⅰ)求证:若 $f(x)$ 是$[-a,a]$上的连续偶函数,则 $\int_{-a}^{a}\frac{f(x)\mathrm{d}x}{1+e^x}=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(Ⅱ)计算定积分 $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)(1+x^2)}$.

15 求 $I_n=\int_0^1(\arcsin x)^n\mathrm{d}x,n=0,1,2\cdots$

16 计算反常积分:

(Ⅰ)$\int_0^{+\infty}\frac{(e^x-2)\mathrm{d}x}{e^{2x}+e^x+1}$;

(Ⅱ)$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\right)\mathrm{d}x$.

17 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导函数，求证：

$$\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)|\}\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

18 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且满足 $f(0)f'(0)\geqslant 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$. 求证：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$；

（Ⅱ）存在 $\eta\in(\xi,+\infty)$，使得 $f''(\eta)=0$.

19 已知抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

（Ⅰ）求证：两坐标轴与该抛物线所围成的面积等于 x 轴与该抛物线所围成的面积；

（Ⅱ）计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体的体积之比.

20 设 $f(x)$ 连续，$\psi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\psi'(x)$，并讨论 $\psi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

21 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=1$，且满足等式 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=0$.

（Ⅰ）求 $f'(x)$；

（Ⅱ）证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$.

22 设函数 $f(x)$ 满足 $f''(x)+(f'(x))^2=2\sin x$，试讨论 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可能取得极值或拐点，并说明理由.

23 设函数 $y(x)$，满足

$$\begin{cases}y'(x)+3\int_0^x y'(t)\mathrm{d}t+2x\int_0^1 y(tx)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}=0\\ y(0)=1\end{cases}$$

试求函数 $y(x)$.

24 设 $u=u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,试利用线性变换 $\xi=x+ay,\eta=x+by$ 将方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化为方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$,求 a,b.

25 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶连续导数,且 $u=f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. 当 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}>0$ 时满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (*)$$

与 $f(1)=f'(1)=1$,求函数 $f(r)$ 的表达式.

26 设函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,且满足 $f(0,0)=1,f'_x(0,0)=2$, $f'_y(0,y)=-3$ 以及 $f''_{xx}(x,y)=y,f''_{xy}(x,y)=x+y,f''_{yy}(x,y)=x$,求函数 $f(x,y)$ 的表达式.

27 求椭圆 $5x^2+4xy+2y^2=6$ 上的点与坐标原点 $O(0,0)$ 距离的最大值与最小值.

28 计算二重积分 $\iint\limits_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$,其中积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$,函数 $f(x,y)=z(\sqrt{x^2+y^2})$,且函数 $z(r)$ 当 $r\geqslant 0$ 时具有二阶连续导数,并满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

29 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_S(x+y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z-x^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中曲面块 S 是 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 满足 $z\leqslant 1$ 那一部分的内侧.

30 计算曲线积分

$$I=\oint_L(y-z^2)\mathrm{d}x+(z-x^2)\mathrm{d}y+(x-y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 L 是半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与平面 $x+z=2$ 的交线,从 z 轴的正向往负向看去,L 的方向沿逆时针方向.

31 设Ω是由曲面$z=8-x^2-y^2$与平面$z=2x$围成的空间区域,求Ω的体积V.

32 设$f(x)$满足$f(x)=x^2+x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\mathrm{d}t+\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是以$(-1,-1)$,$(1,-1)$和$(1,1)$为顶点的三角形区域,且$f(1)=0$,求$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

33 设$f(x)$是$[0,1]$上单调递减的正值函数,证明:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

34 试证抛物面$z=1+x^2+y^2$上任意点处的切平面与抛物面$z=x^2+y^2$所围的立体的体积与切点坐标无关.

35 计算$\iiint\limits_\Omega\left|\sqrt{x^2+y^2+z^2}-1\right|\mathrm{d}V$,其中$\Omega$是由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=1$所围成的立体.

36 曲线积分

$$I_1=\int_{AmB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

$$I_2=\int_{AnB}(x+y)^2\mathrm{d}x-(x-y)^2\mathrm{d}y,$$

其中AmB为连接点$A(1,1)$,$B(2,6)$的直线段,AnB为过A,B点及坐标原点的抛物线弧.求I_1-I_2.

37 计算曲线积分

$$\int_L\frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

其中,L是以$(1,0)$为圆心,2为半径的圆的上半圆周,方向是沿逆时针方向.

38 选取 a 与 b,使得

$$\frac{ax+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\frac{x-y+b}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

成为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求 $u(x,y)$.

39 设 $f(x)$ 是正值连续函数,D 为圆心在原点的单位圆域,∂D 为 D 的正向边界.

证明:(Ⅰ)$\oint_{\partial D} xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x=\oint_{\partial D}-yf(x)\mathrm{d}x+\frac{x}{f(y)}\mathrm{d}y$;

(Ⅱ)$\oint_{\partial D} xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi$.

40 计算曲面积分

$$I=\iint_{S_1+S_2} xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S_1 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0$ 及 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分,并取前侧;S_2 为 xOy 平面上的半圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0$,取下侧.

41 判断下列正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性:

(Ⅰ)$a_n=n\ln\frac{2n+1}{2n-1}-1,n=1,2,\cdots$

(Ⅱ)$a_n=(\sqrt[n]{n}-1)^p$,常数 $p>0,n=1,2,\cdots$

42 设 $f(x)=\frac{1}{1-x-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 求证:

(Ⅰ)数列$\{a_n\}$ 满足 $a_0=a_1=1,a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n=0,1,2,\cdots)$;

(Ⅱ)级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{f^{(n)}(0)}$ 收敛.

43 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,且当 $0\leqslant x\leqslant 2\pi$ 时,$f(x)=\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2$,求 $f(x)$ 的傅里叶级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

44 求下列微分方程的通解或满足定解条件的特解：

（Ⅰ）$yy''-(y')^2=y^2\ln y, y(0)=1, y'(0)=-1$；

（Ⅱ）$x^2y''+2xy'+y=3x\ln x$.

45 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{n}x^n$ 的收敛域及和函数.

46 设 $f(x)=\begin{cases} A, & x=0, \\ \dfrac{\int_0^{x^2}(2+t^2)e^{t^2}dt}{x^2}, & x\neq 0. \end{cases}$

（Ⅰ）确定 A，使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有任意阶导数；

（Ⅱ）求 $f^{(8)}(0)$，$f^{(9)}(0)$.

47 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n}{2^n}$ 的和.

48 设 $f(x)$ 具有二阶的连续导数，且满足方程 $f'(x)=f(1-x)$.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 满足的二阶微分方程；

（Ⅱ）求出满足 $f'(x)=f(1-x)$ 的全部可导函数 $f(x)$.

49 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 具有二阶连续导数，又曲线积分

$$\oint_L[y^2f(x)+2ye^x+2yg(x)]dx+2[yg(x)+f(x)]dy=0$$

其中 L 为平面上任意简单封闭曲线.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 和 $g(x)$，使 $f(0)=g(0)=0$；

（Ⅱ）计算沿任意一条曲线从 $(0,0)$ 点到 $(1,1)$ 点上的积分.

50 设 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，且 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，$z=(x^2+y^2)f(x^2+y^2)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

求 $f(t)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的最大值.

线性代数

51 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$

(Ⅰ)证明:$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 为可逆矩阵,其中 $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵;

(Ⅱ)证明:$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$;

(Ⅲ)已知 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$,求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

52 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶反对称矩阵

(Ⅰ)证明:对任何 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$,恒有 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}=0$;

(Ⅱ)证明:对任何非零实数 k,恒有 $\boldsymbol{A}-k\boldsymbol{E}$ 是可逆矩阵;

(Ⅲ)证明:若 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$ 是可逆矩阵,n 必是偶数.

53 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&2&1\\-1&a&3\end{pmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 等价.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$.

54 已知两个向量组

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,0,5)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,2,3)^{\mathrm{T}}$;

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1=(1,-3,6,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}_2=(a,0,b,2)^{\mathrm{T}}$

等价,求 a,b 的值,并写出等价时的线性表达式.

55 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,a,7)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,5,3,a+11)^{\mathrm{T}}$ 线性相关,而且向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,0,2,b)^{\mathrm{T}}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出.

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)试将 $\boldsymbol{\beta}$ 用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出;

(Ⅲ)求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组,并将向量组中其余向量用该极大线性无关组线性表出.

56 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 均是三维向量，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关，证明存在非零向量 $\boldsymbol{\gamma}$，使得 $\boldsymbol{\gamma}$ 既可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表出，又可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表出.

当 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 时，求出所有的向量 $\boldsymbol{\gamma}$.

57 设 n 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，试讨论向量组 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 的线性相关性.

58 已知 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，$\boldsymbol{\beta}$ 是任意一个 n 维向量.

（Ⅰ）证明存在不全为0的 k_1,k_2,k_3 使得向量组 $k_1\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1,k_2\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2,k_3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_3$ 仍线性相关；

（Ⅱ）当 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,3,5,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,-3,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,1,-1,7)^{\mathrm{T}}$ 时，求出所需要的 k_1,k_2,k_3.

59 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是三阶矩阵，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数）且满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组，并将其余向量用这个极大线性无关组线性表示.

60 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+2x_3+2x_4=3\\x_2+x_3-x_4=-1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+3x_4=b+5\\4x_1+4x_3+(a+6)x_4=16\end{cases}$$

讨论参数 a,b 取何值时，方程组无解、有解；当方程组有解时求出其所有的解.

61 已知 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是四阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维列向量，若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解是 $(1,2,2,1)^{\mathrm{T}}+k(1,-2,4,0)^{\mathrm{T}}$，又 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}_4)$，求方程组 $\boldsymbol{Bx}=3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 的通解.

62 已知齐次线性方程组

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}x_1+x_2+ax_4=0\\3x_1-x_2-x_3=0\end{cases}\text{和}(\text{Ⅱ})\begin{cases}x_1-3x_2+bx_3+4x_4=0\\x_1+5x_2+x_3+4ax_4=0\\2x_1-2x_2-x_3+cx_4=0\end{cases}$$

同解,求 a,b,c 的值并求满足 $x_1=x_2$ 的解.

63 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置,$\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量

证明:(Ⅰ)齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解;

(Ⅱ)秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

64 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&2&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&-1&2\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,特征向量;

(Ⅱ)求 $\boldsymbol{A}^{10}$.

65 已知 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=2$

(Ⅰ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量;

(Ⅱ)证明:$\boldsymbol{A}$ 可逆,并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(Ⅲ)求行列式 $|\boldsymbol{A}^{*}+\boldsymbol{E}|$ 的值.

66 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-2&1\\a&2&a\\1&3&3\end{pmatrix}$ 的特征值有重根.

(Ⅰ)求 a 的值;

(Ⅱ)求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量;

(Ⅲ)判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化,并说明理由.

67 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -2 & 2\\ a & 2 & a\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\ b\\ 1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的一个特征向量，其中 $\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵.

（Ⅰ）求 a,b 的值；

（Ⅱ）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

68 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 2 & b & 0\\ -1 & 2 & -1\end{pmatrix}$ 相似，求 a 与 b 的值，并求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

69 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & a\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & b & 5\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=5$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二重特征值，$\boldsymbol{A}^*$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

70 设 $\boldsymbol{A}$ 是各行元素之和均为0的三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是线性无关的三维列向量，并满足 $\boldsymbol{A\alpha}=3\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{A\beta}=3\boldsymbol{\alpha}$.

（Ⅰ）证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角矩阵相似；

（Ⅱ）如 $\boldsymbol{\alpha}=(0,-1,1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\beta}=(1,0,-1)^{\mathrm{T}}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$；

（Ⅲ）用正交变换化二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为标准形，并写出所用正交变换.

71 已知二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2ax_1x_3+2x_2x_3\,(a<0)$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值有重根.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）用正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 化二次型为标准形，并写出所用坐标变换；

（Ⅲ）如果 $\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{E}$ 是正定矩阵，求 k 的值.

72 设 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=a(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)+2b(x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n)$ 其中 $a>0,b\neq 0$.

（Ⅰ）若二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 正定，求 a,b 的值；

（Ⅱ）当 $n=3$ 时，求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$ 把二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 化为标准形；

（Ⅲ）若 $a=1,b=2$ 指出 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种曲面.