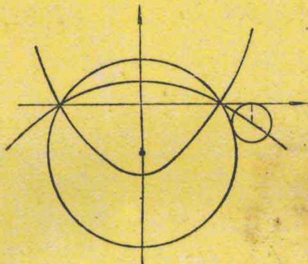
翟连林 主编

中小学数学双基导学与自测丛



初中数学双基导学与自测

第三册

中央民族学院出版社

中小学数学双基导学与自测丛书

初中数学双基导学与自测

第三册

主　编　翟连林
副主编　王保国　曹清钧　侯吉生　张守义
编　者　陈喜田　秦德才　仙体灵　晋连超
　　　　刘甲贞　张桂兰　尚明云　田松亭

中央民族学院出版社

（京）新登字184号

内 容 简 介

本书与初中三年级数学课同步，紧密配合课堂学习。全书突出“双基”，增强用数学的意识，注重数学思想方法，知识不超前，使全体学生都能接受。

本书内容包括：函数及其图象、解三角形，统计初步、相似形、圆。

本书供初中三年级学生阅读，也可作“家教”教材。

初中数学双基导学与自测

第三册

主 编 翟连林

*

中央民族学院出版社出版

（北京市海淀区白石桥路27号）

邮政编码：100081

全国各地新华书店经销

河北省高碑店市劳动服务公司印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开 4.25印张 90千字

1993年8月第1版 1993年8月第1次印刷

印数：1—10000册

ISBN7-81001-455-2/G・196

定 价：3.10元

前　言

为了贯彻国家教委颁发的九年义务教育全日制小学、初中数学教学大纲和现行高中数学教学大纲，切实把中小学数学教学引向围绕提高民族素质，培养有理想、有道德、有文化、有纪律的“四有”人才的轨道上来，由中国管理科学研究院能力研究所编辑部组织全国十几个省市的部分特级教师、高级教师、青年骨干教师和教学研究人员，总结多年教学经验吸收国内外教学科研成果，编写了“中小学数学双基导学与自测丛书”．由著名数学普及读物作家翟连林副教授担任这套丛书编委会主任。

这套丛书紧扣各级学校教学大纲和“招生考试要求”，重点放在帮助青少年学好基础知识，掌握基本技能（基础知识和基本技能简称“双基”）。在双基导学与自测的各册中，按教材的章节顺序编写，所用知识不超前，难度与灵活性稍低，适合初学者的特点，有利于大面积提高数学教学质量。在总复习与试题分类精编的各册中，按专题或课时划分，既注重数学思想方法的归纳和总结，又强调了灵活与综合应用，适应考试要求，提高应试能力。

这套丛书共21册，其中：

小学8册：《小学数学双基导学与自测》1～6册，《小学数学总复习》，《小学升学数学试题分类精编》。

初中6册：《初中数学双基导学与自测》1～3册，《初中数学总复习》（上、下册），《初中升学数学试题分类精

编》。

高中7册：《高中代数双基导学与自测》（上、下册）《立体几何双基导学与自测》，《平面解析几何双基导学与自测》，《高中数学总复习》（上、下册），《高中数学试题分类精编》。

由于我们的水平有限，书中缺点、错误在所难免，欢迎读者批评、指正。

中国管理科学研究院
能力研究所编辑部
1993．4，于北京

目　录

代　数

平面几何

综合检测题

代 数

第十三章 函数及其图象

典型例题

例1 m为何值时，点$A(m^2+1, 2m-1)$关于原点的对称点在第二象限.

【分析】 点$A(m^2+1, 2m-1)$关于原点对称点的坐标为$(-m^2-1, 1-2m)$，它在第二象限，只需$1-2m>0$即可.

【解】 当点A关于原点的对称点在第二象限时，有

$1-2m>0$，故$m<\frac{1}{2}$.

【评注】 根据坐标的特点，不难得出有关对称的点：

若已知点$P(a, b)$，则

(1)关于x轴对称的点坐标为$(a, -b)$.

(2)关于y轴对称的点的坐标为$(-a, b)$.

(3)关于原点对称的点的坐标为$(-a, -b)$.

(4)关于一、三象限分角线对称的点的坐标为(b, a).

(5)关于二、四象限分角线对称的点的坐标为$(-b, -a)$.

例2 设点$P(x, y)$是坐标平面内的点，若$x \cdot y=0$，则点P在坐标平面内什么位置？若$x+y=0$呢？

【解】由$x\cdot y=0$，得　$x=0$或$y=0$.

也就是$x=0$时，y可为任意实数，或$y=0$时，x可为任意实数，即点P在y轴上，或在x轴上，故点P在坐标轴上.

若$x+y=0$，则$x=-y$，这说明点P的横坐标x与纵坐标y互为相反数，则点P在第二象限与第四象限的分角线上(且包括原点).

【评注】(1)两坐标轴不属于任何象限.

(2)根据所给条件(如$x+y=0$)，寻求点P的横坐标的关系，最后据此得出符合该条件的点的特征.

例3 m为何值时，点$A(m^2+1,\ 2m-1)$到x轴的距离是它到y轴距离的一半?

【分析】点A到x轴的距离为$|2m-1|$，到y轴的距离为m^2+1，列方程即可.

【解】依题意，得$|2m-1|=\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)$.

(1)当$m\geqslant\frac{1}{2}$时，$|2m-1|=2m-1$,

从而$2m-1=\frac{1}{2}(m^2+1)$,

整理，得$m^2-4m+3=0$，解之，得$m_1=1$或$m_2=3$;

(2) 当$m<\frac{1}{2}$时，$|2m-1|=1-2m$,

从而$1-2m=\frac{1}{2}\left(m^2+1\right)$,

整理，得$m^2+4m-1=0$,

解之，得$m_3=-\sqrt{5}-2$或$m_4=\sqrt{5}-2$.

故 $m_1=1$或$m_2=3$或$m_3=-\sqrt{5}-2$或$m_4=\sqrt{5}-2$.

【评注】点$P(x,\ y)$到x轴的距离为$|y|$，到y轴的距离

为$|x|$：去绝对值符号的方法有两种，一是分区间讨论，二是两边平方.

例4 函数$y=(2m-9)x^{m^2-9m+19}$，m为何值时：

(1)函数为正比例函数，且图象在二、四象限.

(2)函数为反比例函数，且函数值随x增大而减小.

【解】(1)依题意，得$\begin{cases}m^2-9m+19=1,\\2m-9<0.\end{cases}$

解之，得$\begin{cases}m=3\text{或}m=6,\\m<\dfrac{9}{2}.\end{cases}$

故 $m=3$.

(2)依题意，得$\begin{cases}m^2-9m+19=-1,\\2m-9>0.\end{cases}$

解之，得$\begin{cases}m=4\text{或}m=5,\\m>\dfrac{9}{2}.\end{cases}$ 故 $m=5$.

例5 把$y=3x-2$的图象向上平移多少个单位时，才能使它经过点(2，10)？并求平移后的直线与坐标轴围成的面积

【分析】由两直线平行的知识，可设平移后的直线的函数解析式为$y=3x+b$，又因过点(2，10)，可由待定系数法求出b值.

【解】设平移后的直线的解析式为$y=3x+b$，

由于该直线经过点(2，10)，则有$10=3\times2+b$.

$\therefore$ $b=4$. 从而，平移前、后的直线在y轴上的截距分别是-2、4.

故 向上平移了$4-(-2)=6$个单位．平移后的直线为$y=3x+4$，

当$x=0$时，$y=4$；当$y=0$时，$x=-\frac{4}{3}$，∴ 直线$y=3x+4$与y轴的交点是$(0,4)$，与x轴的交点是$\left(-\frac{4}{3},0\right)$，其面积为$S=\frac{1}{2}\times4\times\frac{4}{3}=2\frac{2}{3}$.

例6 若一次函数$y=2x+b$和反比例函数$y=\frac{11+b}{x}$的图象有两个交点，当b为何值时，有一个交点的纵坐标为1，并求这两个交点．

【分析】 两个函数图象的交点必然适合两个函数关系式，反之，解由两个函数解析式所组成的方程又可得到两个函数图象的交点坐标．

【解】 将$y=1$代入$y=2x+b$，得$x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}b$；将$y=1$代入$y=\frac{11+b}{x}$，得$x=11+b$.

从而$\frac{1-b}{2}=11+b$，∴ $b=-7$.

解方程组$\begin{cases}y=2x-7,\\ y=\frac{4}{x},\end{cases}$ 得$\begin{cases}x_1=4,\\ y_1=1,\end{cases}$ 或$\begin{cases}x_2=-\frac{1}{2},\\ y_2=-8.\end{cases}$

故 当$b=-7$时，有一个交点的纵坐标为1，两交点坐标为$(4,1)$与$\left(-\frac{1}{2},-8\right)$.

例7 当$k<0$时，函数$y=kx+k$与$y=\frac{k}{x}$在同坐标系中的

图象大致怎样，画草图表示.

【分析】 分别由一次函数和反比例函数的性质可知，当$k<0$时，一次函数$y=kx+k$中的y随x的增大而减小，同时.它在y轴上的截距$k<0$，因此，$y=kx+k$的图象应是左高右低，与y轴的交点在x轴下方的一条直线. 当$k<0$时，反比例函数$y=\frac{k}{x}$的图象是双曲线，它的两个分支分别位于第二、四象限内，在每一个象限内，都是y随x的增大而增大.

因此，当$k<0$时，函数$y=kx+k$与$y=\frac{k}{x}$在同一坐标系的图象大致如图13-1所示.

例8 已知一次函数$y=kx+b$的图象与抛物线$y=x^2$相交于$A(-1,1)$，$B(2,4)$两点.

(1)求这个一次函数的解析式；

(2)过点B作直线BC平行于x轴，交抛物线于另一点C，求三角形ABC的面积.

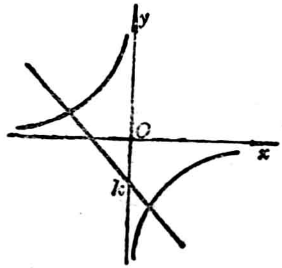


图 13-1

【分析】 (1)因一次函数$y=kx+b$的图象过点$A(-1,1)$、$B(2,4)$，由待定系数法可求出k、b，进而可确定其解析式.

(2)由图13-2看出，$\triangle ABC$的面积可由$S=\frac{1}{2}|BC|\cdot|AD|$得出，由两点间距离公式可知，$|BC|=|x_B-x_C|$，$|AD|=|y_D-y_A|$，于是其面积可求.

【解】 (1)将$(-1,1)$、$(2,4)$的坐标分别代入$y=kx+b$，得

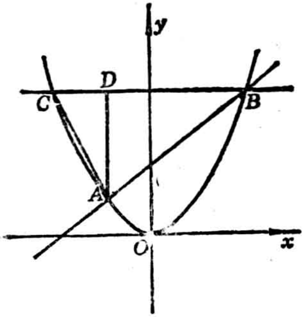


图 13-2

$$\begin{cases}1=-k+b,\\4=2k+b,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}k=1,\\b=2.\end{cases}$$

故所求一次函数的解析式为$y=x+2$.

(2)作$AD\perp BC$，垂足为D,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AD$.

当$y=4$时，由$y=x^2$，得$x=\pm2$.

因点B坐标为(2，4)，则点C的坐标为(−2，4).

所以 $BC=|x_B-x_C|=4$，$AD=|y_D-y_A|=3$.

故 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

【评注】已知坐标系内的三点，求由这三点为顶点构成的三角形的面积，可直接用横纵坐标差的绝对值求之(如本例)，有时是将三角形分成若干个小三角形求面积.

例9 已知函数$y_1=2-x$，$y_2=x^2-x-2$.

(1)作出它们的图象，并求出图象交点的坐标;

(2)当x取何值时$y_1>y_2$?

(3)当x取何值时$y_1\cdot y_2>0$?

(4)当x取何值时，y_1、y_2都随x的增大而减小?

【分析】(1)求两个函数图象交点的方法有两种：(i)准确作出函数图象，由图象求交点坐标;

(ii)求方程组$\begin{cases}y=2-x,\\y=x^2-x-2\end{cases}$的解，其解即为两函数图象

的交点坐标.

(2)若$y_1>y_2$，从图象看，y_1的图象应在y_2的图象的上方，只需由两函数的图象来确定x的取值范围.

(3)若$y_1\cdot y_2>0$，则有y_1与y_2同号，由两函数的图象，找出它们同在x轴上方(或下方)时的x的取值范围即可.

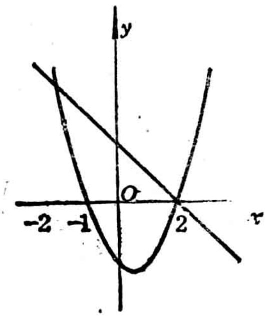


图 13-3

【解】(1)函数$y_1=2-x$与$y_2=x^2-x-2$的图象如图13-3，它们的交点为$(-2, 4)$与$(2, 0)$；

(2)由图象看出，当$-2<x<2$时，$y_1>y_2$；

(3)由图象看出，当$x<-1$时$y_1\cdot y_2>0$.

(4)由图象看出，当$x<\frac{1}{2}$时，y_1、y_2都随x的增大而减小.

【评注】要注意"数形结合"解题.

例10 解不等式组$\begin{cases}5x-2>3(x+1),\\ x-2\leqslant 14-3x.\end{cases}$

【分析】解不等式组的方法是先将各个不等式的解集求出来，然后再求各个解集的公共部分，这个公共部分即是不等式组的解集.

【解】$5x-2>3x+3$，即$x>2.5$ ①

$x-2\leqslant 14-3x$，即$x\leqslant 4$ ②

由①、②，得不等式组的解集为$2.5<x\leqslant 4$.

例11 解不等式$|2x-3|>4$.

【分析】由绝对值的意义可知，原不等式可化为两个不

等式求解.

【解】原不等式可化为$2x-3<-4$或$2x-3>4$,

故 $x<-\frac{1}{2}$, 或 $x>\frac{7}{2}$.

例12 解不等式$x^2-7x+12>0$.

【分析】一元二次不等式常有两种解法,一是代数法,将左端化为两个因式的积,如本例由"若两个因式的积大于0,则两个因式同大于0或同小于0",可得两个不等式组而解之; 另一种是图象法,将左端看作是关于x的函数,即$y=x^2-7x+12$,由$a=1>0$可知其图象开口向上,与x轴的两交点分别为$(3,0)$、$(4,0)$,当$x<3$或$x>4$时,图象在x轴的上方,即$y>0$,这样可得不等式的解集.

【解】略.

例13 不等式$px^2-px-1<0$的解集是全体实数,求p的范围.

【分析】由于x^2项的系数为字母p,所以对p应讨论.

(1)当$p>0$时,不等式$px^2-px-1<0$的解集不可能为全体实数,因此p不大于零.(2)当$p=0$时,不等式$px^2-px-1<0$的解集是全体实数,符合题意.(3)当$p<0$时,$y=px^2-px-1$的图象是开口向下的抛物线,当判别式$\Delta=p^2+4p<0$时,其图象与x轴不相交,即当$p<-4$时,不等式$px^2-px-1<0$的解集为全体实数.综合(1)、(2)、(3),得$p=0$或$p<-4$.

【解】略.

【评注】(1)当x^2项的系数含有待定字母时,应注意讨论,要特别注意x^2的系数为零时,不能用判别式解决问题.

(2)要善于运用图象,注意"数形结合",深刻理解一元二次方程、一元二次不等式与二次函数间的内在联系,提高

解题能力.

例14 已知不等式$ax^2+bx+c<0$的解集是$-2<x<-\frac{1}{2}$,而$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象与y轴的交点的纵坐标是方程$y^2-y-2=0$的正整数解,求此二次方程表达式中的a、b、c的值.

【解】 由$y^2-y-2=0$,得 $y_1=2$或$y_2=-1$,

$\therefore$ $y=ax^2+bx+c$的图象与y轴的交点为$(0,2)$,

从而$c=2$.

$\therefore$ 原不等式为$ax^2+bx+2<0$. 又因其解集为$-2<x<-\frac{1}{2}$, $\therefore$ -2、$-\frac{1}{2}$是方程$ax^2+bx+2=0$的二根.

由韦达定理,得

$$-2+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{b}{a},\ -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{a}.$$

解之,得$a=2$,$b=5$. 故 $a=2$,$b=5$,$c=2$.

【评注】 (1)对于已知某一不等式的解集,求该不等式的问题的解决方法常有两种,第一种,解集的两个"端点"值是不等式对应的方程$ax^2+bx+c=0$的二根,可利用韦达定理求出a、b、c;或将这二根代入方程求出a、b. 第二种,构造一个以$-2<x<-\frac{1}{2}$为解集的不等式:$(x+2)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$,即$2x^2+5x+2<0$,由于$ax^2+bx+2<0$的解集也是$-2<x<-\frac{1}{2}$,故其对应项系数成比例,即$\frac{a}{2}=\frac{b}{5}=\frac{2}{2}$,从而,得$a=2$,$b=5$.

例15 若抛物线的顶点$(-1,2)$,且与y轴的交点为$(0,4)$,

试求其解析式.

【分析】 由于给出了抛物线的顶点为$(-1,\ 2)$，可设顶点式$y=a(x+h)^2+k$，$(-h、k)$为二次函数的图象的顶点坐标，从而二次函数为$y=a(x+1)^2+2$，再根据与y轴的交点为$(0,\ 4)$，代入得$4=a(0+1)^2+2$，解得$a=2$，故二次函数为$y=2(x+1)^2+2$，即$y=2x^2+4x+4$.

【解】 略.

【评注】 二次函数的解析式除顶点式$a(x+h)^2+k$外，还有两种形式：(1)一般式：$y=ax^2+bx+c$，(2)截距式：$y=a(x-x_1)(x-x_2)$(其中x_1、x_2为二次函数的图象与x轴交点的横坐标)，在解题时要据已知条件合理选择二次函数解析式.例如，已知抛物线经过任意三点时，则选用一般式；已知顶点坐标或极值及对称轴方程时，则选用顶点式；已知抛物线在x轴所截线段的长或在x轴上的截距时，则选用截距式．但不管哪种形式，确定一个二次函数都要找出三个条件，并且最后结果都要用一般式表达.

例16 已知二次函数$y=-2x^2+(m+3)x-m+1$.

(1)证明：无论m取何值，抛物线都与x轴相交于两点A和B；

(2)m为何值时，线段AB最短？且求出这个最短距离；

(3)当AB最短时，抛物线顶点C和A、B两点所围成的三角形面积是多少？

【分析】 (1)要证明抛物线与x轴相交于两点，只要证明方程$-2x^2+(m+3)x-m+1=0$有两个不相等的实根，即只要证明其判别式恒大于零即可.

(2)若设点A的坐标为$(x_1,\ 0)$，点B的坐标为$(x_2,\ 0)$，则$|AB|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2-x_1)^2}=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}$，

由韦达定理知 $|AB|$ 是用m来表示的解析式，转化为只含变量m的解析式的最值问题.

【解】(1) $\because\ \Delta=(m+3)^2-4\cdot(-2)\cdot(-m+1)$

$$=m^2-2m+17$$
$$=(m-1)^2+16>0.$$

故无论m为何值，抛物线与x轴都有两个交点.

(2)设点A、B的坐标分别为$(x_1,\ 0)$、$(x_2,\ 0)$，

则 $|AB|=|x_2-x_1|=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2x_1}$

$$=\sqrt{\left(\frac{m+3}{2}\right)^2-4\frac{(-m+1)}{(-2)}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(m-1)^2+16}.$$

因此，当$m=+1$时，$|AB|$最小，其最小值为2.

(3)当$m=+1$时，$y=-2x^2+4x=-2(x-1)^2+2$，

则顶点坐标为(1，2)，

$\therefore\ S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot 2=\frac{1}{2}\times 2\times 2=2.$

单元检测题 A

一、选择题*

1.若$xy=5$，那么y是x的(　　)

(A)一次函数；(B)正比例函数；(C)反比例函数；

(D)以上都不对.

2.函数$y=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt{4-x^2}}$的自变量$x$的取值范围是(　　)

---

* 本书的选择题都是单项选择题．即在给出的代号为A、B、C、D的四个备选答案中，只有一个是正确的，把正确答案的字母代号填入括号内.