



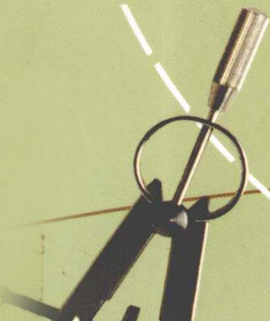
单 樽 主 编

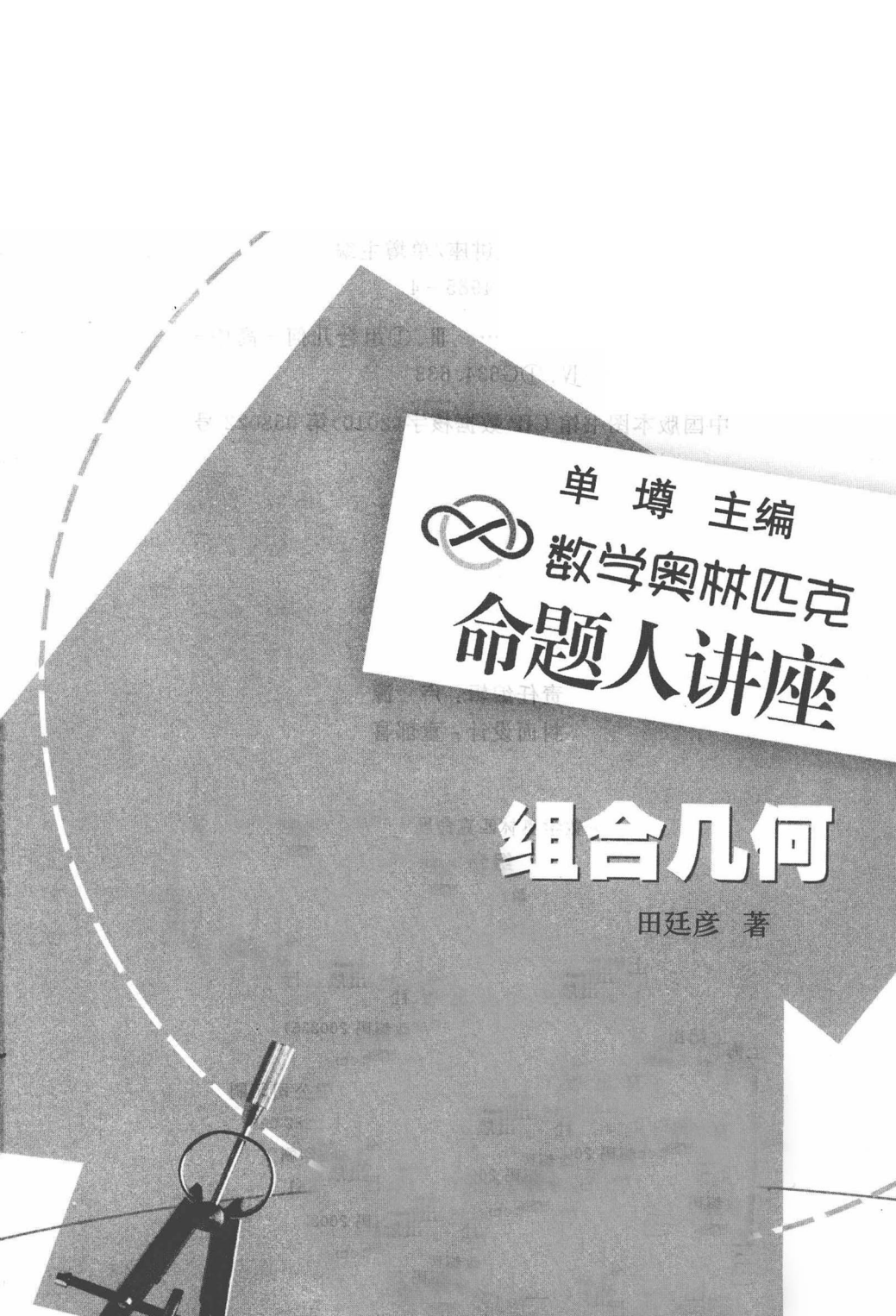


数学奥林匹克
命题人讲座


组合几何

田廷彦 著





单 樽 主 编

 数学奥林匹克
命题人讲座

组合几何

田廷彦 著

图书在版编目(CIP)数据

组合几何/田廷彦著. —上海:上海科技教育出版社,
2010.7

(数学奥林匹克命题人讲座/单增主编)

ISBN 978-7-5428-4985-4

I. ①组… II. ①田… III. ①组合几何—高中—
教学参考资料 IV. ①G634.633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 058022 号

责任编辑:卢源

封面设计:童郁喜

* 数学奥林匹克命题人讲座 *

组合几何

单增主编

田廷彦著

上海世纪出版股份有限公司 出版发行
上海科技教育出版社

(上海市冠生园路393号 邮政编码200235)

www.ewen.cc www.sste.com

全国新华书店经销 上海市印刷七厂有限公司印刷

开本 890×1240 1/32 印张 10.875 字数 282 000

2010年7月第1版 2010年7月第1次印刷

ISBN 978-7-5428-4985-4/O·661

定价:25.00元

观 题 有 感

——致品尝数学甘苦之同仁

轻舟晚渡无欲眠，
晨风过访有清岚。
落笔偶得一句成，
把酒已尽半杯残。
侧耳当闻流水缓，
回首不觉月光寒。
漫漫长夜赴西去，
且看旭日起东峦。

丛书序

读书，是天下第一件好事。

书，是老师。他循循善诱，传授许多新鲜知识，使你的眼界与思路大开。

书，是朋友。他与你切磋琢磨，研讨问题，交流心得，使你的见识与能力大增。

书的作用太大了！

这里举一个例子：常庚哲先生的《抽屉原则及其他》（上海教育出版社，1980年）问世后，很快地，连小学生都知道了什么是抽屉原则。而在此以前，几乎无人知道这一名词。

读书，当然要读好书。

常常有人问我：哪些奥数书好？希望我能推荐几本。

我看过的书不多。最熟悉的是上海的出版社出过的几十本小册子。可惜现在已经成为珍本，很难见到。幸而上海科技教育出版社即将推出一套“数学奥林匹克命题人讲座”丛书，帮我回答了这个问题。

这套丛书的作者与书名初定如下：

| | | |
|-----|-----|-------------------|
| 黄利兵 | 陆洪文 | 《解析几何》 |
| 王伟叶 | 熊 斌 | 《函数迭代与函数方程》 |
| 陈 计 | 季潮丞 | 《代数不等式》 |
| 田廷彦 | | 《圆》 |
| 冯志刚 | | 《初等数论》 |
| 单 增 | | 《集合与对应》《数列与数学归纳法》 |
| 刘培杰 | 张永芹 | 《组合问题》 |
| 任 韩 | | 《图论》 |

田廷彦

《组合几何》

唐立华

《向量与立体几何》

杨德胜

《三角函数·复数》

显然,作者队伍非常之强。老辈如陆洪文先生是博士生导师,不仅在代数数论等领域的研究上取得了卓越的成绩,而且十分关心数学竞赛。中年如陈计先生于不等式,是国内公认的首屈一指的专家。其他各位也都是当下国内数学奥林匹克的领军人物。如熊斌、冯志刚是2008年IMO中国国家队的正副领队、中国数学奥林匹克委员会委员。他们为我国数学奥林匹克做出了重大的贡献,培养了很多的人才。2008年9月14日,“国际数学奥林匹克研究中心”在华东师范大学挂牌成立,担任这个研究中心主任的正是多届IMO中国队领队、华东师范大学数学系教授熊斌。

这些作者有一个共同的特点:他们都为数学竞赛命过题。

命题人写书,富于原创性。有许多新的构想、新的问题、新的解法、新的探讨。新,是这套丛书的一大亮点。读者一定会从这套丛书中学习到很多新的知识,产生很多新的想法。

新,会不会造成深、难呢?

这套书当然会有一定的深度,一定的难度。但作者是命题人,充分了解问题的背景(如刘培杰先生就曾专门研究过一些问题的背景),写来能够深入浅出,“百炼钢化为绕指柔”。另一方面,倘若一本书十分浮浅,一点难度没有,那也就失去了阅读的价值。

读书,难免遇到困难。遇到困难,不能放弃。要顶得住,坚持下去,锲而不舍。这样,你不但读懂了一本好书,而且也学会了读书,享受到读书的乐趣。

书的作者,当然要努力将书写好。但任何事情都难以做到完美无缺。经典著作尚且偶有疏漏,富于原创的书更难免有考虑不足的地方。从某种意义上说,这种不足毋宁说是一种优点:它给读者留下了思考、想象、驰骋的空间。

如果你在阅读中,能够想到一些新的问题或新的解法,能够发现书中的不足或改进书中的结果,那就是古人所说的“读书得间”,值得祝贺!

我们欢迎各位读者对这套丛书提出建议与批评。

感谢上海科技教育出版社,特别是编辑卢源先生,策划组织编写了这套书。卢编辑认真把关,使书中的错误减至最少,又在书中设置了一些栏目,使这套书增色很多。

单 增

2008年10月

前言

从阿基米德拼图游戏谈起

如果把奥数 and 初等数学看成绵延不断的伟岸山脉，那么组合几何绝对是最高、最为险峻的巅峰之一，让人怦然心动，心向往之；然而这样的比喻也不尽恰当，因为它忽略了这门数学分支的广度。

正如单墀教授所言，数学在今天已是博大精深。即便是奥数和初等数学也远未穷尽。为什么说在奥数乃至初等数学的众多分支中，组合几何绝对称得上最困难、最有趣、联系最广泛的一支呢？这是因为，就横向来说，它一边是奇异的组合（其实也与代数、数论沾边），一边是直观的几何；从纵向来说，它脚踏初等数学的基石（尤其在命题的叙述上往往连门外汉也听得懂），头顶的却是高等数学的深奥（主要指方法）；还应加上一点，就是它既有严谨的数学逻辑，又异常美丽。这样的一个“三维结构”，赋予这门学科极为特殊的位置，难怪不少现代数学大师都为之倾倒。例如著名的西尔维斯特问题，如今已是数学竞赛的例题，解答不过区区几行。然而在当时，为了得到这样一个巧妙的证明，人们被困扰了数十年之久。这也说明，数学家在追求至高无上的思维之美方面是永无止境的。IMO 设立特别奖，就是为了奖励学生找到竞赛委员会未曾提供的巧妙解法。

组合几何正式成为一门数学分支只有半个世纪历史，但是与组合几何有关的问题，却可追溯到遥远的历史深处，比如中国的七巧板、波斯的织毯等。通常人们认为，数学家关注的第一个有名的组合几何问题，是关于球的最密填充的“开普勒猜想”，该问题历时近 400 年，方于 1998 年利用计算机解决。

近年来这一观点似乎受到了挑战。借助现代科技手段，人们初步

破译了2000多年前古希腊大数学家阿基米德的一篇论文，结论是这篇论文在研究一个组合几何问题。原文已不可见，副本手稿是写在羊皮纸上的，已有近1000年历史，而且遭到古代僧侣的覆盖书写和收藏者糟糕的保存方法的破坏。1998年，该副本在一次拍卖中现身。此时它身上已经布满蜡迹和霉菌，字迹更加模糊。一个匿名富翁以200多万美元的代价拥有了它，并将它陈列在美国巴尔的摩市的博物馆里，直到今天。

科学家尝试用不同的办法破译羊皮书。不同波长的光谱拍摄分析表明，阿基米德的论文和僧侣的祈祷文虽用同一种墨水书写，但相隔200年的墨迹对波长有不同感应。2005年5月，斯坦福同步辐射实验室用X射线读取论文，再现了174页书中的3页，而全书的破译至少需要三四年时间。斯坦福大学的内茨(R. Netz)认为，在阿基米德的众多作品中，这篇论文总被认为是不重要的、难以理解的而被忽略。现在只有论文导言的一部分被保存下来。这里面提到了孩子们玩的一个游戏——用很多纸带拼出不同的图形。但是像阿基米德这样牛的数学家，如果毫无来由地关心这种玩意儿是没道理的。实际上，阿基米德是在试图计算把14条不规则的纸带拼成正方形一共能有多少种不同的拼法。细心、系统的计算才能得出答案为17152。组合学专家迪亚科内斯(P. Diconis)、霍姆斯(S. Holmes)、格雷厄姆(R. Graham)和金芙蓉等认为“这非常困难”。来自芝加哥的计算机科学家库特勒(W. H. Cutler)编写了一个新的计算机程序，证明该答案是正确的。有一本书专门介绍了这个故事。中译本首先在中国台湾出版，很多人都推荐这本书，包括院士、教授，还有一个知名女艺人；大陆中译本《阿基米德羊皮书》由湖南科学技术出版社于2008年出版。

时过境迁，斗转星移。与文史哲不同，科学的发展可谓一日千里，生命科学和计算机科学几乎彻底改头换面。数学的情形则介乎两者之间，当然，古典数学与现代数学毕竟也不可同日而语。那么，今天的组合几何究竟在研究什么呢？

数学家在创造数学时，将研究客体做了很多取舍和分类，形成了数学的层状结构。最底层的是代数和数量关系，图论基本上也属于代数组合学范畴，因为它的点和线只表示关系，位置和形状等不考虑在内

(图论中的一部分则开始涉及这一领域,如可平面图、拓扑图论等)。实数理论、拓扑学等就更高一些,与连续性关系尤大。再上面就是几何学,关心图形的形状和测度(长度、面积等)。即使在几何学中,还有很多分层,比如在仿射意义下,三点共线、交比等都是不变的,但线段长度、角度大小就改变了。几何学似乎代表着数学最复杂的研究对象。平面几何的内容还算丰富,但圆锥曲线、立体几何乃至高维几何中,就难以用纯几何研究下去。组合几何,就是研究与几何图形的位置、形状、计数、测度等有关的组合问题。它也涉及高维,但与拓扑学类似,具有“后现代”的一种杂合而不纯粹的风格,即不再(也无法)拘泥于精致优雅的传统平面几何之细节(如很少涉及外心、欧拉线、费尔巴哈点等深入的几何概念),偏向于一种粗线条的、漫画式的“示性”研究,然而却能有效揭示问题的实质,同样能充分体现思维之奇美。

对待组合问题的基本方法,是将其转化成代数或分析问题(对应和估计),这样一来,许多极端复杂的组合细节就可忽略。这种努力类似于笛卡尔对平面几何的解析处理(平面几何的代数化和分析化)。但从效果来说,两者都有问题:解析法处理平面几何可能会产生意想不到的复杂性,而多数组合几何问题根本不可能使用解析几何解决。作为两个要被代数和解析化的“复杂度较高”的学科(几何与组合)的交叉,其困难程度可想而知。

高维的问题更得益于代数的力量。对自然科学家来说,三维空间已是足够复杂(连晶体、病毒或细菌的种类都难以搞清楚),而数学家却执意要研究高维(在组合几何中特别明显)。代数是全部数学乃至科学中最基本的学科,其重要性不言而喻。当然,这并不等于说所有问题可以还原为代数问题,也不是说代数问题就是简单的。事实上,即使是只处理二、三维空间,也有许多极为棘手的奥数几何问题。更何况二维到三维经常会出现质的突变,为数学家带来新的思维和想象。此外,在有的时候,运用几何来解决代数问题是很有意思的,甚至可运用物理的思想方法来解决数学问题,这种反向思维方式的确耐人寻味(一般人们总认为数学比物理基本),这在本书中也略有提及。

组合几何在近代就有许多出名的工作,她曾引起开普勒、牛顿、高斯、柯西、希尔伯特等超一流大师的注意;不过,除了闵可夫斯基,其他

人恐怕只是“蜻蜓点水”而已。这门学科的真正发展是在 20 世纪中叶以后。1964 年,哈德维格(H. Hadwiger)等写了本薄薄的小册子《平面组合几何》,可算是这门学科的开山之作。在此前后,爱尔特希(P. Erdős)、博苏克(K. Borsuk)、罗格斯(C. A. Rogers)、托特(L. F. Tóth)、格林鲍姆(B. Grünbaum)等大大丰富了组合几何的内容,解决了大量猜想,同时也提出了更多的问题,以至于克罗夫特(H. Croft)、福尔克纳(K. Falconer)、盖伊(R. Guy)撰写了《几何中的未解决问题》,这里的几何指的正是组合几何。近年来,国内引进出版的有影印版的《离散几何中的研究问题》(布拉斯(P. Brass)、莫泽(W. Moser)、帕克(J. Pach)著)、《球垛、格点和群》(康韦(J. H. Conway)、斯隆(N. Sloane)编著)、翻译出版的《组合几何》(帕克(J. Pach)、阿加瓦尔(P. Agarwal)著)。这些书中有不少内容是初等的,是奥数选手和教练可以、也值得了解的。在国内,这方面的专家是宗传明教授,他写有《球的填充》等几部有影响的英文专著,还有几本科普小册子如《离散几何欣赏》,极为引人入胜(因为工作关系,笔者与宗教授保持着良好关系)。另一位笔者熟悉并尊敬的教授是数论及奥数专家单墀。他的《组合几何》介于专著和竞赛辅导教材之间,书中既有历史名题,也有不少竞赛题,别具一格,思路奇特,对初等方法作了淋漓尽致的发挥,非常值得阅读和收藏。笔者的这本书与单教授的不同,是完全服务于奥林匹克数学竞赛的。专业点说,数学研究既是对个人,更是对人类智能的挑战;而奥林匹克数学竞赛更多的是个人智能的体现。

说到“初等方法”,20 世纪有位数学家特别值得一提,他便是伟大的数学宣道士爱尔特希。组合几何也算他的“强项”。与很多热衷于抽象概念的现代数学家不同,他在不断开拓新的“初等问题”,无可辩驳地揭示老祖宗和他自己新发明的一些初等方法非但没有进入坟墓,而且在今天仍具有很强的生命力,值得继续挖掘(同时也展示了“初等数学”的超乎想象的复杂性)。其他几位数学家也正在利用不断抛出的新问题向世人证明,我们或许对一些初等数学基本原理的理解还不够深刻(怀尔斯证明费马大定理的最后一步用的是抽屉原则!)。这对数学竞赛亦有深远影响。与平面几何乃至组合数学相比,无论从研究范围、主要结论和思维方法方面,组合几何都要年轻得多(这使它成为今天数学

研究和 IMO 命题的一片“新水域”)。平面几何已有几千年历史,非常成熟;组合数学也有几百年历史,有很多定理和结果。但是组合几何的问题和方法却异常丰饶、五花八门,自然也更加难以捉摸。当然这三门学科也有共性,如果要用尽量少的文字来概括,一个是“美”,一个是“难”。在历届 IMO 的试题中,如果组合几何问题出现在第 3 或第 6 题,没有一点数学天赋的人就甭白费脑细胞了。

本书有数十个结果是笔者自己的工作,也有一部分是别人的命题、本人提供的解法。人生苦短,时不我待。我也曾充满幻想,如今总觉得过去浪费了不少时间。只有加倍努力地学习,从学习中得到乐趣、提高自己,才不会虚度一生。我反对混日子,厌恶过多的闲聊和网游;尤其不满那些自己混日子还嘲笑别人的努力是无用功的人。这种人充斥于生活中,他们骨子里反智,反学术精英(最多只看到商界精英和所谓的“公共知识分子”),甚至急功近利,唯身份地位:比如写书稿费有多少,对升职称有无用处等,却无法理解思考本身的乐趣(我并不绝对反对功利,但反对绝对的功利,“道不同不足与谋”,跟这些人也没啥好解释的,反正井水不犯河水)。有的人(80 后居多)倒不怎么功利,但一切从玩出发,遇到一点困难就放弃;而且他们也有点反智,特别是反学术精英(又在误读,认为精英主义倡导不平等,干涉了以自我为中心的个人自由主义)。他们可以理解游戏精神,却完全忽视了追求卓越的执著精神,别说废寝忘食、通宵达旦,就是稍微多花点时间也不愿意,根本无法感受艰苦学习和思考后的成就感。就好比买来的水果也是甜的,但自己种出来的往往感觉更好一些。所以,和体育一样,做数学要以兴趣为主,如有点成就感则更好。自从接到一些写书任务后,觉得自己明显比以前要勤快,虽然也平添了几根白发。忙碌而压力小,是我认为的理想生活方式,至少是年轻时的实践。

特别值得一提的是,书中不少问题选自苏联的竞赛试题。苏联的命题(特别是组合方面)水平极高(也并非都是超级难题),他们有这个传统,深为笔者欣赏;据说当初还有一些非数学因素在内。这使我想起金字塔和长城,那是统治者用劳动人民的血汗换来的,现在它们的政治、军事价值已荡然无存,但文化艺术价值却流传至今。同样地,苏联那些不光彩的举动如今已成为过去时,而这些问题的巧思却永远存在。

有人说,这个世界最经得起时间考验的,一个是科学,一个是艺术。我认为,所谓“经得起时间考验”有多种含义。美的东西若缺乏真理性,就只能(或迟早会)待在博物馆或故纸堆里;而丑陋的数学或科学则只能用来应付考试。真正能突破时代局限的,能为一代人所学习、所津津乐道的,最好同时具备真理性 and 艺术美。伟大的科学工作肯定是美的,好的数学一定是思维的艺术。希望大家在读这本书时,不仅能得到技巧和方法上的训练,也能够欣赏其中的美。

笔者在搜集、整理这些问题上花费了相当的工夫,还算基本满意,但由于太忙,远称不上尽善尽美,这也是有点遗憾的。数学的疆域极广,即使是奥林匹克数学,恐怕也找不出一个人拍拍胸脯说全都掌握了。就笔者本人来说,平面几何是最熟悉的部分,不等式和数论也还能基本应付,但是对于组合来说,仍然存在大量“盲区”。所以写这本书也是一个不断发现、学习的过程。我认为,要掌握数学,学习和思考都极端重要,缺一不可。对于实在太不熟悉的领域,还应以学习为先,否则就如进入一座迷宫或森林,不知如何是好。思考带来的惊喜固然是学习所无法替代,但更多的思考却是“山穷水尽”而非“柳暗花明”。像庞加莱这么天才的数学家也说:“思想无非是漫漫长夜的一线闪光,但这闪光即是一切。”(作为一名中国古诗词爱好者,笔者模仿凑了首《观题有感》。整个探索过程犹如漫漫长夜之后见到阳光,确实辛苦异常,但心情并非痛苦或沉重,甚至还有些享受。)爱尔特希也感叹:“最好的证明其实写于天书之中,而数学家只不过有幸能瞥见那一页半纸。”时时念叨大师的肺腑之言——也因为自己的经历而有点感同身受——尽管无论在思考的深度还是强度上均不能与之相比。

最后要说一点,与国内不同的是,在国外,数学竞赛这项活动一直非常健康地开展着。无论是学生、教练还是命题者,兴趣都远大于名利。奥数在那里真正成为了“奥妙的数学”。当我们欣赏那些原创性很强的数学艺术之际,无从得知这些奇思妙想究竟出自相隔万水千山的哪位高人之手;难道我们从未感受到那种超越时空的“切磋”所带来的震撼么?其实,这本书并非一个作者,而应该是几十位作者共同写就的。在 IMO 50 周年之际,向发起数学奥林匹克活动并将之发扬光大的(特别是罗马尼亚、俄罗斯等国的)数学工作者致敬。

最后,衷心感谢著名奥数专家单墀教授,他仔细地审查原稿,个别题目甚至重新写过;同时还要感谢我的亲友与同事,没有他们热心帮助我这个半电脑盲,本书乃至其他作品的问世可能还要拖延一段时间。

作者

2009.12

目 录



前言

第一讲 几何计数 / 1

第二讲 从棋盘到染色 / 17

§ 2.1 棋盘的染色 / 18

§ 2.2 棋盘与骨牌 / 28

§ 2.3 点集及图形的染色 / 36

第三讲 凸图形的性质 / 50

第四讲 覆盖与嵌入、划分与拼补 / 70

§ 4.1 覆盖与嵌入 / 71

§ 4.2 划分与拼补 / 84

第五讲 图形的位置、形状及度量 / 94

§ 5.1 位置与形状 / 95

§ 5.2 旋转与对称 / 105

§ 5.3 距离 / 115

§ 5.4 面积 / 130

§ 5.5 格点和有理点 / 145

第六讲 向量与复数 / 157

第七讲 立体图形 / 165

§ 7.1 立方体 / 166

§ 7.2 球面与球体 / 172

§ 7.3 其他各种空间问题 / 177

第八讲 重要方法选讲 / 188

§ 8.1 赋值、映射与其他构造 / 188

§ 8.2 投影法 / 198

§ 8.3 连续性与“围棋”技巧 / 205

第九讲 运动问题与质心 / 215

第十讲 综合题与杂题选讲 / 224

附:关于西尔维斯特问题 / 236

参考答案及提示 / 240

第一讲 几何计数



几何计数,就是对几何对象(点、线、角、面积、形状)等进行计数.既然是计数,就离不开代数和数论的知识.这方面的一个经典例子就是费马小定理的证明,即找到一个“几何”模型,它的计数结果是有 $\frac{a^p - a}{p}$ 种,其中 a, p 分别是一个正整数和一个素数,这样就顺便把费马小定理给证明了.



例 1 把一个圆 $n(\geq 2)$ 等分,任两等分点之间连一条线段,得到一 n 阶完全图.视该圆为一台球桌,将球自某一等分点沿 n 边形的边或对角线击出,多次与圆周撞弹(反射角等于入射角,法线是以撞击点为端点的直径)后得到一条循环闭轨线.设 $f(n)$ 是这个完全图的台球循环闭轨线子图(即点和边都是这个完全图的一部分,且本身也是循环闭轨线)数目,求所有的 n ,使 $f(n) = n$.

分析 设循环轨线的条数是 $f(n)$,显然有 $f(3) = 1, f(4) = 3, f(5) = 2, f(6) = 6$ ($f(6)$ 如图 1.1 所示).看来 $f(n)$ 没有什么简单规律.

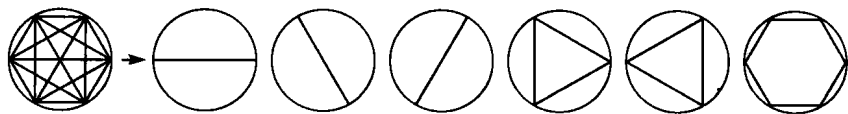


图 1.1