HIT

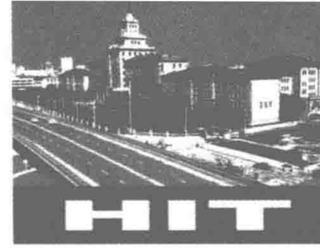
数学·统计学系列

Summary of the Theory of Polynomial

多项式理论研究综述

谢彦麟 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

多项式理论研究综述

Summary of the Theory of Polynomial

谢彦麟 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书分为多项式的根、不可约多项式、特殊类型的多项式及多项式的某些性质四部分内容,详细的介绍了多项式的基本内容及基本定理.同时作者对于多项式的相关理论予以深刻的研究并给出相应的结论.

本书内容详实,可供对多项式这一数学分支感兴趣的学生、教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

多项式理论研究综述/谢彦麟编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.1

ISBN 978-7-5603-5664-8

Ⅰ.①多… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①多项式—数学理论—理论研究 Ⅳ.①O174.14

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 253635 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杨万鑫 刘春雷
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451—86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张 16.75 字数 325 千字
版　　次 2016 年 1 月第 1 版 2016 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978—7—5603—5664—8
定　　价 38.00 元

◎编译者序

有一本外文书，综述了从古典到现代（至20世纪末）各国数学家对多项式的研究成果，如任意多项式不可约性的判定，把任意多项式分解为不可约多项式之积，伽罗华理论，希尔伯特第十七问题等. 有读者要求哈尔滨工业大学出版社出版此书中译本. 本人撰写了《代数方程的根式解及伽罗瓦理论》一书，由哈尔滨工业大学出版社出版. 出版社刘培杰数学工作室的刘培杰先生考虑到我对多项式有所研究，请我翻译此书. 我接到此外文书，一看目录知几乎所有定理从未学过，开始翻译后始知此书绝不同于一般数学书：定理证明极为简略，有时似为“提示”，印刷错误，作者笔误或未周密细致思考所致错漏不清之处颇多，论述颇不清楚，个别定理的论证根本不成立（易找反例，有时是原文献的错误），所引用的少数概念、术语、记号为一般课本所无的亦不加以解析. 本人不想全按字面照译（这是容易的，刘培杰先生也认为这是对读者不负责任），而是先读懂了才译，但读得颇费劲，有时一句话得想半天才懂. 对原文未详尽、费解、错漏不清之处多加注解，少数错误较大者加以“质疑、修改、补充”，以帮助读者阅读. 故本人实集“学、译、审（本人向来读书如审稿，专“钻空子”）、改”于一身，比全盘按字面照译多花数倍时间. 但对该书前四章还有个别论述未读懂，幸而该书的定理基本上互相独立，个别定理不懂不影响阅读其他部分.

该书后三章为“Galois 理论”“多项式环的理想子环”“Hilbert 第十七问题”(把多变量(当各变元为实数值时的)非负值多项式表示为若干有理式的平方和). 其中“理想子环”为近世代数的概念,本人未曾学习,“第十七问题”的论述要用到前一章“理想子环”的定理.“Galois 理论”的论述是以多项式理论为基础(而不像一般书籍以近世代数为基础. 本人前述拙作及所见两本英文书亦然). 本人拙作及两本英文书均以数百页篇幅论述 Galois 理论. 但不同的书有不同的体系、术语、记号. 本人已年过古稀亦未细读两本英文本. 此俄文书只以四十多页篇辑论述 Galois 理论(且又讲“Abel 方程”“Galois 群的计算”等其他问题),想必极为简略、费解,故我不想细读. 征求了刘培杰先生意见,不译后三章,读者如对代数方程的根式解及 Galois 理论,圆规、直尺作图可能性(与代数方程之根能否表示为多层二次根式有关),等分圆的可能性及作法等问题有兴趣可参阅本人拙作.

现各校数学系把“数论”列为选修,故译者把本书用到的数论知识及一般课本所无的“多项式恒等同余”“矩阵的直积”“凸函数”“有限群”,列入附录以帮助读者阅读本书.

唯代数并非本人所长,难免有错漏不清之处,唯望有关专家及读者指正.

除个别涉及极为抽象罕见理论极难理解的论述删去外,对一般因阐述不清未能理解或有明显错误未能改正者仍予保留,供有关专家及读者讨论研究,唯望专家、读者提出宝贵意见.

各页脚注全为编译者所加.

◎

目录

多项式的根

第一章

1 对根的不等式

1.1 代数基本定理

现代代数已少用名为“代数基本定理”的论断：复系数 n 次多项式正好有 n 个根（按其重数计算）. 这个论断首先由日拉尔的阿尔伯于 1629 年提出，但他甚至认为不需要证明. D'Alem ber 首先感到代数基本定理证明的必要性，但他的证明（1746 年）不令人信服. Euler（1749 年），方赛泊（1759 年），Lagrange（1771 年）提出了证明，但这些证明并不完善.

代数基本定理第一个令人信服的证明由 Gauss 得到. 他提供了三个不同的证明（1799 年，1815 年与 1816 年），在 1845 年他还提出对其第一个证明的更确切的阐述.

代数基本定理的各种证明综述可在[ТУ] 中找到. 我们只限一种证明. 它利用如下的 Rouche 定理，此定理有其独立的意义.

定理 1.1(Rouche)　设多项式 f 与 g，γ 为复平面上的封闭不自相交的一曲线. 如果对所有 $z \in \gamma$ 有

$$|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)| \tag{1}$$

则在曲线 γ 内部多项式 f 与 g 有相同个数的根（按其重数计算）. ①②

---

① 对俄语人名，或拉丁语系人名之俄语译名未能查出原名者，按俄语音译为中文. —— 译者注

② 应再设 γ 上无 f，g 的根，“γ 内部”指 γ 所围区域.

证 在复平面考察向量场 $v(z)=f(x)$ 与 $w(z)=g(z)$. 从条件(1)可得，在曲线 γ 上每一点 z，向量 v 与 w 不是相反方向.

注意，曲线 γ 对于向量场 v 的指标是点 z 环绕曲线 γ 一周时向量 $v(z)$ 的旋转量(为了更深入了解指标的特性，我们建议阅读书[Πpl]第六章). ①考察向量场 $v_t=tv+(1-t)w$. 这时 $v_0=w$ 与 $v_1=v$. 显然在每一点 $z\in\gamma$ 向量 $v_t(z)$ 非零. ②这意味着，对于曲线 γ 关于向量场 v_t 有确定的指标 $\mathrm{ind}(t)$. 整数 $\mathrm{ind}(t)$ 连续依赖 t，因而 $\mathrm{ind}(t)=\mathrm{const}$，特别地，曲线 γ 关于向量场 v 与 w 的指标相同. ③

不难证明，曲线 γ 关于向量场 v 的指标等于使 $v(x)=0$ 的那些④奇点 z 的指标之和(奇点 z_0 的指标定义为，当 ε 充分少时曲线 $|z-z_0|=\varepsilon$ 的指标). 对向量场 $v(z)=f(z)$，奇点 z_0 的指标等于多项式 f 的根 z_0 的重数. 于是从曲线 γ 关于向量场 $v(z)=f(z)$ 与 $w(z)=g(z)$ 的指标相同可推出，在曲线 γ 的内部多项式 f 与 g 的根的个数相同.

编译者补证上段前二结论：

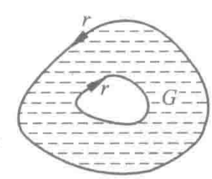


图 1

定义 连通域 G 边界 γ 的正向为：G 的外(内)边界取逆(顺)时针方向(图 1).

引理 若区域 G 的边界及内部无多项式 v 的零点(即根)，则 G 的全边界 γ 关于向量场 $v(z)$ 的指标⑤ $\mathrm{ind}_v\gamma=0$.

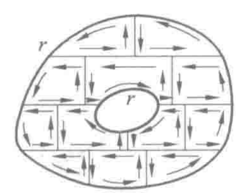


图 2

证 如图 2 所示，对 G 的边界 γ 及 G 内部域组成的闭域(闲集)，其因上 $v(z)\neq 0$，故辐角 $\arg v(z)$ 对 z 连续(在 $v(z)$ 的零点 $\arg v(z)$ 无意义，不连续). 由一致连续性可把 G 分成有限个子区域，使在每个(闭)子区域内 $\arg v(z)$ 的改变量小于 π. 即在每个子区域所有点 z 的像 $v(z)$ 落在复数 v 平面的以原点 O 为顶点的角域内(图 3)，此角域每一点有确定且连续变化的 $\arg v(z)$ 值. 故当点 x 沿上述一子区域的边界按正向旋转一周后，在 v 平面的点 $v(z)$ 回到原处，$\arg v(z)$ 之值与原来相同，即其增量为 0，故这子区域的边界关于 $v(z)$ 的指标为 0. 易见所有子区域的边界关于 $v(z)$ 的指标(0)之和等于 G 的全边界 γ 关于 $v(z)$ 的指标(因在任二子区域的公共边界上 $\arg v(z)$ 的增量相反，互相抵消). 于是引理得证.

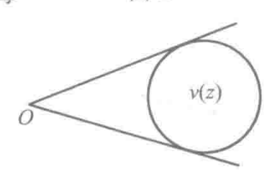


图 3

---

① 即点 z 沿曲线 γ 按逆时针方向环绕一周时 $v(z)$ 的辐角连续增加量对于 2π 的倍数(整数).

② 应加限制：对任何 $t\in[0,1]$. 当 $t=0$ 时 $v_{大}=v$，当 $t=1$ 时，$v_t=w$ 都在 γ 上非 0. 当 $0<t<1$ 时，若 $v_t=0$ 则 $v/w=\dfrac{t-1}{t}<0$，v，w 有相反方向，与上述矛盾.

③ 即 $t=0,1$ 时 $\mathrm{ind}(t)$ 之值相同.

④ 在闭曲线 γ 所围区域内部的奇点，又设在 γ 上无奇点.

⑤ G 的所有(外，内)边界按正向绕行一周后所得相应指标($\arg v(z)$ 的增量除以 2π 所得之商)之和.

定理 设封闭曲线 γ 上无多项式 $v(z)$ 的零点，则 γ 关于多项式 $v(z)$ 的指标等于在 γ 所围区域内部 $v(z)$ 的所有零点重数之和.

证 如图 4 所示，设 $v(z)$ 在所述区域内的零点为 $z_j(j=1,\cdots,m)$，其重数为 n_j，以 z_j 为圆心在所述区域内作充分小半径的圆 c_j，使这些圆域互相分离，则上述区域挖去 m 个圆域后的连通域 G 内无 $v(z)$ 的零点，故其边界（由 γ 及这些圆组成）对 $v(z)$ 的指标为 0. 但其中作为 G 的边界的这些圆取顺时针方向为正向，若 $\mathrm{ind}_v c_j$ 是表按逆时针方向绕 c_j 一周所得指标，则按上引理得

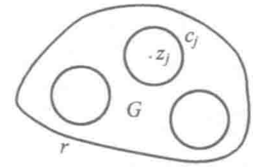


图 4

$$\mathrm{ind}_v\gamma-\sum_{j=1}^{m}\mathrm{ind}_v c_j=0$$

即

$$\mathrm{ind}_v\gamma=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{ind}_v c_j$$

易见 $v(z)=(z-z_j)^{n_j}v_j(z)$，其中 $v_j(z)$ 为多项式，在 c_j 所围闭圆域无零点. 由于积的辐角等于各因式辐角之和，故

$$\mathrm{ind}_v c_j=n_j\,\mathrm{ind}_{z-z_j}c_j+\mathrm{ind}_{v_j}c_j=n_j\cdot 1+0=n_j$$

定理得证.

借助 Rouche 定理不仅可证明代数基本定理，且可得出多项式 f 的任一根的模的估值.

定理 1.2 设多项式 $f(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$，其中 $a_i\in\mathbf{C}$，则在圆 $|z|=1+\max\limits_i|a_i|$ 内部正好有多项式 f 的 n 个根（按其重数计算）.

证 设 $a=\max\limits_i|a_i|$. 多项式 $g(z)=z^n$ 在上述圆的内部有 n 重根 0. 因此只需验证，如果 $|z|=1+a$，则 $|f(z)-g(z)|<|f(z)|+|g(z)|$[①]. 我们甚至证明，$|f(z)-g(x)|<|g(z)|$，即

$$|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|<|z|^n$$

显然，如果 $|z|=1+a$，则

$$\begin{aligned}|a_1z^{n-1}+\cdots+a_n|&\leqslant a(|z|^{n-1}+\cdots+1)\\&=a\frac{|z|^n-1}{|z|-1}=|z|^n-1<|z|^n.\end{aligned}$$ □

1.2 Cauchy 定理

现论述 Cauchy 关于多项式根的定理及其推论、推广.

定理 1.3(Cauchy) 设 $f(x)=x^n-b_1x^{n-1}-\cdots-b_n$，其中所有 b_i 非负，且

① 于是 $f(z)$ 于圆 $|z|=1+a$ 内有 n 个根，又因 n 次多项式 $f(x)$ 不能有超过 n 个根，故 $f(x)$ 正好有 n 个根，即在上述圆外及圆上无根.

它们中至少有一个异于零，则多项式 f 有唯一正根 p（非重根，即单根），而其余所有根的模不超过 p.

证 设

$$F(x)=-\frac{f(x)}{x^n}=\frac{b_1}{x}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}-1$$

如果 $x\neq 0$，则方程 $f(x)=0$ 等价于方程 $F(x)=0$. 当 x 由 0 增加至 $+\infty$ 时，函数 $F(x)$ 由 $+\infty$ 严格减少至 -1. 因此，当 $x>0$ 时，函数 F 正好在一个点 p 取值零，这时

$$-\frac{f'(p)}{p^n}=F'(p)=-\frac{b_1}{p^2}-\cdots-\frac{nb_n}{p^{n+1}}<0$$

因此，p 不是多项式 f 的重根.

余下只要再证，如果 x_0 是多项式 f 的根，则 $q=|x_0|\leqslant p$. 假设 $q>p$. 这时从函数 F 的单调性推出 $F(q)<0$，即 $f(q)>0$. 另一方面，从等式 $x_0^n=b_1x_0^{n-1}+\cdots+b_n$ 推出 $q^n\leqslant b_1q^{n-1}+\cdots+b_n$，即 $f(q)\leqslant 0$，得出矛盾. □

附注：Cauchy 定理与关于非负矩阵的 Perron-Frobenius 定理有紧密的联系（请参阅[Wi]）.

多项式 $x^{2n}-x^n-1$ 有 n 个根，它们的模等于这多项式正根的模. 因此 Cauchy 定理中的结论 —— 各根的模不超过 p，一般来说不能改为各根的模严格小于 p. 但正如奥斯特洛夫斯基所证明，在相当普遍的情况可作上述修改.

定理 1.4（奥斯特洛夫斯基） 设 $f(x)=x^n-b_1x^{n-1}-\cdots-b_n$，其中所有数 b_i 非负且它们中至少有一异于零. 这时如果所有正数 b_i ① 的附标的最大公约数等于 1，则多项式 f 有唯一正根 p，而其余所有根的模严格小于 p.

证 设仅有数 $b_{k_1},b_{k_2},\cdots,b_{k_m}(k_1<k_2<\cdots<k_m)$ 为正数，数 $k_1,\cdots,k_m$ 的最大公约数等于 1，因此可求出整数 $s_1,\cdots,s_m$ 使 $s_1k_1+\cdots+s_mk_m=1$. ②

---

① 原文为“正系数 b_i”，实际上，$-b_i$ 才是系数，下文“系数 $b_{k_1},\cdots$”亦改为“数 $b_{k_1},\cdots$”.

② 由正整数素因数分解唯一性知，几个正整数的最大公约数等于它们的各公共素因数的“在各正整数分解式中的”最低次幂之积，于是易见最大公约数 $(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1})=((a_1,\cdots,a_n),a_{n+1})$.

定理 设有 $n\geqslant 2$ 个正整数 $a_1,\cdots,a_n$，则存在 $b_1,\cdots,b_n\in\mathbf{Z}$，使

$$\sum_{i=1}^{m}a_ib_i=(a_1,\cdots,a_n)$$

证 用归纳法，$n=2$ 时已知结论成立，设结论对 n 成立，则存在 $b,b_{n+1}\in\mathbf{Z}$ 使

$$(a_1,\cdots,a_n)b+a_{n+1}b_{n+1}=((a_1,\cdots,a_n),a_{n+1})=(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1})$$

再由归纳假设知存在 $b_1^*,\cdots,b_n^*\in\mathbf{Z}$，使

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^*=(a_1,\cdots,a_n)$$

取 $b_i=b_i^*b$，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}a_ib_i=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i^*b+a_{n+1}b_{n+1}=(a_1,\cdots,a_n)b+a_{n+1}b_{n+1}$$
$$=(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1})$$

再考察函数

$$F(x)=\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}+\cdots+\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}-1$$

方程 $F(x)=0$ 有唯一正根等于 p. 设 x 为多项式 f 的任一其他根(非零). 令 $q=|x|$. 这时

$$\begin{aligned}1&=\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}+\cdots+\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}\leqslant\left|\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}\right|+\cdots+\left|\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}\right|\\&=\frac{b_{k_1}}{q^{k_1}}+\cdots+\frac{b_{k_m}}{q^{k_m}}\end{aligned}$$

即 $F(q)\geqslant 0$. 这时等式 $F(q)=0$ 可能成立,仅在此情形,当对所有 i 有

$$\frac{b_{k_i}}{x^{k_i}}=\left|\frac{b_{k_i}}{x^{k_i}}\right|>0$$

但在这种情况下

$$\frac{b_{k_1}^{s_1}\cdots b_{k_m}^{s_m}}{x}=\left(\frac{b_{k_1}}{x^{k_1}}\right)^{s_1}\cdots\left(\frac{b_{k_m}}{x^{k_m}}\right)^{s_m}>0$$

即 $x>0$,这与"$x\neq p$ 且 p 为方程 $F(x)=0$ 的唯一正根"相矛盾. 因此 $F(q)>0$,从而由函数 $F(x)$ 对正数 x 的单调性推出 $q<p$. □

从 Cauchy－奥斯特洛夫斯基定理可导出对于正系数多项式的根之模的估值.

定理 1.5 (1)(埃涅斯特诺－卡喀伊) 如果多项式 $g(x)=a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}$ 的所有系数为正数,则对于这多项式的任一根 ξ 有估值式

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}=\delta\leqslant|\xi|\leqslant r=\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}$$

(2)(奥斯特洛夫斯基) 设 $\frac{a_k}{a_{k-1}}<r,k=k_1,\cdots,k_m$[①]. 这时如果数 $n,k_1,\cdots,k_m$ 的最大公约数等于 1,则 $|\xi|<r$.

证 考察多项式

$$\begin{aligned}(x-r)g(x)=a_0x^n-(ra_0-a_1)x^{n-1}-\cdots-\\(ra_{n-2}-a_{n-1})x-ra_{n-1}\end{aligned}$$

由定义 $r\geqslant\frac{a_i}{a_{i-1}}$,即 $ra_{i-1}-a_i\geqslant 0$. 因此按 Cauchy 定理知 r 为多项式 $(x-r)g(x)$ 的唯一正根,而这多项式其余所有根的模不超过 r.

如果 ξ 为多项式 g 的根,则 $\eta=\xi^{-1}$ 为多项式 $a_{n-1}y^{n-1}+\cdots+a_0$ 的根,因此

① $k_1,\cdots,k_m$ 如同定理 1.4 的证中所述.

$$|\xi^{-1}|=|\eta|=\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_{i-1}}{a_i}\right\}=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}\right)^{-1}①$$

即

$$|\xi|=\delta=\min_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}$$

当(2)的条件成立,多项式$(x-r)g(x)$的根r严格大于这个多项式其余所有根的模. □

编译者评述:

(2)的命题的条件结论颇不清楚,亦难以从其极简单之证明得知条件结论之确切含义,据此证明及定理1.4,命题(1)之记号估计为:对非负数集$\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$的正子集$S=\{a_{k_1},\cdots,a_{k_m}\}$,$(k_1,\cdots,k_m)=1$,当$a_k\in S$时$\frac{a_k}{a_{k-1}}<r$,则对$g(x)=a_0x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}$的任一根$\xi$有$|\xi|<r$.

但这时不妨设$k_1,\cdots,k_m$中最大者为k_m,从$a_{k_m}\in S$;若$a_k\in S$,则因$a_{k-1}\geqslant 0,a_k>0$,$\frac{a_k}{a_{k-1}}<r$知亦有$a_{k-1}\in S$.于是知$a_{k_m},a_{k_m}-1,\cdots,a_0\in S$,故

$$g(x)=\sum_{i=1}^{k_m}a_ix^{n-i-1}=x^{n-k_m-1}\sum_{i=0}^{k_m}a_ix^{k_m-i}$$

要证(2)的结论,只要再证最后$\sum$号所表多项式之根ξ的模小于r:显然由(1)知

$$|\xi|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_i}{a_{i-1}}\right\}<r$$

故实际上(2)的命题没多大意义.

若不要求S为$\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$的正子集,而是任意子集,除对所有$a_k\in S$的$a_k,a_{k-1}>0$外其余系数均为0.则命题(2)不成立:如多项式x^4+x^3+8x+8,$S=\{a_1,a_4\}=\{1,8\}$,$a_0=a_1=1>0$,$a_3=a_4=8>0$,余$a_2=0$,$\frac{a_1}{a_0}=\frac{a_4}{a_3}=1<1.1=r$.但有根$\xi=-2$,$|\xi|>r$.

附注:埃涅斯特诺—卡喀伊定理也与Perron-Frobenius定理有联系.

埃涅斯特诺—卡喀伊定理的实质性推广可见于文献[GG],在那里抛弃了实系数的要求且减弱了它们单调增加的要求,但其中定理的表述十分累赘,因此这里不引述.

1.3 Laguerre定理

设$z_1,\cdots,z_n\in\mathbf{C}$为带有单位质量的点,这时点$\zeta=\frac{z_1+\cdots+z_n}{n}$称为点

① 应改为$|\eta|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\left\{\frac{a_{i-1}}{a_i}\right\}$.

$z_1,\cdots,z_n$ 的质心，这个概念可作如下形式的推广. 作把点 z_0 变为 ∞ 的分式线性变换 w，即 $w(z)=\dfrac{a}{z-z_0}+b$①. 求出点 $z_1,\cdots,z_n$ 的象的质心，然后作逆变换 w^{-1}，可用并不复杂的计算证明，结果不依赖 a,b，而我们正好得到点

$$\zeta_{z_0}=z_0+n\left(\frac{1}{z_1-z_0}+\cdots+\frac{1}{z_n-z_0}\right)^{-1} \tag{1}$$

为点 $z_1,\cdots,z_n$ 关于点 z_0 的质心.

点 $z_1,\cdots,z_n$ 的质心位于它们的凸包内部. 这个论断易转移到关于点 z_0 的质心情形，只需把联结点 z_i 与 z_j 的直线改成通过点 z_i,z_j 与 z_0 的圆. 对应于点 ∞（无穷远点）的点 z_0 这时位于凸包之外.

编译者详述及质疑：

① $w=\dfrac{a}{z-z_0}+b$ 的逆变换为 $z=\dfrac{a}{w-b}+z_0$，所述点 ζ_{z_0}

$$\begin{aligned}\zeta_{z_0}&=a\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a}{z_i-z_b}+b\right)-b\right]^{-1}+z_0\\&=a\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{z-z_0}\right)^{-1}+z_0\\&=n\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-z_0}\right)^{-1}+z_0\end{aligned}$$

② 不妨取分式线性变换 $w=\dfrac{1}{z-z_0}+z_0$，则逆变换 $z=\dfrac{1}{w-z_0}+z_0$ 与原变换有同样形式，令 $w_i=\dfrac{1}{z_i-z_0}+z_0$ 为 z_i 的变换象，z_i 为 w_i 的原象. 求(1) 可改写为 $\dfrac{1}{\xi_{z_0}-z_0}+z_0=\dfrac{1}{n}(w_1+\cdots+w_n)$，同样 $w_1,\cdots,w_n$ 关于点 z_0 的质心 w_{z_0} 适合

$$\frac{1}{w_{z_0}-z_0}+z_0=\frac{1}{n}(z_1+\cdots+x_n)$$

即 $z_1,\cdots,z_n(w_1,\cdots,w_n)$ 关于点 z_0 的质心的象（原象）是它们的象（原象）的质心.

又从上述两变换式知（见复变函数论课本）：当动点 $z(w)$ 组成不过点 z_0 的直线时，其象点 w（原象点 z）组成过点 z_0 的圆，当动点组成过点 z_0 的直线时，其象点（原象点）组成过 z_0 的（另一）直线.

③ 式(1) 右边$=\left(\dfrac{z_0}{z_1-z_0}+1\right)+\cdots+\left(\dfrac{z_0}{z_n-z_0}+1\right)\Big/$

$$\left(\frac{1}{z_1-z_0}+\cdots+\frac{1}{z_n-z_0}\right)$$

$$=\left(\frac{z_1z_0}{z_1-z_0}+\cdots+\frac{z_nz_0}{z_n-z_0}\right)\Big/$$

① $a\neq 0$.

$$\left(\frac{z_0}{z_1-z_0}+\cdots+\frac{z_0}{z_n-z_0}\right)$$
$$\to\frac{1}{n}(z_1+\cdots+z_n),\quad 当\ z_0\to\infty$$

即 $z_1,\cdots,z_n$ 的质心可视为它们关于无穷远点的质心.

④ 若联结一个域任二点的线段所有点都属此域,则称此域为凸域.一个集的凸包是包含此集的最小凸集.当 $n\geqslant 3$,点 $z_1,\cdots,z_n$ 在一直线上时,易见它们的凸包是此直线的线段,其两端点是 $z_1,\cdots,z_n$ 中之两点,此两点之外其余各点位于联此两点的线段上;当点 $z_1,\cdots,z_n$ 不在一直线上时,易见它们的凸包是以这些点中若干点为顶点的凸多边形内域,$z_1,\cdots,z_n$ 中其余各点位于此凸多边形内域.当 $n=1(n=2)$,点 z_1(点 z_1,z_2)之凸包为 $\{z_1\}$(为联结 z_1,z_2 的线段).

用归纳法易证点 $z_1,\cdots,z_n$ 的质心在其凸包 Ω 内.

$n=1$ 时,点 z_1 的凸包 Ω 是 $\{z_1\}$,质心是 z_1.结论成立;

设结论对 n 成立.记 ζ_n 为点 $z_1,\cdots,z_n$ 的质心,则

$$\zeta_{n+1}=\frac{1}{n+1}\left(n\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{n}+z_{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}(n\xi_n+z_{n+1})$$

为线段 $\zeta_n z_{n+1}$ 的内分$(n:1)$点,它位于此线段上,又由归纳假设 ζ_n 位于$z_1,\cdots,z_n$ 的凸包内,易见此凸包为 $z_1,\cdots,z_n,z_{n+1}$ 的凸包之子集,于是 ζ_n 及 z_{n+1} 均属后凸包,故线段 $\zeta_n z_{n+1}$ 及其内点 ζ_{n+1} 在此凸包内.

⑤ 但 ④ 中结论不能推广到 $z_1,\cdots,z_n$ 关于(在 $z_1,\cdots,z_n$ 外的)点 z_0 的质心,例如令 $z_1=1+\varepsilon\mathrm{i},z_2=1-\varepsilon\mathrm{i},z_3=-1+\varepsilon\mathrm{i},z_4=-1-\varepsilon\mathrm{i}$,取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$ 时,点 $z_0=\mathrm{i}$,在 z_1,z_2,z_3,z_4 的凸包 Ω(即以这四点为顶点的矩形)域外,由式(1)知这四点关于 i 的质心

$$\zeta=\mathrm{i}+4\left(\frac{1}{1+\varepsilon\mathrm{i}-\mathrm{i}}+\frac{1}{1-\varepsilon\mathrm{i}-\mathrm{i}}+\frac{1}{-1+\varepsilon\mathrm{i}-\mathrm{i}}+\frac{1}{-1-\varepsilon\mathrm{i}-\mathrm{i}}\right)^{-1}$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\zeta\to\mathrm{i}+4\left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}+\frac{2}{-1-\mathrm{i}}\right)^{-1}=\mathrm{i}+4((1+\mathrm{i})+(-1+\mathrm{i}))^{-1}$$
$$=\mathrm{i}+\frac{4}{2\mathrm{i}}=\mathrm{i}-2\mathrm{i}=-\mathrm{i}$$

$-\mathrm{i}$ 不在上述矩形域 Ω 内,于是 ε 充分少时因 $\zeta\to-\mathrm{i}$,ζ 不在域 Ω 内.

定理 1.6 设 $f(z)=(z-z_1)\cdots(z-z_n)$,则多项式 f 的诸根关于任意点 z 的质心由下公式给定

$$\zeta_z=z-\frac{nf(x)}{f'(z)}$$

证 显然