高等院校重点课程教材

偏微分方程

张振宇　张立柱　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

高等院校重点课程教材

偏微分方程

张振宇　张立柱　编著

博学·数学系列

复旦大学出版社
www.fudanpress.com.cn

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程/张振宇,张立柱编著.—上海:复旦大学出版社,2011.11
(复旦博学·数学系列)
ISBN 978-7-309-08537-2

Ⅰ.偏… Ⅱ.①张…②张… Ⅲ.偏微分方程-高等学校-教材 Ⅳ.O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 214307 号

偏微分方程
张振宇 张立柱 编著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海肖华印务有限公司

开本 787×960 1/16 印张 16.75 字数 294 千
2011 年 11 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-08537-2/O·480
定价:35.00 元

“博学而笃志，切问而近思。”

（《论语》）

博晓古今，可立一家之说；

学贯中西，或成经国之才。

内容提要

本书主要介绍波动方程、热传导方程和位势方程定解问题的推导及其求解方法，还对两个自变量的一阶偏微分方程组作了简单介绍．全书共分6章，其基本内容包括：从实际问题出发导出3类方程及其定解条件、二阶线性偏微分方程的分类、线性偏微分方程的叠加原理和定解问题的适定性概念、行波法、分离变量法、微分方程的特征值问题、Fourier变换、Laplace变换、Green函数方法以及两个自变量的一阶线性和拟线性偏微分方程组及它们的Cauchy问题的解法．本书的内容按求解方法进行安排，为了便于读者理解，书中配置了一定数量的例题和习题．本书可作为应用数学和计算数学专业以及物理、化学、生物、金融和经济等学科本科生的基础课教材或教学参考书，也可作为自学读物．

前　　言

偏微分方程的产生和发展与工程实际问题的需求密切相关,已经过了 200 多年的历程.最初,它只研究几种典型的线性偏微分方程典型定解问题,现在已发展成一个研究包含非线性偏微分方程的不适定问题和反问题的庞大而重要的数学分支.它的研究成果不仅推动了数学科学的发展,而且在物理、力学、化学、生物、医学、经济、金融和社会科学等领域中都有重要应用.

本书是在上海财经大学应用数学系五年多教学实践的基础上编写而成的,本书主要介绍线性双曲型、抛物型和椭圆型偏微分方程的代表——波动方程、热传导方程和位势方程定解问题的推导及其求解方法,还对两个自变量的一阶偏微分方程组作了简单介绍.本书的内容不按方程的类型安排,而是按求解方法进行安排,同一种求解方法往往可用于几种不同类型的方程.全书共分六章.第一章介绍从实际问题出发导出三类方程及其定解条件,还介绍了二阶线性偏微分方程的分类、线性偏微分方程的叠加原理和定解问题的适定性概念.第二章结合波动方程的 Cauchy 问题介绍了行波法.第三章介绍了对三类方程定解问题都有广泛应用的分离变量法以及与其相关的 Legendre 多项式、Bessel 函数和微分方程的特征值问题.第四章介绍了 Fourier 变换和 Laplace 变换这两种常用的积分变换方法.第五章结合位势方程的边值问题介绍了 Green 函数方法,并对三类方程作了总结.第六章简单介绍了两个自变量的一阶线性和拟线性偏微分方程组及它们的 Cauchy 问题.为了便于读者理解,书中配置了一定数量的例题和习题,标有 * 号的例题可以不讲.全书由张振宇编写,张立柱对书中的例题和习题作了适当的补充.本书可作为应用数学和计算数学专业以及物理、化学、生物、金融和经济等学科本科生的基础课教材或教学参考书,也可作为自学读物.作为教材,讲完本书的全部内容大约需要 68 课时,实际使用时可根据具体情况作适当的取舍,例如,在对未学过复变函数课程的学生讲授时,可以舍去用共形映照方法求 Green 函数的内容.

本书的主要目的是介绍便于其他有关学科应用的偏微分方程的基础知识,而不是为基础数学专业的学生介绍偏微分方程的理论.本书的数学推导力求严格和详细,以便于教和学.对于较深或需要冗长和复杂数学推导的内容,本书略去其数学推导,只列出结论和相关参考文献.另外,本书还试图让读者了解用本

书介绍的方法解决实际问题的能力. 如在第一章,读者会知道,从实际问题导出的偏微分方程一般都是非线性的,只有在一定限制条件下才会转化为线性方程;还会知道充分光滑的古典解和光滑性不高的广义解都可以是实际问题的解;又如在第五章,读者会知道,实际问题中出现的 Laplace 方程的 Cauchy 问题虽然在一般情况下是不适定的,但对解加上实际问题都能满足的有界性限制条件以后,该问题就变成适定的了,因此所得的解是具有实际意义的. 需要指出的是,由于实际问题的复杂性,虽然直接用本书介绍的方法只能解决其中的部分问题,实际问题的大部分目前都要依靠实验手段和数值方法来解决,但本书介绍的一些基本概念和方法对于数值方法和半解析数值方法却很重要. 如第二章中波动方程解的依赖区域概念和第三章中的分离变量法对于有限差分方法和有限元方法都很重要,又如第五章的部分内容构成了边界积分数值方法(包括边界元方法)的基础. 因此本书的内容对解决实际问题仍具有重要价值.

本书承蒙复旦大学力学与工程科学系的张慧生教授审稿,在此我们深表感谢.

由于水平有限和教学实践的不足,本书的缺点和错误在所难免,恳请同行和读者批评指正.

编者

2011 年 4 月于上海财经大学

目　　录

第一章　偏微分方程的定解问题

§1.1 引　言

1.1.1　本书主要研究内容

本书主要研究 3 类典型的偏微分方程——波动方程、热传导方程、位势方程——定解问题的导出及其求解方法.一方面是因为这 3 类方程描述了大量的物理现象,求解它们可以解决许多工程实际问题;另一方面是因为它们既比较简单,容易入手,同时又是研究其他更复杂的偏微分方程的基础.

1.1.2　偏微分方程的一些基本概念

设未知函数的自变量不止一个.称含有未知函数偏导数的方程为偏微分方程.方程中涉及的偏导数的最高阶数称为该偏微分方程的阶数.若偏微分方程关于方程中所出现的未知函数及其各阶偏导数都是线性的(一次的),则称此偏微分方程是线性的.例如

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+a(x,\ y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+b(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x,\ y)u=f(x,\ y),$$

就是一个三阶线性偏微分方程.线性偏微分方程中不含未知函数及其导数的项 $f(x,\ y)$称为自由项.自由项为零的线性偏微分方程称为齐次线性偏微分方程.

称不是线性的偏微分方程为非线性偏微分方程.若非线性偏微分方程关于其最高阶偏导数是线性的,则称它是拟线性偏微分方程.例如

$$a\left(x,\ y,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(u)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\left(x,\ y,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

就是一个二阶拟线性偏微分方程,但非线性偏微分方程

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)^2=u$$

则不是拟线性的.

若某函数具有偏微分方程中所出现的各阶连续偏导数,且代入方程后成

为一个恒等式,则称此函数为该偏微分方程的一个解(古典解). 一般情况下,偏微分方程的解有无穷多个,只有当解满足一定的初始条件和边界条件(总称为定解条件)时,它才是唯一的. 称满足定解条件的偏微分方程的求解问题为定解问题. 在实际问题中,我们总是在一定的定解条件下求解偏微分方程的定解问题.

例 1　设 $u=u(x,\ y)$, 求二阶线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$$

的一般解.

解　把所给方程改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0,$$

两边对 x 积分得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\int\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x=\int 0\mathrm{d}x+\varphi(y)=\varphi(y),$$

其中 $\varphi(y)$为任意函数. 两边再对 y 积分,得方程的一般解为

$$u=\int\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y=\int\varphi(y)\mathrm{d}y+f(x)=f(x)+g(y),$$

这里 $f(x)$, $g(y)$是两个任意一阶连续可微函数. ■

例 2　求方程 $t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}+2\dfrac{\partial u}{\partial x}=2xt$ 的通解.

解　令 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=v$, 则方程可化为

$$t\frac{\partial v}{\partial t}+2v=2xt.$$

把 x 看成参数,则这是一个一阶线性常微分方程,可解得

$$\begin{aligned}v&=\exp\left\{-\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right\}\left[G(x)+\int 2x\exp\left\{\int\frac{2}{t}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}t\right]\\&=\frac{1}{t^2}\left[G(x)+\frac{2}{3}xt^3\right],\end{aligned}$$

这里 $G(x)$是任意函数. 再对 x 积分得

$$u = \frac{1}{3}x^2 t + \frac{F(x)}{t^2} + H(t),$$

这里 $F(x)$和 $H(t)$是两个任意一阶连续可微函数. ■

习题 1.1

1. 对于下列各偏微分方程,试确定它是线性的,还是非线性的.如果是线性的,说明它是齐次的,还是非齐次的,并确定它的阶.

   (1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\dfrac{\partial u}{\partial y} = y$;

   (2) $u\dfrac{\partial u}{\partial x} - 2xy\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

   (3) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$;

   (4) $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0$;

   (5) $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \ln u = 0$.

2. 设 $f(v)$是一连续可微函数,证明:函数 $u = f(xy)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

3. 设 $f(x)$和 $g(x)$二阶连续可微,证明:函数 $u = f(x)g(y)$ 满足方程

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

§1.2 弦的微小横振动

偏微分方程定解问题的导出方法有两种:一种方法是变分法;另一种方法是基于自然界3大守恒定律(质量守恒、动量守恒、能量守恒)的推导方法.第二种方法更具有普遍性,但用这种方法导出的方程往往不封闭(即未知函数的个数大于方程的个数),要使方程封闭,往往需要补充针对具体问题用实验方法导出的经验方程.本课程主要用第二种方法推导偏微分方程的定解问题.作为例子,首先导出弦的微小横振动方程及其定解问题.

1.2.1 弦的微小横振动的定义

所谓弦,指的是一根弹性的细线,它对弯曲变形不产生任何抵抗力,仅当其

长度发生变化时,才会产生弹性恢复力(张力).弦的横振动是指弦上各质点的位移都发生在同一平面内,且位移都与弦线平衡位置所在的直线垂直.

设一根张紧的弦,其长度为 l,由于某外界的作用,它在其平衡位置附近作横振动.将其平衡位置取为 x 轴,其一端取为坐标原点,其横振动所在平面取为 x-u 平面,其中 $u=u(x,t)$ 为弦上任一点 x 在时刻 t 的位移.弦的微小横振动是指

$$|u|,\ \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|,\ \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|,\ \cdots \ll 1.$$

1.2.2 弦的微小横振动方程的导出

设弦的线密度为 ρ. 由于弦作横振动,故 ρ 与 t 无关,仅是 x 的函数:$\rho=\rho(x)$. 又设弦在水平方向不受外力作用,仅在垂直方向上受外力作用,且记平衡位置时单位长度上所受外力为 $F(x,t)$. 此外,弦上还有一种抵抗长度变化的内力——张力.如图 1.1 所示,记弦上任一点 x 处,在 t 时刻左边部分受右边部分的作用力为张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$,其大小为 $T(x,t)$,方向为弦在那点的切线方向(因弦对弯曲变形无抵抗力),则左边部分对右边部分的作用力为 $-\boldsymbol{T}(x,t)$. 张力 $\boldsymbol{T}(x,t)$ 的水平分量和垂直分量分别为 $T\cos\alpha$ 和 $T\sin\alpha$,其中 α 为 $\boldsymbol{T}$ 与 x 轴正向的夹角,满足 $\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$. 利用弦的微小振动的假设,略去高于一阶的小量,可得

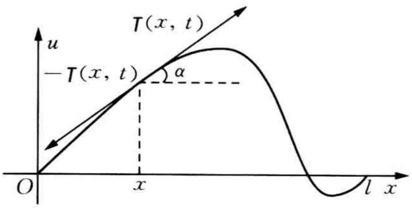

图 1.1 弦线的张力

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}=\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\cdots\approx 1,$$

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha\approx\frac{\partial u}{\partial x}.$$

如图 1.2 所示,考虑弦在振动过程中的某一段$[x_1,x_2]$.这时,对于弦段$[x_1,x_2]$来说,右端点处右边部分对左边部分的作用力 $\boldsymbol{T}(x_2,t)$ 以及左端点处左边部分对右边部分的作用力 $-\boldsymbol{T}(x_1,t)$ 都成了外力.研究弦段$[x_1,x_2]$在水平方向力的平衡:

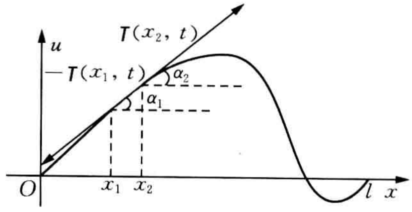

图 1.2 弦段所受张力

$$T(x_2, t)\cos\alpha_2 + [-T(x_1, t)\cos\alpha_1] = 0.$$

由于 $\cos\alpha_1 \approx 1$, $\cos\alpha_2 \approx 1$，由上式得

$$T(x_1, t) = T(x_2, t) = T(t).$$

又由于弦的微小振动，$|u|$，$\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}\right| \ll 1$，在振动过程中，弦的长度变化很小，弦在振动过程中的张力 $T(t)$ 可近似取为平衡位置时张紧弦的张力 $T = T(0)$.

现研究弦段 $[x_1, x_2]$ 在 $[t_1, t_2]$ 时段内沿垂直方向的动量守恒. 注意到垂直方向的位移为 $u(x, t)$，故速度在垂直方向的分量为 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$. 于是，弦段在 $[t_1, t_2]$ 时段内沿垂直方向动量的增量为

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_2} \mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1} \mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_2} - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\right) \mathrm{d}x.$$

在 $[t_1, t_2]$ 时段内，弦段所受外力在垂直方向的冲量为

$$\int_{t_1}^{t_2} T\sin\alpha \,\big|_{x=x_2} \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} (-T\sin\alpha)\,\big|_{x=x_1} \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由动量守恒定律——动量的增量＝外力的冲量，得

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_2} - \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=t_1}\right)\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_2} - \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}\right)\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F(x, t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

(1.1)式称为弦振动问题动量守恒的宏观表达式，此式只要求未知函数 $u(x, t)$ 的一阶偏导数可积就可以了. 若未知函数 $u(x, t)$ 充分光滑，则(1.1)式可以写成

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}\left[T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由 $[t_1, t_2]$，$[x_1, x_2]$ 的任意性，得弦振动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t). \tag{1.2}$$

设弦线均匀，则 ρ＝常数，又记单位质量弦线所受外力(加速度量纲)为 $f(x, t)$