

中小学教学艺术丛书

刘显国 主编

胡重光 编著

小学数学解题 训练艺术 II

中国林业出版社

中国早期数学丛书

第1001册

1001

小学
数学
解题
训练
艺术

中国数学出版社

中小学教学艺术丛书

小学数学解题训练艺术（Ⅱ）

胡重光 编著

中国林业出版社

内容简介

本书从观察的艺术、枚举的艺术、列表的艺术、分类的艺术、图示的艺术、尝试的艺术、转换的艺术、假设的艺术、探索的艺术、运用模型的艺术等十个方面阐述了小学数学解题的方法、技巧。内容深入浅出,系统全面,附有详细的例解和配套习题以巩固对解题艺术的掌握。为小学数学老师和学生的良师益友。

图书在版编目(CIP)数据

小学数学解题训练艺术. 2/胡重光编著. —北京:中国林业出版社, 2000

(中小学教学艺术丛书/刘显国主编)

ISBN 7-5038-2351-8

I. 小… II. 胡… III. 数学课-小学-解题 IV. G624.505

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2000) 第 01317 号

出版: 中国林业出版社 (100009 北京西城区刘海胡同 7 号)

E-mail: cfphz@public. bta. net. cn 电话: 66184477

发行: 新华书店北京发行所

印刷: 北京市昌平百善印刷厂

版次: 2000 年 2 月第 1 版

印次: 2002 年 5 月第 3 次

开本: 880mm×1230mm 1/32

印张: 6.375

插页: 2

字数: 200千字

印数: 8001~13000 册

定价: 12.00 元

“九五”国家级重点课题
“面向 21 世纪我国中小学教师队伍建设研究”
子课题“教师教学艺术研究”

主持人·刘显国

中小学教师教学艺术丛书

主编 刘显国

- | | |
|------------|-------------------|
| ■ 语文备课艺术 | ■ 活动课教学艺术 |
| ■ 数学备课艺术 | ■ 多媒体设计运用艺术 |
| ■ 说课艺术 | ■ 教法选择艺术 |
| ■ 开讲艺术 | ■ 评课艺术 |
| ■ 板书艺术 | ■ 培养能力艺术 |
| ■ 掀起小高潮艺术 | ■ 语文练习设计艺术 |
| ■ 激发兴趣艺术 | ■ 数学练习设计艺术 |
| ■ 课堂组织艺术 | ■ 复习课艺术 |
| ■ 课堂调控艺术 | ■ 小学数学解题训练艺术 (I) |
| ■ 课堂提问艺术 | □ 小学数学解题训练艺术 (II) |
| ■ 结尾艺术 | ■ 小学作文训练艺术 |
| ■ 教改教研艺术 | ■ 初中数学解题训练艺术 |
| ■ 反馈教学艺术 | ■ 初中物理解题训练艺术 |
| ■ 学法指导艺术 | ■ 初中化学解题训练艺术 |
| ■ 语文德育渗透艺术 | ■ 初中作文训练艺术 |



作者简介

胡重光，1950年生。1976年毕业于湖南师院数学系。现为湖南省第一师范学校教科所副教授，《湖南第一师范学报》副主编。从事小学数学教学研究十几年，有深厚的理论基础、丰富的实践经验和独到的学术见解。主编和参编的主要著作有：《小学数学教学专题讲座》、《小学数学奥林匹克训练》、《小学数学教育学》、《小学数学教材分析》等，并在各级杂志上发表论文数十篇。主持湖南省“九五”基础教育科研课题“现代活动教学与学生素质全面发展”取得显著成效。



教学艺术美（代序）

全国反馈教学法研究会 刘显国

教学之所以称为一门艺术，是因为课堂教学给予充分自由创作的余地，可以像美术家、音乐家、艺术家以及文学家和诗人那样，进行艺术创造。教学是一门艺术。而缺乏创造性的艺术，必然显得单调与枯燥。它的创造不仅以独特的个性来发挥和施展自己的才能，还必须与学生配合。学生既是这一创作活动的对象，又是这一创作活动积极的参与者和主要的受益者。这种艺术创作的成果，不是被人称颂的巨幅画卷，不是流传百世的乐章，也不是脍炙人口的诗文名著，而是年轻一代的灵魂，未来世界的主人。教学艺术是教师钻研教材、研究学生、进行创造性劳动的智慧之果。这种传递人类文化与文明、发展人的体魄与智慧、塑造人的心灵的艺术，是通过教师的心血和双手在孩子们的身上精心描绘来进行的，是社会的综合性艺术，是艺术中的艺术。

歌唱家唱出的歌声很美，服装色彩很美，舞台形象很美，一出台就会征服观众，人们可以享受听觉、视觉等感官上富有的神韵的综合美。一曲终了，观众如梦初醒，尽情地鼓掌，这就是演员综合艺术美的魅力的体现。

1998年在深圳举行的全国反馈教学艺术大奖赛，来自全国30名教坛新秀，在2000多人的会场上讲课，生动感人的语言美，活泼开朗的性格美，充满青春活力的形象美，他们讲的课不也是征服了听众吗？大家不是也从他们那儿享受着课堂艺术美吗？他们的课刚结束，人们不也是用掌声、笑声和赞扬声评价他们的综合艺术美吗？

教师虽不是演员，但面对学生讲课同演员面对观众演唱有着异曲同工的作用。一个是以歌声打动人的心弦，一个是以语言启动人们的思维，一个在舞台上，一个在讲台上，一个是面对成千上万的观众，一个是面

对全班学生,演员和教师都肩负着教育人、鼓舞人、塑造人的重任。优秀教师的课为什么人们爱听、爱看、受到启发,能给听众留下强烈的印象,原因就在于课堂教学艺术。

《课堂教学艺术丛书》就是从老师的备课艺术、开讲艺术、板书艺术、语言艺术、提问艺术、组织教学艺术、练习设计艺术、课堂结尾艺术等方面,专题进行研讨,一共20余册,集中研究课堂教学艺术,这种艺术又集中表现在教学内容美、教学结构美、教学情感美、板书艺术美、课堂气氛美、教学语言美、教学节奏美等方面。

一、教学内容美

科学知识本身就是一种艺术,包含真与美。通过教材内容所提示的哲理,所归纳出的规律性的知识,以及这些知识的应用价值,能使学生产生一种满足感。教师讲课要像磁石一样,始终牢牢地吸引住学生,使学生的思维活动和情绪同教师的讲课交融在一起,这一切凭借的是知识本身对学生的吸引力。

教师要善于从教材里感受美,提炼美。如数学,如果从美学角度看,数学是一个五彩缤纷的美的世界。英国哲学家罗素说过:“数学,如果正确地看它不但拥有真理,而且有至高的美。”如数的美、式的美、形的美、比例的美、和谐的美……连美术上的比例美、节奏美都是数学上的黄金分割的应用。就圆周长公式 $C=2\pi r$ 来说,它体现了圆周长和半径之间存在的一种简洁、绝妙、和谐的关系。它是数学家的心灵智慧撞击所迸发出来的一种庄严、永恒和宏伟的美。

知识本身潜在的美,是不会自发地起作用的。教师的任务在于挖掘美、渲染美。也就是说,要帮助学生去揭示知识中包含的美、再造美,使原有的美更添色彩。

二、教学的结构美

教学过程的美首先是指教师和学生具体教学活动中所表现出的丰富创造性。师生在教学活动中多种心理能力的协同作战,实现理性因素和非理性因素的交融,从而形成一种活跃、生动的教学气氛。

教师要善于在教学主体部分的一定发展阶段精心安排“小高潮”,会使学生兴奋、愉悦、沉思、体味,在读说写或读说算的训练中,智力宝

库得到有力开发，智慧花蕾悄然绽放。

教学过程的美还指教学在动态中形成的具有美的特征的组合形式，即和谐的教学过程结构。这种结构是由教和学双边活动的协调统一所形成的。教学中的完整性、有序性、节奏性等等，都是和谐的教学过程结构的必备因素，也是其美的核心。

三、教学情感美

情感是教学艺术魅力形成的关键因素。没有真挚、强烈的感情，不可能把课上得成功。教师的感情，犹如诗人的诗兴，犹如一切艺术家的强烈的创作欲望。当他对教材、学生了如指掌时，当他视学生美好形象点燃激情的火焰时，感情激动了，灵感产生了，课堂气氛激活了，教学效果就最佳。教师没有真挚、强烈的感情，没有鲜明的爱憎，没有骨鲠在喉、不吐不快的冲动，是不可能用他的语言去征服学生的。

纵观课堂教学，不难发现，有的教师上课，课堂是晴空万里，艳阳高照，学生就像春天的鲜花，婷婷玉立，抖擞精神。而有的教师上课，课堂乌云密布，雷雨交加，学生就像是暴风雨中的麦苗，趴在课桌上，无精打采。

为什么同一个班的学生，不同的教师上课，学生的学习情绪迥然不同？这就是教学艺术，是教师调节情绪的艺术，是一种“阴转晴”的艺术。

教师丰富、纯洁而高尚的情感，可以左右学生的思想。因此，教师在教学中要始终把握自己的情感。按照情感转移原理，教师先入情——动情——析情——移情。根据这一感情发展过程组织教学就能激发学生的情感。有的教师讲课情并茂，注重熏陶感染，教师踏进教室就像演员走进摄影棚一样，立刻进入角色，用自己的巨大热情和对学生的关心，对知识的酷爱，对教学的责任感，去激起学生相应的情感体验，使学生体会到教师对自己的爱护和帮助，从而更好地接受教育，接受所传授的知识。

心理学家认为，兴趣与爱好就是一种同愉快情绪相联系的认识倾向性与活动倾向性，当学生情绪高昂时，他就有良好的情趣去学习他所学的东西，效果也特别好。可以说情感是学生乐学、爱学、勤学、巧学的

内在动力。师生之间的情感，给人的一生会留下不可磨灭的记忆。

四、板书艺术美

板书是教师在备课中构思的艺术结晶，是学生感知信息的视觉渠道，是发展学生智力和形成良好的思想品质的桥梁和工具。好的板书不仅在内容上概括剖析，恰到好处，自成一体，浑若天成，而且在形式上因内容不同，重点不同，各具特色，结构精巧，情趣横生。它以确切的科学性，指导学生学习课文，又以独特的艺术魅力，给学生以美的熏陶，美的享受，美的启迪，堪称教学艺术的再创造。

好的板书是课堂教学的“集成块”，它集教材编者的“编路”、课文作者的“文路”、教师的“教路”和学生的“学路”于一体，是教师的微型教案。

好的板书，它要求教师必须根据教材特点，讲究艺术构思，做到形式多样，让学生有自由支配的时间，这样就能达到“此时无声胜有声”的功效。内容系列化、结构整体化、表达情境化，同时，它还要求教师根据教学实际，遵循板书的基本原则，具有明确的目的性、鲜明的针对性、高度的概括性、周密的计划性、适当的灵活性、布局的美观性、内容的科学性、视觉的直观性，这样，才能给学生以清晰、顺畅、整洁、明快的感觉。要做到这一点，还必须做到：

内容美——从用字遣词上看，准确无误，内容精炼；从整体上看，线索分明，重点突出。

形式美——布局合理，排列有序，条理清楚，具有立体美、对称美、奇异美、多样美、和谐美和造型美。

书法美——字迹工整，一丝不苟，合乎规范，美观大方，使学生受到美的陶冶。

五、课堂气氛美

好的课堂气氛，令学生如沐春风，如饮甘泉，人人轻松愉快，个个心驰神往。

在课堂上，往往看到这样两种不同的场面：有的教师精神饱满，生动传情，学生情绪高涨，注意力集中，教与学双方都沉浸在一种轻松愉快的气氛之中，都积极开启智能的机器，共同探索着知识之谜。有的教

师则不甚得法，讲得唇干舌燥，声音嘶哑，而学生则木然置之，毫无反应，整个课堂犹如一潭死水。

好的课堂艺术气氛应是：

有疑问——在课堂上教师要创设问题情境，用疑问开启学生思维的心扉。

有猜想——通过猜想，在头脑中形成一种求知的心理定势。

有惊讶——在课堂上教师要善于释疑学生的迷惘，轻轻点拨后茅塞顿开，心理惊叹不已，惊讶中有说不出的喜悦之情。

有笑声——老师的课堂讲述要生动有趣，幽默诙谐，使得学生不时发出会心的笑声。

有争议——教师要鼓励学生大胆质疑，让学生围绕中心各抒己见，把问题弄明白。

有沉思——在关键问题上教师要留出“空白”让学生探索。

有联想——教师不要把课讲绝了，要留有余地，让学生联想，要透过有限去展现无限。

六、教学语言美

语言是完成教学任务的主要工具，教师的语言美在很大程度上决定着学生学习的效率，教师的语言生动、形象、幽默、风趣、逼真、亲切、自然、充满情和意，学生听了便“如临其境，如见其人，如闻其声”，使教材化难为易，学生得到美的享受。

教师要善于运用自己的声调，以便准确、生动地表达自己的思想和感情，赏心悦目，在潜移默化中受到陶冶、激励和鼓励。教师要善于将教学语言的科学性和教育性，用艺术化的优美形式和方法诉诸学生的感官，使之入耳、入脑、入心灵。

课堂教学效果好坏，虽然受多种因素的影响，但教师的语言艺术往往起到特别重要的作用。特别是教学语言要精当，思路要清晰，讲解抽象的知识必须用生动的事例、直观形象的语言，让学生在语言产生的视觉效应下唤起表象或产生联想和想象。点拨时语言要富有启发性和思考性，给学生一种似隐似现、若明若暗之感，使其有所思、有所想、有所悟，读题、谈话、讲解时语言要运用得体，快慢适度、能突出知识逻辑

重音，字字清晰，声声入耳，讲话要有艺术效果，有幽默感，或开宗明义，或含蓄婉转，或说理比喻，讲解和论述思路正确清晰，论证简洁严密。

七、教学节奏美

教学节奏美能减轻学生身体的劳累，并唤起他们追求新知识的喜悦感。

教学节奏美还表现为对教材内容的处理与安排富有弹性，即有起有伏。教师要根据学生在课堂的反映来调节节奏，使学生的情绪具有弹性。如教师在讲述一些要领阐述一些基本原理时，总是毫不含糊，一字一顿地讲。听这样的内容，学生的思维活动往往是很紧张的，为了把教学组织得十分严密，让学生一字一句不漏地听进去，并记在笔记本上，他们需要高度集中注意力，如果一连两节课让学生处于这样的紧张中，大脑会由于承受不了过重的负担，而转为抑制，兴趣就会降低。因此，在内容的安排上要适度，把一些有趣、新颖、生动的内容穿插进去，使学生的情绪有张有弛。教学在进行了一段以后，让学生有静心回味的的时间，课进行到一阶段后，要让学生有自由支配的时间，这样就能达到“此时无声胜有声”的功效。

课堂教学处处充满着美，教师应引导每个学生从教材、教学、学习中发现美，寻找美，感受美。愿我们的课堂教学都充满教学艺术美，让我们的学生都能享受到教学艺术美。

《中小学教师教学艺术丛书》是在“九五”国家级重点课题“面向 21 世纪我国中小学教师队伍建设研究教师教学艺术研究”成果的基础上，集全国优秀中小学教师的教学艺术成就著集而成，共 20 多分册，至 2000 年底由中国林业出版社陆续出齐并公开发行，旨在提高广大教师的教学艺术水平，促进全面实施素质教育。

新的世纪即将到来，当站在世纪之交的时代制高点远眺时，我们相信，21 世纪将是教学艺术的世纪。

前 言

目前中小学数学的解题教学中，存在着机械练习，只重解题数量的偏向。教师教给学生一些解题所需的定理、公式，讲几道例题，就让学生大量解题，而忽视对解题的一般方法的教学，结果事倍而功半。

伟大的法国数学家笛卡尔有一句名言：“最有价值的知识，是关于方法的知识。”他所说的方法是指指导思维的一般方法，它能帮助我们正确地分析问题，找出解决问题的途径，具有广泛的适用性。

本书所介绍的就是这样的方法，这些方法是作者在小学数学竞赛培训中长期探索的结果。每种方法都是简单的，近于常识，但如果善于运用它，却能产生神奇的效果。本书通过精心选择的例题介绍了运用这些方法的艺术，并配以恰当的练习。掌握了这些方法就能举一反三，收到事半功倍的效果。

作者

目 录

1 观察的艺术	(1)
1.1 找特点	(1)
1.2 找规律	(11)
1.3 找关系	(18)
2 枚举的艺术	(29)
2.1 顺序枚举	(29)
2.2 列表枚举	(32)
2.3 分支图枚举	(34)
3 列表的艺术	(43)
3.1 列表分析	(43)
3.2 列表推理	(48)
4 分类的艺术	(54)
4.1 分类计数	(54)
4.2 分类枚举	(60)
4.3 分类分析	(63)
4.4 奇偶性分类	(66)
5 图示的艺术	(74)
5.1 线段图	(74)
5.2 长方形图	(81)
5.3 关系图	(84)
5.4 交集图	(87)
6 尝试的艺术	(93)
6.1 尝试探求	(93)
6.2 尝试猜想	(96)
6.3 尝试逼近	(100)
7 转换的艺术	(104)
7.1 数式转换	(104)

2 目 录

7 转换的艺术	(104)
7.1 数式转换	(104)
7.2 图形转换	(115)
7.3 问题的转换	(125)
7.4 量的转化	(128)
8 假设的艺术	(133)
8.1 鸡兔问题	(133)
8.2 鸡兔问题的推广	(137)
8.3 假设法的灵活运用	(140)
8.4 假设推理	(143)
9 探索的艺术	(148)
9.1 列关系式	(148)
9.2 找突破口	(152)
9.3 倒推	(157)
9.4 特殊化	(161)
10 运用模型的艺术	(167)
10.1 乘法原理	(167)
10.2 抽屉原理	(170)
习题提示和参考答案	(177)

1 观察的艺术

谈到数学家的思维过程，科学的历史却广泛地确认了一条简单的事实：观察在他们的思索过程中，有着重要的地位并起着很大的作用。

——法国数学家 厄米特

人们认识事物的第一步，就是观察。由观察我们可以认识周围物体的许多性质。观察也是数学学习和研究的基本方法。当然，数学的观察有其特点，有其艺术。本章我们将介绍数学观察的几项主要艺术。

1.1 找特点

一个画家能用寥寥几笔就把一个人画得很像，原因是他用敏锐的观察抓住了这个人的特点。像其他事物一样，许多数学问题也有它的特点，抓住这些特点往往能使困难的数学问题迎刃而解。善于发现数学问题的特点，是数学观察的重要艺术。

【例 1】 右边是一个乘法算式，问：当乘积最大时，所填的四个数字的和是多少？

$$\begin{array}{r} \square \square \\ \times \quad 5 \\ \hline \square \square \end{array}$$

【分析和解答】 观察这个算式可以发现一个特点：一个两位数乘以 5 后，积仍然是一个两位。因为 $20 \times 5 = 100$ ，所以要使积最大，这个两位数一定是 19。于是积是 $19 \times 5 = 95$ ，四个数字的和是 $1 + 9 + 5 + 9 + 5 = 29$ 。

【例 2】 在右边的加法竖式中，不同的汉字代表不同的数字，请把这个算式还原成数字算式。

$$\begin{array}{r} \text{兵炮马卒} \\ + \text{兵炮车卒} \\ \hline \text{车卒马兵卒} \end{array}$$

【分析和解答】 首先我们观察到，这个算式也有个类似的特点：两个四位数相加，和是五位数。由此断定千位相加一定进了位，因为两个数字相加，和小于 20，所以“车”=1；其次一个明显的特点是，个位两个“卒”相加，和的个位仍是“卒”，这只有 0 才能办到，所以“卒”=0；再从两个“兵”相加，

和的个位是0,立即可以确定“兵”是几。其他数字就容易确定了,这里从略。

【例3】 在右边的减法竖式中,□代表被擦掉的数字,请填上□中的数字。

$$\begin{array}{r} 109\square \\ - \square\square5 \\ \hline \square5 \end{array}$$

【分析和解答】 (1)从减数和差的个位都是5这一特点看出,被减数的个位是0,并且十位退了位;

(2)从被减数有四位,减数有三位,而差只有两位可以看出,减数的百位是9,并且被减数的百位退了位;

(3)从被减数的十位是9而百位退了位,可以断定减数的十位是9,差的十位也是9。

复原后的算式请读者自己写出来。

【例4】 右边是一个乘法竖式,“趣味数学”四个字代表互不相同的四个数字。每个□盖住了一个数字,它们可以相同,也可以不同。请写出这个竖式。

$$\begin{array}{r} \text{趣 味 数 学} \\ \times \text{趣 味 数 学} \\ \hline \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \\ \square\square\square\square \\ \hline \square\square\square\square\square\square\square\square \end{array}$$

【分析和解答】 (1)因为乘数是四位数,而竖式中只有三行积,缺第二行积,所以“数”=0;

(2)由于三行积相加时最高位进了位,所以第三行积的最高位是9,而这个9是“趣”乘“趣”的积,所以“趣”=3;

(3)因为三行积都是四个数字,所以相乘时积的最高位都没有进位,由此可知“味”、“学”都小于4,因此只能是1或者2;

(4)由于三行积相加时,最高位进了位,而这一位只有一个数字9,所以下一位的两个数字相加肯定进了位。如果“味”=1,那么这一位上的两个数字都是3,相加不能进位,所以“味”=2。最后,“学”只能是1。

这样,我们得出“趣味数学”四个汉字代表3021。通过计算,其他数字就都可以确定了。

【例5】 在右边算式的□中填上适当的数字,使算式成立。

【分析和解答】 在除法算式中,只要确定了除数和商,被除数就知