高等学校数学系列

李代数及李超代数的表示与结构

李 立 马丽丽 著

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

李代数及李超代数的表示与结构

李　立　马丽丽　著

哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书主要讨论无限维李代数及模李超代数的表示与结构，其中包括作者近年来在李代数及李超代数方向的研究成果. 在无限维李代数的研究中，构造了Clifford代数，通过构造的Clifford代数给出了无限维李代数的统一的顶点算子表示；然后通过构造有限型的未定Weyl群，给出了无限维李代数$IX_r(a)$的Weyl群的表示. 在模李超代数的研究中构造了模李超代数U及$\overline{U}$，确定了其导子超代数；并推广研究了Z_{2m}-阶化广义李超代数的导子超代数的结构.

本书可作为数学系、计算机系的研究生教材，也可供相关专业的本科生、研究生、教师及有关的科研工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

李代数及李超代数的表示与结构 / 李立，马丽丽著.
—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2011.8
ISBN 978-7-5661-0231-7

Ⅰ. ①李… Ⅱ. ①李… ②马… Ⅲ. ①李代数-表示(数学) Ⅳ. ①O152

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第169375号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 12.25
字　　数 257千字
版　　次 2011年8月第1版
印　　次 2011年8月第1次印刷
定　　价 25.00元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

李代数是挪威数学家 M. S. Lie 在 19 世纪后期研究连续变换群时引进的一个数学概念. 可用李代数语言表述的最早事实之一是关于哈密顿方程的积分问题,经过一个世纪,特别是 19 世纪末和 20 世纪前叶的许多数学家的卓有成效的工作,李代数本身的理论才得到完善,并且有了很大发展. 在物理学中,为了建立相对论的费米子与玻色子的统一理论,1974 年 Wess 和 Zumino 提出了超对称性,将普通时空满足的 Poincarè 李代数扩充为超 Poincarè 代数,于是将有限个具有不同内部量子数的玻色子与费米子放在李超代数的一个不可约表示中,从此关于李超代数的研究有了迅速发展.

无论就其理论的完善性还是就其应用的广泛性来说,李代数及李超代数都是一个非常重要的数学分支. 它的理论和方法已经渗透到数学和理论物理的许多领域.

在无限维李代数的理论中,一个非常重要的问题就是按照多项式环上的乘法和微分算子形式给出李代数的实现. 在 1978 年,Lepowsky 和 Wilson 首次给出了 $A_1^{(1)}$ 型仿射李代数的顶点算子实现,在那里顶点算子是由多项式环 $\mathbb{C}[x_1,x_3,x_5,\cdots]$ 上的乘法和微分算子构造的. 很快,Lepowsky-Wilson 的实现在文献[1]中被推广到 A,D,E 型的无扭仿射 Kac-Moody 李代数. 在 1980 年,另一个重要的实现被 Kac Frenkel 和 Segal 获得,自从那时起顶点算子上升到了更加重要的地位. 在文献[1]和文献[2]中的顶点算子实现通常叫做主实现,而在文献[3]和文献[4]中的实现通常叫做齐次实现,这些实现也叫做 bosonic 实现. 在文献[5]中,另外一个重要的顶点算子实现是通过使用 Clifford 代数而获得的,这种实现叫做 fermionic 实现. 研究无限维李代数的顶点算子表示在李代数和顶点算子代数理论中具有十分重要的意义,因而我们构造了 Clifford 代数,进行了无限维李代数的顶点算子表示的某些研究工作.

从数学角度来看,在非模李超代数(即特征零的域上的李超代数)的研究中,具有深远影响的结果是 V. G. Kac 在 1977 年完成的特征零代数闭域上有限维单李超代数的分类. 由于非模李超代数的研究已经取得了相当丰富的结果,近年来人

们开始致力于考虑模李超代数(即素特征域上的李超代数)的问题的研究. 目前,模李超代数的研究结果较少,早期文献是由 D. Leites, Y. Kochetkov, V. M. Petroradski 等人于 1992 年发表的文章[6,7]. 文献[7]中对模李超代数引入了$(p,2p)$-结构,即限制李超代数. 文献[6]中对限制李超代数的包络代数进行了研究. 1997年,张永正构造了四族有限维 Cartan 型模李超代数 W,S,H,K,并且讨论了它们的单性与限制性. 此后,Cartan 型模李超代数的研究有了突破性的进展,由于有限维单模李超代数的分类在现阶段还没有解决,因此,构造新的有限维单模李超代数必然具有重要意义. 本书主要反映了作者近年来在李代数及李超代数方向上的研究成果.

本书共分 6 章. 第 1 章首先介绍了在讨论无限维李代数的顶点算子表示时所需要的基本概念,然后通过构造生成函数刻画了无限维李代数生成形式的运算结构. 第 2 章构造了 Clifford 代数,进而给出了无限维李代数的顶点算子表示,之后再利用 Clifford 代数,将这个实现联系到顶点超代数和拟模理论. 第 3 章讨论了无限维李代数顶点算子表示的应用,分别给出了无扭量子环面李代数的顶点算子表示和扭量子环面李代数的顶点算子表示. 第 4 章定义了不定型李代数 $IX_r(a)$ 的有限型 $I\mathring{X}_r(a)$ 的未定 Weyl 群,研究了不定型李代数 $IX_r(a)$ 的 Weyl 群与有限型单李代数的 Weyl 群的关系,从而利用有限型李代数的结构和性质刻画了不定型李代数的结构和性质. 第 5 章定义了模李超代数 U,它是不同于以往研究的其他类型的一类有限维单模李超代数,讨论了 U 的生成元, 确定了其导子超代数,进一步得到其滤过不变性;给出了限制李超代数环面的定义,研究了限制李超代数环面和 Cartan 子代数的关系,从而讨论了与它们有关的一些重要性质. 第 6 章定义了广义 Cartan 型李超代数 W,S,H. 分别确定了其生成元,进而得到其导子超代数. 同时,放宽了对基础域的限制, 仅要求基础域的特征数不为 2.

本书第 1 章至第 4 章及第 5 章的第 6 节由齐齐哈尔大学理学院副教授李立著,约 13.7 万字;第 5 章第 1 节至第 5 节及第 6 章由齐齐哈尔大学理学院讲师马丽丽著,约 12 万字。

本书可作为数学系、计算机系的研究生教材,也可供相关专业的本科生、研究生、教师及有关的科研工作者参考.

著　者

2011 年 6 月

目　录

第1章　李代数$(gl_l\hat{\otimes}gl_G)[G]$

本章首先介绍有关的符号和基本概念,然后给出李代数$(gl_l\hat{\otimes}gl_G)[G]$的生成形式的代数结构.

1.1　李代数的基本概念

本节主要介绍有关的符号和基本概念.

李代数是由线性变换构成的向量空间,这个空间被赋予一个通常既不交换又不结合的运算:$[x,y]=xy-yx$.

定义1.1　设L为域$\mathbb{F}$上的向量空间,在向量空间L里,有一个运算$L\times L\to L$,记为$(x,y)\to[xy]$,如果以下条件(1)~(3)被满足,则这个运算称为x和y的方括号或换位子(也称李乘运算),且称L为$\mathbb{F}$上的李代数:

(1) 方括号运算是双线性的;

(2) $[xx]=0$对L内所有的x;

(3) $[x[yz]]+[y[zx]]+[z[xy]]=0\quad(x,y,z\in L)$.

定义1.2　设L和L'是$\mathbb{F}$上两个李代数,若存在向量空间的同构$\varphi:L\to L'$,它对L内所有x,y都满足

$$\varphi([xy])=[\varphi(x)\varphi(y)]$$

则称$\mathbb{F}$上两个李代数L和L'是同构的.

如果V是$\mathbb{F}$上有限维向量空间,用$\mathrm{End}V$表示$V\to V$线性变换的集合,则$\mathrm{End}V$关于通常的乘积运算是一个环.定义一个新运算$[x,y]=xy-yx$,称为x和y的方括号,则$\mathrm{End}V$为$\mathbb{F}$上的李代数.为了强调其是李代数,通常用$gl(V)$代替$\mathrm{End}V$,称之为一般线性李代数.

定义1.3　设V为$\mathbb{F}$上的向量空间,李代数L的表示是一个同态

$$\varphi:L\to gl(V)$$

设I是李代数L的子空间,若$x\in L,y\in I$,则有$[xy]\in I$,则称I为L的理想.且中心

$$Z(L)=\{z\in L\mid[xz]=0\text{ 对所有 }x\in L\}$$

是 L 的一个理想，如果 L 除了它自己和 0 以外没有其他理想，且若 $[LL]\neq 0$，即称 L 是单纯的.

设李代数 L 不是一维的，且李代数 L 不是单纯的，可以"除去"一个非零真理想 I，得到一个维数较低的李代数，即商代数 L/I，它的李乘法为

$$[x+I,y+I]=[xy]+I$$

定义 1.4 向量空间 W 被赋予一个运算 $L\times W\to W$（记为 $(x,w)\mapsto x\cdot w$），如果满足下述条件，则 W 被称为一个 L-模：

(1) $(ax+by)\cdot w=a(x\cdot w)+b(y\cdot w)$;

(2) $x\cdot(av+bw)=a(x\cdot v)+b(x\cdot w)$;

(3) $[xy]\cdot w=x\cdot y\cdot w-y\cdot x\cdot w$,

其中 $x,y\in L;v,w\in W;a,b\in F$.

例如，若 $\varphi:L\to gl(V)$ 是 L 的表示，则 V 可以看作一个 L-模.

对于任意的 $n\times n$ 复矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$，$\text{rank}\boldsymbol{A}=l$，$\boldsymbol{A}$ 的实现是一个三元组 $(\eta,\Pi,\Pi^{\vee})$，其中 η 是一个有限维复向量空间，且有

$$\Pi=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}\subset\eta^*,\Pi^{\vee}=\{\alpha_1^{\vee},\cdots,\alpha_n^{\vee}\}\subset\eta$$

并满足下面两个条件：

(1) Π 和 $\Pi^{\vee}$ 都是线性无关的；

(2) $<\alpha_i^{\vee},\alpha_j>=a_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$,

其中 $<,>:\eta\times\eta^*\to\mathbb{C}$，且 $<h,\alpha>=\alpha(h)$.

命题 1.1 设 $(\eta,\Pi,\Pi^{\vee})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个实现，那么 $\dim\eta\geqslant 2n-l$，并且存在 $\boldsymbol{A}$ 的一个实现 $(\eta,\Pi,\Pi^{\vee})$，使得 $\dim\eta=2n-l$. 这个实现称为 $\boldsymbol{A}$ 的极小实现. $\boldsymbol{A}$ 的极小实现在同构意义下是唯一的. 这样的同构是唯一的当且仅当 $\det A\neq 0$.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 是一个秩为 l 的 $n\times n$ 复矩阵. 取定 $\boldsymbol{A}$ 的一个极小实现 $(\eta,\Pi,\Pi^{\vee})$，先作一个辅助李代数 $\tilde{g}(A)$，$\tilde{g}(A)$ 具有生成元

$$e_i,f_i,\eta\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

满足下列定义关系：

(1) $[h,h']=0\quad(\forall h,h'\in\eta)$;

(2) $[e_i,f_i]=\delta_{ij}\alpha_i^{\vee}\quad(i,j=1,\cdots,n)$;

(3) $[h,e_i]=<h,\alpha_i>e_i,[h,f_i]=-<h,\alpha_i>f_i\quad(\forall h\in\eta,i=1,2,\cdots,n)$.

显然,在同构的意义下 $\tilde{g}(A)$ 仅依赖于 A.

定义 1.5 令

$$g(A)=\tilde{g}(A)/r$$

其中 r 为交 η 为 0 的极大理想,称 $g(A)$ 为与矩阵 A 相应的李代数.

定义 1.6 Π 称为素根系,$\Pi^{\vee}$ 称为余素根系,Π 中的元素称为素根,$\Pi^{\vee}$ 中的元素称为素余根.

定义 1.7 设 $n\times n$ 实矩阵 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$,满足

(1) A 是不可分解的;

(2) 如果 $i\neq j$,那么 $a_{ij}\leqslant 0$;

(3) $a_{ij}=0$ 当且仅当 $a_{ji}=0$;

(4) $\mathrm{Corank}A=1$;存在 $u>0$ 使 $Au=0$;$Au\geqslant 0$ 蕴涵着 $Au=0$,

且(4)对于 ${}^{t}A$ 也成立,则称 A 是仿射型的.

定义 1.8 设 A 为一个 $n\times n$ 矩阵,且 $A=(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$,若它满足下面的条件:

(1) $a_{i,i}=2 \quad (i=1,\cdots,n)$;

(2) 如果 $i\neq j$,那么 a_{ij} 是非正整数;

(3) 如果 $a_{ij}=0$,那么 $a_{ji}=0$,

则称 A 为广义 Cartan 矩阵.

设 A 是一个广义 Cartan 矩阵,则李代数 $g(A)$ 称为 A 相应的 Kac-Moody 代数.

若 A 是秩为 l 的 $l+1$ 阶仿射型广义 Cartan 矩阵,相应的复李代数 $g(A)$ 称为仿射型李代数.

令 K 是一个李代数,G 是作用在 K 上的自同构群,满足对任意 $a,b\in K$ 有

$$[ga,b]=0$$

有限多 $g\in G$ 除外.

定义一个作用于 K 上的新线性运算 $[\cdot,\cdot]_G$,对于任意 $a,b\in K$ 有

$$[a,b]_G=\sum_{g\in G}[ga,b]$$

可以证明,由元素

$$ga-a \quad (g\in G,a\in K)$$

线性生成的子空间是非结合代数 $(K,[\cdot,\cdot]_G)$ 的双边理想,且商代数是一个李代数,记作

K/G. 如果 G 是一个有限群,可有 K/G 等价于 G-不定点李代数 K^G.

现在令 $\mathbf{g}$ 是带有非退化、对称、不变双线性型 $<\cdot,\cdot>$ 的李代数(可能是无限维),那么可得无扭仿射李代数

$$\hat{\mathbf{g}}=\mathbf{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-}]\oplus\mathbb{C}c$$

令 G 是作用在 $\mathbf{g}$ 上的自同构群,保持这个非退化对称不变双线性型 $<\cdot,\cdot>$,使得任意 $a,b\in\mathbf{g}$,有

$$[ga,b]=0 \text{ 且 } <ga,b>=0$$

有限多的 $g\in G$ 除外.

令 $\varphi:G\to\mathbb{C}^{\times}$ 是群同态,利用 φ,我们定义 $\hat{\mathbf{g}}$ 上的 G 的群作用为

$$g(a\otimes t^{m}+\alpha c)=\varphi(g)^{m}(ga\otimes t^{m})+\alpha c$$

对于任意的 $g\in G,a\in\mathbf{g},m\in\mathbb{Z},\alpha\in\mathbb{C}$.

取上述 $K=\hat{\mathbf{g}}$,可得李代数 $K/G=\hat{\mathbf{g}}/G$. 如果 G 是有限的,则 $\hat{\mathbf{g}}/G$ 同构于扭仿射李代数,也就是说无扭仿射李代数 $\hat{\mathbf{g}}$ 相对应的李代数 $\hat{\mathbf{g}}/G$ 是扭仿射李代数的一般化.

本书第 1 ~4 章所讨论的向量空间都是复数域$\mathbb{C}$上的向量空间.

1.2　李代数$(gl_l\hat{\otimes}gl_G)[G]$的代数结构

本节通过构造生成函数来给出李代数$(gl_l\hat{\otimes}gl_G)[G]$的生成形式的运算,进而讨论此类李代数的代数结构.

令 l 是一个正整数,gl_l 表示 $l\times l$ 阶的复矩阵构成的结合代数,因而 gl_l 是一个李代数. 在 gl_l 上有非退化、对称、结合的双线性型 $<\cdot,\cdot>$:

$$<E_{ij},E_{rs}>=\delta_{is}\delta_{jr}\quad(1\leqslant i,j,r,s\leqslant l)$$

现在令 G 是任意的群,定义一个$\mathbb{C}$上的结合代数 gl_G,它有一个基

$$\{E_{\alpha\beta}\mid\alpha,\beta\in G\}$$

且

$$E_{\alpha_1\beta_1}E_{\alpha_2\beta_2}=\delta_{\beta_1\alpha_2}E_{\alpha_1\beta_2}\quad(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in G)$$

同样地,gl_G 有一个非退化、对称、结合双线性型,且对于 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in G$,有

$$<E_{\alpha_1\beta_1},E_{\alpha_2\beta_2}>=\delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\beta_1\alpha_2}$$

令 G 可以作用在 gl_G 上,对于任意的 $g,\alpha,\beta\in G$,有

$$g \cdot E_{\alpha\beta} = E_{g\alpha, g\beta}$$

那么 $g \in G$ 是代数 gl_G 的自同构，且此作用保持双线性型. 对于 $\forall a, b \in gl_G$，有

$$(ga)b = 0, \quad \langle ga, b \rangle = 0$$

有限多个 $g \in G$ 除外.

那么张量代数 $gl_l \otimes gl_G$ 是可结合代数，且带有乘积双线性型. 令 G 平凡地作用在 gl_l 上，使得 G 通过自同构作用在 $gl_l \otimes gl_G$ 上. 此外，令

$$\varphi: G \to \mathbb{C}^{\times}$$

是一个群同态，由上述讨论可知我们已得到李代数 $gl_l \hat{\otimes} gl_G / G$.

当取 $G = \mathbb{Z}^n$ 且 $l = 1$ 时，可得到量子环面李代数. 本节主要讨论当 G 是 $\mathbb{C}^{\times}$ 的子群时的李代数 $gl_l \hat{\otimes} gl_G / G$ 的生成形式的运算结构.

令 x, z, z_1, z_2 是相互计算独立的形式变量，对于向量空间 U，令

$$U[[x, x^{-1}]] = \{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} u(n) x^n \mid u(n) \in U \}$$

$$U((x)) = \{ \sum_{n \geq k} u(n) x^n \mid k \in \mathbb{Z}, u(n) \in U \}$$

$$U[[x]] = \{ \sum_{n \geq 0} u(n) x^n \mid u(n) \in U \}$$

对于 $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) x^n \in U[[x, x^{-1}]]$，我们定义形式导数为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n f(n) x^{n-1}$$

定义形式 δ 函数为

$$\delta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]]$$

形式 δ 函数的基本性质是

$$f(z)\delta(z) = f(1)\delta(z)$$

对于任意洛朗多项式 $f(z) \in \mathbb{C}[z, z^{-1}]$.

如果 $f(z_1, z_2)$ 存在，对于 $f(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[[z_1^{\pm 1}, z_2^{\pm 1}]]$，有

$$f(z_1, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = f(z_2, z_2)\delta\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

引理 1.1 $f(z_1, z_2)$ 是系数属于某个向量空间且是关于 z_1, z_2 的形式幂级数，满足 $\lim\limits_{z_2 \to z_1} f(z_1,$

z_2)存在，则

$$f(z_1,z_2)\delta\left(\frac{az_1}{z_2}\right)=f(z_1,az_1)\delta\left(\frac{az_1}{z_2}\right)$$

$$f(z_1,z_2)(D\delta)\left(\frac{z_2}{az_1}\right)=f(z_1,az_1)(D\delta)\left(\frac{z_2}{az_1}\right)-(D_{z_2}f(z_1,z_2))\delta\left(\frac{z_2}{az_1}\right)$$

其中 $D=x\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, a\in\mathbb{C}^{\times}$.

引理 1.2 对于 $a,b\in\mathbb{C}^{\times}$，有

$$\begin{aligned}&(az_1-z_2)^{-1}(z_1-bz_2)^{-1}-(z_2-az_1)^{-1}(bz_2-z_1)^{-1}\\&=\begin{cases}(1-ab)^{-1}\left(z_1^{-1}z_2^{-1}\delta\left(\dfrac{az_1}{z_2}\right)-z_1^{-1}z_2^{-1}\delta\left(\dfrac{z_1}{bz_2}\right)\right) & (ab\neq 1)\\ a\dfrac{\partial}{\partial z_2}z_2^{-1}\delta\left(\dfrac{az_1}{z_2}\right) & (ab=1)\end{cases}\end{aligned}$$

令 $\boldsymbol{g}$ 是一个李代数，带有非退化、对称、不变双线性型 $<\cdot,\cdot>$，对于 $(\boldsymbol{g}, <\cdot,\cdot>)$，可构造仿射李代数

$$\hat{g}=\boldsymbol{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]\otimes\mathbb{C}k$$

这里 k 是中心，且对于任意的 $u,v\in\boldsymbol{g},m,n\in\mathbb{Z}$，有

$$[u\otimes t^m,v\otimes t^n]=[u,v]\otimes t^{m+n}+m\delta_{m+n,0}<u,v>k$$

令 G 是作用在 $\boldsymbol{g}$ 上的自同构群，保持双线性型 $<\cdot,\cdot>$，满足对任意的 $u,v\in\boldsymbol{g}$，有

$$[gu,v]=0 \text{ 且 } <gu,v>=0$$

有限多的 $g\in G$ 除外.

令

$$\varphi:G\to\mathbb{C}^{\times}$$

是一个群同态，定义向量空间 $\hat{g}$ 上的一个新的双线性运算：

$$[a\otimes t^m,b\otimes t^n]_G=\sum_{g\in G}\varphi(g)^m([ga,b]\otimes t^{m+n}+m\delta_{m+n,0}<ga,b>k)$$

其中 $a,b\in\boldsymbol{g},m,n\in\mathbb{Z}$.

对于 $g\in G,a\in\boldsymbol{g},m\in\mathbb{Z}$，由向量

$$\varphi(g)^m(ga\otimes t^m)-a\otimes t^m$$

可线性生成子空间，由非结合代数 $\hat{g}$ 模这个子空间可得商代数 $\hat{g}[G]$，且商代数 $\hat{g}[G]$ 为

李代数.

令 G 是任意一个群, gl_G 是结合代数,有基

$$\{E_{gh} \mid g,h \in G\}$$

且对于任意 $g_1,g_2,h_1,h_2 \in G$ 有

$$E_{g_1h_1}E_{g_2h_2}=\delta_{h_1g_2}E_{g_1h_2}$$

定义一个双线性型

$$<E_{g_1h_1},E_{g_2h_2}>=\delta_{h_1g_2}\delta_{g_1h_2}$$

对任意的 $g_1,g_2,h_1,h_2 \in G$,这个双线性型是非退化的、对称的、可结合的.

群 G 自同构地作用在 gl_G 上,即对任意的 $g,g_1,g_2 \in G$ 有

$$gE_{g_1g_2}=E_{gg_1,gg_2}$$

而且对任意的 $u,v \in gl_G$ 有

$$(gu)v=0, \quad <gu,v>=0$$

有限多的 $g \in G$ 除外.

现在设 G 是 $\mathbb{C}^{\times}$ 的一个子群,令 $\boldsymbol{g}$ 是任意的结合代数,带有对称、结合、双线性型 $<\cdot,\cdot>$,可得张量积结合代数 $\boldsymbol{g}\otimes gl_G$,带有非退化、对称、结合双线性型. 那么我们有仿射李代数 $\boldsymbol{g}\hat{\otimes}gl_G$. 令 G 平凡地作用在 $\boldsymbol{g}$ 上, G 自同构地作用在代数 $\boldsymbol{g}\otimes gl_G$ 上,那么,我们有李代数 $(\boldsymbol{g}\hat{\otimes}gl_G)[G]$.

对于 $u,v\in\boldsymbol{g},\alpha,\beta,g,h\in G$,且 $m,n\in\mathbb{C}$ 有

$$\begin{aligned}
[u\otimes E_{\alpha\beta}\otimes t^m,v\otimes E_{gh}\otimes t^n]_G &= \sum_{\gamma\in G}\gamma^n([\gamma(u\otimes E_{\alpha\beta}),v\otimes E_{gh}]\otimes t^{m+n}+\\
&\quad m<\gamma(u\otimes E_{\alpha\beta}),v\otimes E_{gh}>\delta_{m+n,0}k)\\
&=\sum_{\gamma\in G}\gamma^m([u\otimes E_{\gamma\alpha,\gamma\beta},v\otimes E_{gh}]\otimes t^{m+n}+\\
&\quad m<u\otimes E_{\gamma\alpha,\gamma\beta},v\otimes E_{gh}>\delta_{m+n,0}k)\\
&=(g\beta^{-1})^m(uv\otimes E_{\beta^{-1}g\alpha,h}\otimes t^{m+n})-\\
&\quad (h\alpha^{-1})^m(vu\otimes E_{g,\alpha^{-1}h\beta})\otimes t^{m+n}+\\
&\quad m(g\beta^{-1})^m<u,v>\delta_{\alpha g,\beta h}\delta_{m+n,0}k
\end{aligned}$$

令 $u\in\boldsymbol{g},\alpha,\beta\in G$,我们构造生成函数

$$Z(u,\alpha,\beta,x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}}(u\otimes E_{\alpha\beta}\otimes t^m)x^{-m-1}$$

那么对于 $u,v\in\boldsymbol{g}$ 且 $\alpha,\beta,g,h\in G$ 有

$$\begin{aligned}[Z(u,\alpha,\beta,x_1),Z(v,g,h,x_2)]_G =& x_1^{-1}\delta\left(\frac{gx_2}{\beta x_1}\right)Z(uv,\beta^{-1}g\alpha,h,x_2) - \\ & x_1^{-1}\delta\left(\frac{hx_2}{\alpha x_1}\right)Z(vu,g,\alpha^{-1}h\beta,x_2) + \\ & \frac{\partial}{\partial x_2}x_1^{-1}\delta\left(\frac{gx_2}{\beta x_1}\right)< u,v > \delta_{\alpha g,\beta h}k\end{aligned}$$

注 取 $G=\mathbb{Z}^k$,令 $\varphi:\mathbb{Z}^k\to\mathbb{C}^\times$,可得量子环面李代数.

第 2 章　李代数 $(gl_l \hat{\otimes} gl_G)[G]$ 的顶点算子表示和拟模问题

在第 1 章里，我们讨论了李代数 $(gl_l \hat{\otimes} gl_G)[G]$ 的生成形式的代数结构，我们将在本章首先构作 Clifford 代数，取 $Cl(L(E))$ 为 $L(E)$ 上的张量代数模关系

$$(u\otimes t^m)(v\otimes t^n)+(v\otimes t^n)(u\otimes t^m)=\delta_{m+n+1,0}<u,v>$$

$u,v\in E, m,n\in\mathbb{Z}$ 所得的商代数. 然后对于 Clifford 代数 $Cl(L(E))$ 可得顶点算子超代数 V_E，其中 V_E 是标准真空 $Cl(L(E))$-模，从而给出无限维李代数 $(gl_l \hat{\otimes} gl_G)[G]$ 的顶点算子表示. 最后构造顶点算子超代数 $V_{E\otimes C[G]}$，得出在任意 V_E-模上，对于 $V_{E\otimes C[G]}$ 有一个典型 G-拟模，即将实现推广到顶点超代数和拟模理论中去.

2.1　Clifford 代数的构作

令 U 是复数域 $\mathbb{C}$ 上的任意向量空间，带有一个非退化对称双线性型 $<\cdot,\cdot>$，与 $(U,<\cdot,\cdot>)$ 相对应的 Clifford 代数 $Cl(U)$ 是带有单位元 1 的结合代数，由空间 U 生成，且有关系

$$uv+vu=<u,v>\quad(u,v\in U)$$

即 $Cl(U)$ 是 U 上的张量代数 $T(U)$ 模去由向量

$$uv+vu-<u,v>\quad(u,v\in U)$$

生成的双边理想而得到的商代数.

令 θ 是 U 的线性自同态，且

$$\theta(u)=-u\quad(u\in U)$$

因 θ 显然保持双线性型，θ 诱导了 Clifford 代数 $Cl(U)$ 的 2 阶自同构，因而我们有下面的 $\mathbb{Z}_2$-分解

$$Cl(U)=Cl(U)^0\oplus Cl(U)^1$$

这里 $Cl(U)^i$ 是 θ 的属于特征值 $(-1)^i$ 的特征子空间，$i=0,1$，则 $Cl(U)^0$ 由 U 的偶数元素的积线性生成，$Cl(U)^1$ 由 U 的奇数元素的积线性生成.

现在令 E 是带有非退化对称双线性型 $<\cdot,\cdot>$ 的向量空间. 令向量空间

$$L(E)=E\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}]$$

我们让 $L(E)$ 带有一个对称双线性型

$$<u\otimes t^m,v\otimes t^n>=\delta_{m+n+1,0}<u,v>$$

其中 $u,v\in E,m,n\in\mathbb{Z}$.

为了方便,对于 $u\in E,n\in\mathbb{Z}$,令

$$u(n)=u\otimes t^n\in L(E)$$

那么对于 $(L(E),<\cdot,\cdot>)$,我们有 Clifford 代数 $Cl(L(E))$,它是向量空间 $L(E)$ 上的张量代数 $T(L(E))$ 模去由向量

$$u(m)v(n)+v(n)u(m)-\delta_{m+n+1,0}<u,v>\quad(u,v\in E,m,n\in\mathbb{Z})$$

生成的双边理想而得的商代数. 在结合代数 $Cl(L(E))$ 里,下面关系成立:

$$\{u(m),v(n)\}=u(m)\cdot v(n)+v(n)u(m)=\delta_{m+n+1,0}<u,v>$$

其中 $u,v\in E,m,n\in\mathbb{Z}$.

注 习惯上,对于一般结合代数 A 中的元素 a,b,我们用 $[a,b]$ 表示换位子 $ab-ba$,用 $\{a,b\}$ 表示反换位子 $ab+ba$.

这样我们得到了 Clifford 代数 $Cl(L(E))$,且有 $\mathbb{Z}_2$-分解

$$Cl(L(E))=Cl(L(E))^0\oplus Cl(L(E))^1$$

2.2 顶点算子表示

本节利用上节构作的 Clifford 代数 $Cl(L(E))$ 得到顶点算子超代数 V_E,且 V_E 是标准真空 $Cl(L(E))$-模. 进而构造顶点算子,从而给出李代数 $(gl_l\hat{\otimes}gl_G)[G]$ 的顶点算子的表示.

令 $Cl(L(E))^-$ 是由向量

$$u(-n)(=u(-n)1)\quad(u\in E,n\geqslant 1)$$

生成的 $Cl(L(E))$ 的子代数,令 $Cl(L(E))^+$ 是由向量

$$u(n)(=u(n)1)\quad(u\in E,n\geqslant 1)$$

生成的 $Cl(L(E))$ 的子代数,那么我们有

$$Cl(L(E))=Cl(L(E))^-Cl(L(E))^+$$