高联考研

2008年 李永乐·李正元 考研数学 12

数学

数学四

【经济类】

全真模拟经典400题

◎主编 清华大学 李永乐
北京大学 范培华
中国人民大学 袁荫棠

国家行政学院出版社

数学全真模拟经典400题

（经济类·数学四）

主　编　清华大学　李永乐
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠

编　者　（以姓氏笔画为序）
北京大学　刘西垣
北京大学　李正元
清华大学　李永乐
中国人民大学　严　颖
北京大学　范培华
中国人民大学　袁荫棠
空军雷达学院　徐宝庆
东北财经大学　龚兆仁
天津财经学院　鹿立江

国家行政学院出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学全真模拟经典 400 题．数学．4：经济类/李永乐，范培华，袁荫棠主编．
－北京：国家行政学院出版社，2004
ISBN 978-7-80140-343-8

Ⅰ．数…　Ⅱ．①李…　②范…　③袁…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-习题
Ⅳ．013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 058730 号

书　　名	数学全真模拟经典 400 题［经济类·数学四］
作　　者	李永乐　范培华　袁荫棠
出版发行	国家行政学院出版社
	（北京市海淀区长春桥路 6 号　100089）
电　　话	（010）88517082
经　　销	新华书店
印　　刷	北京市朝阳印刷厂
版　　次	2007 年 8 月北京第 4 版
印　　次	2007 年 8 月北京第 1 次印刷
开　　本	787 毫米×1092 毫米　16 开
印　　张	11.5
字　　数	300 千字
书　　号	ISBN 978-7-80140-343-8/O·37
定　　价	19.00 元

前　言

本套书（**李永乐、李正元考研数学系列——《数学复习全书》及《数学全真模拟经典400题》等，国家行政学院出版社**）出版、修订多年以来，深受全国广大考生的好评和厚爱，受到专家同行的肯定，认为在编写体例和内容上有“自己的特色”和“较高的水准及较强的针对性”，较“适合考生的需要”，我们深感欣慰。《**2008年考研数学全真模拟经典400题**》根据2008年考试大纲的考试内容、考试要求及试卷结构重新编写，将以更高的质量和新的面貌呈现在广大考生的面前。

本书特点：

1. 每题均全新优化设计，综合性强

为使考研同学考前多一些查漏补缺的机会，多见一些新题型，多一些针对性，考试中多一份把握，我们特优化设计了10套模拟试题，这10套题完全不同，没有重复题；在内容设计上，每道题均涉及两个以上知识点，有些综合题甚至涉及到3个考点或更多，这些题涵盖新大纲所有考查知识点。通过这10套全新优化设计的试题训练，我们相信一定能提高您的数学的分析问题、解决问题的能力。

2. 注重归纳总结，力求一题多解，解答规范、详细

我们在设计这10套试题时，无论是选择题、填空题，还是解答题（包括证明题），每道题设有：①分析——该题的解题步骤和解题思路、方法；②解答——该题的详细、规范解题过程；③评注——该题所考查的知识点（或命题意图）、解题思路归纳总结和延伸、常见错误和注意事项。同时，在解题过程中，力求一题多解，扩展考生的视野和思路，比较各种解题方法的特点和适用范围，从而提高考生的应试水平。

本书使用说明：

1. 本书是依据2008年考研数学大纲为2008年考研读者全新优化设计的一本全真模拟训练题集，本书中的试题难度略高于2007年考研试题，解答题（包括证明题）体现了考试重点、难点内容，综合性比较强；选择题与填空题着重考查考生对基本概念、基本公式、基本定理的理解和运用，适用于第二阶段复习训练之用。

2. 本书中的每道题均有较透彻的分析、详细解答、归纳总结的评注，因此希望考生在做题时，如果遇到了困难，不要急于看分析和解答，一定要多思考，只有这样才能达到本书编写的目的，才能提高应试水平，才能取得好成绩。

3. 考生在使用本书之前，应仔细研读《2008 年考研数学复习全书》（经济类），弄清《考试大纲》中要求掌握的基本概念、基本定理和基本方法，掌握《2008 年考研数学复习全书》（经济类）中所介绍的解题方法、技巧和思路。

特别提醒考生注意：①本书编撰者长期从事于清华大学、北京大学、中国人民大学等重点高校的相关教学，考研辅导经验丰富，并且是各自领域的专家学者，具有足够的专业素养。更重要的是，本书编撰者不辞辛苦，认真钻研考试大纲的考试内容和考试要求，归纳总结考生在学习中的不足及近年来考研数学考试的命题规律，尽力做到考研辅导和考研辅导资料的编写具有很强的针对性和有效性。在编写本书的过程中，编撰者都从头到尾坚持自己亲自完成本书的编写任务，决不假手他人，更不会“借”他人的东西。在这个意义上，“经典”两字实际上是本书编撰者对自己的严格要求。

②为了提高同学数学分析和解决问题的能力，本书所编题目难度较大，有的题目涉及 3 个以上的考点、综合运用性比较高，概念运用性较强，如果考生在做本书试题感到棘手时，请不要急，更不要泄气，应静下心来，仔细分析题目所考查的是哪些知识点，回忆《数学复习全书》（经济类）所介绍的解题方法，然后再动手做题。我们希望考生一定要动手做题，不要一看了事。

鉴于以上两点，我们希望考生认真对待本书中每道题，对本书中的每套题至少要做二至三遍。我们相信在 2008 年考研数学考试中，您肯定会感到有些题“似曾相识”、甚至“一见如故”。

在本书的编写、编辑和成书过程中，由于时间紧、任务重，尽管我们认真对待和严格要求，仍难免有不尽如意的地方，诚请广大读者和同行批评指正。

愿这本《经典 400 题》能对广大考生有所帮助，为实现考研目标助一臂之力！

说明：为了使本书更具有针对性，减轻考生的经济负担，我们将原《数学全真模拟经典 400 题》（数学三、数学四合订本）改为数学三、数学四单行本，书名继续沿用《数学全真模拟经典 400 题》。

编　者

2007 年 8 月

目　　录

第 1 部分　考生必须了解的信息

第 2 部分　全真模拟经典试题

第 3 部分　全真模拟经典试题答案及详解

第1部分

考生必须了解的信息

一、2008年考研数学四考试大纲修订情况

(一) 关于试卷结构

1. 内容比例

2008年考研数学四的内容比例与2007年相同，即微积分约占56%，线性代数与概率论各约占22%.

2. 题型比例

(1) 填空题与选择题由去年的“约45%”调整为“约37%”.

说明：选择题由去年的“10个小题(共40分)”调整为“8个小题(共32分)”，即2008年考研数学四减少了2道关于微积分的选择题．填空题的题量、分值等没有变化.

(2) 解答题(包括证明题)由去年的“约55%”调整为“约63%”.

说明：解答题由去年的“8道题(共86分)”调整为“9道题(共94分)”，即2008年考研数学四增加了1道关于微积分的解答题.

(二) 关于考试内容和考试要求

1. 微积分

在“二、一元函数微分学”考试要求中增加了“了解泰勒(Taylor)定理，并掌握该定理的简单应用”.

2. 线性代数与概率论

没有变化.

二、2008年考研数学四新增考点讲解

▶ 泰勒公式及其简单应用

由 $y=f(x)$ 在 x_0 处的可导性与可微性概念，在 x_0 附近的 $f(x)$ 可以表示为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x-x_0),$$

其中，$\alpha(x-x_0)$ 为 $x \to x_0$ 时的高阶无穷小量.

由上式可以发现，计算 $f(x)$ 的近似值可取

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0),$$

若舍去的误差 $\alpha(x-x_0)$ 不能满足精度要求，则可设想是否在 x_0 与 x 之间存在 ξ，使得

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \alpha f''(\xi)(x-x_0)^2,$$

其中，α 为常数. 这正是泰勒公式的基本思想，也是微分中值定理的某种推广.

泰勒(Taylor)中值定理 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x \in (a,b)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{1}$$

其中
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2}$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值.

公式(1) 称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式(2) 称为拉格朗日型余项.

当 $n=0$ 时，泰勒公式变成拉格朗日中值公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x-x_0) \quad (\xi \text{ 在 } x_0 \text{ 与 } x \text{ 之间}).$$

因此，泰勒中值定理是拉格朗日中值定理的推广.

在不需要余项的精确表达式时，n 阶泰勒公式也可写成

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x), \tag{3}$$

其中
$$R_n(x) = o[(x-x_0)^n]. \tag{4}$$

公式(3) 称为 $f(x)$ 按 $(x-x_0)$ 的幂展开的带有佩亚诺型余项的 n 阶泰勒公式，而 $R_n(x)$ 的表达式(4) 称为佩亚诺(Peano) 型余项.

注意：①$o[(x-x_0)^n]$ 是比 $(x-x_0)^n$ 高阶的无穷小量. ② 公式(3) 是 $f^{(n+1)}(x)$ 在区间 (a,b) 内有界的条件下推得的. 事实上公式(3) 只要在"$f(x)$ 在含有 x_0 的开区间 (a,b) 内具有直到 n 阶的导数，且 $f^{(n)}(x)$ 在 (a,b) 内连续"的条件下就成立. 这是不同于带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式(1) 之处.

在泰勒公式(1) 中，如果取 $x_0=0$，则 ξ 在 0 与 x 之间. 因此可以令 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$，从而泰勒公式变成较简单的形式，即所谓带有拉格朗日型余项的麦克劳林(Maclaurin) 公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{5}$$

其中
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

在泰勒公式(3) 中，如果取 $x_0=0$，则有带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n). \tag{6}$$

由(5) 或(6) 可得近似公式

$$f(x) \approx f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

考生应该熟悉五类基本初等函数在 $x=0$ 处的 n 阶泰勒公式(ξ 在0与 x 之间)：

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+R_n(x), \tag{7}$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}e^{\xi}x^{n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1}+R_{2n}(x), \tag{8}$$

$$R_{2n}(x)=(-1)^n\frac{\cos\xi}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+R_{2n+1}(x), \tag{9}$$

$$R_{2n+1}(x)=(-1)^{n+1}\frac{\cos\xi}{(2n+2)!}x^{2n+2},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x), \tag{10}$$

$$R_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1},\quad x\in(-1,1).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+R_n(x), \tag{11}$$

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

【泰勒公式的应用说明】

1° 带有拉格朗日形式余项的泰勒公式常用来证明不等式或分析一些理论问题.

2° 带有佩亚诺形式余项的泰勒公式常用来求极限,或考察(局部)极值问题.

3° 带有拉格朗日余项的泰勒公式可以视为拉格朗日微分中值定理的推广,而拉格朗日微分中值定理实质是0阶泰勒公式.

4° 对给定的函数 $f(x)$ 进行泰勒展开时,一般有两种方法,即用泰勒公式定义求 $f(x)$ 各阶导数的方法,称为直接方法;而利用初等函数泰勒公式的结论(7)～(11)式为依据,再利用函数的代数运算与复合运算进行泰勒展开的方法,统称为间接方法.在题目中,如果没有特别指明用直接方法,则可利用间接方法.

【专项训练】

【题1】 求函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的3阶泰勒公式.

【解】 因为 $f(x)=\sqrt{x}$, $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$, $f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$, $f^{(4)}(x)=-\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$;

又 $f(4)=2$, $f'(4)=\frac{1}{4}$, $f''(4)=-\frac{1}{32}$, $f'''(4)=\frac{3}{256}$,

故
$$\begin{aligned}\sqrt{x}&=f(4)+f'(4)(x-4)+\frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2+\frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3+\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4\\&=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3-\frac{15}{384\xi^{7/2}}(x-4)^4,\end{aligned}$$

其中 ξ 介于 x 与4之间.

【题2】 求函数$f(x)=\ln x$按$(x-2)$的幂展开的带有佩亚诺型余项的n阶泰勒公式.

【解】 因为$f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$，$f^{(n)}(2)=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2^n}$，

故
$$\ln x=f(2)+f'(2)(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o[(x-2)^n]$$
$$=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o[(x-2)^n].$$

【题3】 求函数$f(x)=\dfrac{1}{x}$按$(x+1)$的幂展开的带有拉格朗日型余项的n阶泰勒公式.

【解】 因为 $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$，$f^{(n)}(-1)=-n!$，

故
$$\frac{1}{x}=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$
$$=-[1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^n]+(-1)^{n+1}\xi^{-(n+2)}(x+1)^{n+1},$$
其中ξ介于x与-1之间.

【题4】 求函数$f(x)=\tan x$的带有佩亚诺型余项的3阶麦克劳林公式.

【解】 因为$f(x)=\tan x$，$f'(x)=\sec^2 x$，$f''(x)=2\sec^2 x\tan x$，
$$f'''(x)=4\sec^2 x\tan^2 x+2\sec^4 x,$$
$$f^{(4)}(x)=8\sec^2 x\tan^3 x+8\sec^4 x\tan x+8\sec^4 x\tan x$$
$$=8\sec^2 x\tan^3 x+16\sec^4 x\tan x=\frac{8(\sin^2 x+2)\sin x}{\cos^5 x},$$
$$f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=0,f'''(0)=2,$$
且 $\lim\limits_{x\to 0}f^{(4)}(x)=0$，从而存在0的一个邻域，使$f^{(4)}x$在该领域内有界，

因此 $$f(x)=x+\frac{x^3}{3}+o(x^3).$$

【题5】 求函数$f(x)=xe^x$的带有佩亚诺型余项的n阶麦克劳林公式.

【解】 因为$f(x)=xe^x$，$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$，$f^{(n)}(0)=n$，故
$$xe^x=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n+o(x^n)$$
$$=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-1)!}+o(x^n).$$

【题 6】 利用泰勒公式求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$.

【解】 (1) $$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[4]{x^4-2x^3})=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(1-\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1+\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3}{2}+\frac{o\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right]=\frac{3}{2}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^2[x+\ln(1-x)]}=\lim_{x\to0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)-1-\left(-\frac{x^2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)}{x^2\left[x+\left(-x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{8}\right)x^4+o(x^4)}{-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{1}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}=\frac{-\frac{1}{12}}{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}.$$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-1-x^2+o(x^2)\right][x^2+o(x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{8}+\frac{o(x^4)}{x^4}}{-\frac{3}{2}+\frac{o(x^4)}{x^4}}$$

$$=\frac{\frac{1}{8}}{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{12}.$$

【题 7】 证明：$x\ln x+y\ln y\geqslant(x+y)\ln\dfrac{x+y}{2}(x>0,y>0)$.

【证】 对任意的 $x>0,y>0$，将 $f(t)=t\ln t$ 在 $t_0=\dfrac{x+y}{2}$ 处展开为一阶泰勒公式

$$f(t)=f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(t-t_0)^2.$$

由于 $f'(t)=1+\ln t,f''(t)=\dfrac{1}{t}$，所以当 $t>0$ 时，

$$f(t)\geqslant f(t_0)+f'(t_0)(t-t_0).$$

上式中令 t 分别取 x,y 得:

$$f(x) \geqslant f(t_0) + f'(t_0)(x - t_0), \tag{1}$$

$$f(y) \geqslant f(t_0) + f'(t_0)(y - t_0). \tag{2}$$

(1) + (2) 得:

$$f(x) + f(y) \geqslant 2f(t_0) + f'(t_0)(x + y - 2t_0),$$

即 $\quad x\ln x + y\ln y \geqslant (x + y)\ln\dfrac{x + y}{2}(x > 0, y > 0)$.

【题 8】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二阶可导,且 $f''(x) \geqslant 0$,证明:对于 (a,b) 内任意两点 x_1,x_2 及 $0 \leqslant t < 1$,有

$$f[(1-t)x_1 + tx_2] \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

【分析】 已知条件中出现高阶导数,且给出了最高阶导数的取值范围,这种类型的不等式,一般利用泰勒中值公式来完成.

【证】 令 $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$,将 $f(x)$ 在 x_0 点展开为一阶泰勒公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2.$$

由于 $f''(x) \geqslant 0$,所以有

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

上式中令 x 分别取 x_1,x_2 得:

$$f(x_1) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \tag{1}$$

$$f(x_2) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \tag{2}$$

(1) 式两端同乘 $(1-t)$,(2) 式两端同乘 t 然后相加可得结论成立.

【题 9】 设 $x \in [0,2]$ 时,有 $|f(x)| \leqslant 1$,$|f''(x)| \leqslant 1$,证明:对于 $x \in [0,2]$,有 $|f'(x)| \leqslant 2$.

【证】 对 $x \in [0,2]$,将 $f(t)$ 在 x 点展开为一阶泰勒公式

$$f(t) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(t - x) + \frac{f''(\xi)}{2!}(t - x)^2.$$

上式中令 t 分别取 0,2 得:

$$f(0) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(-x) + \frac{f''(\xi_1)}{2!}(-x)^2, \tag{1}$$

$$f(2) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}(2 - x) + \frac{f''(\xi_2)}{2!}(2 - x)^2. \tag{2}$$

(2) − (1) 可得:

$$f(2) - f(0) - \frac{f''(\xi_2)}{2}(2 - x)^2 + \frac{f''(\xi_1)}{2}(-x)^2 = 2f'(x).$$

所以 $|f'(x)| \leqslant 1 + \dfrac{1}{4}[(2 - x)^2 + x^2]$.

用"最值法"不难证明 $\quad g(x) = \dfrac{1}{4}[(2 - x)^2 + x^2] \leqslant 1, x \in [0,2]$.

所以对于 $x \in [0,2]$,有 $|f'(x)| \leqslant 2$.

【题 10】 设$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导且有$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$,证明:$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8$.

【证】 因为$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$,所以存在$x_0\in(0,1)$,使得$f(x_0)=-1$,又因为$f(x)$在区间$[0,1]$上二阶可导,所以$f'(x_0)=0$.

将$f(x)$在$x=x_0$展开为一阶泰勒公式得:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(\eta)}{2!}(x-x_0)^2,$$

即
$$f(x)+1=\frac{f''(\eta)}{2!}(x-x_0)^2. \tag{*}$$

(*)式中令$x=0,x=1$得:

$$f''(\eta_1)=\frac{2}{x_0^2},\eta_1\in(0,x_0), \tag{1}$$

$$f''(\eta_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2},\eta_2\in(x_0,1). \tag{2}$$

当$0<x_0\leqslant\frac{1}{2}$时,取$\xi=\eta_1$,当$\frac{1}{2}<x_0<1$时,取$\xi=\eta_2$,则$f''(\xi)\geqslant 8$,因此$\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8$.

【题 11】 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上二次可微,且$f(a)>0,f'(a)<0,f''(x)<0(x>a)$,证明:方程$f(x)=0$在$(a,+\infty)$内只有一个实根.

【分析】 证明方程$f(x)=g(x)$在(a,b)内有唯一实根的解题思路:第一步,先证明至少有一个实根;第二步,利用单调性或反证法来证明至多有一个实根.

【证】 将$f(x)$在a点展开为一阶泰勒公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

由于$f'(a)<0,f''(x)<0$,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.因此存在$X>a$,使得$f(X)<0$.

由于$f(x)$在$[a,X]$上连续,且$f(a)f(X)<0$,所以根据零点定理可得:$f(x)$在(a,X)内至少有一个零点,即方程$f(x)=0$在$(a,+\infty)$内至少有一个实根.

又因为$f''(x)<0(x>a)$,所以函数$f'(x)$在$[a,+\infty)$上单调递减,又因为$f'(a)<0$,所以$f'(x)<0,x\in[a,+\infty)$,从而$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调减少,因此方程$f(x)=0$在$(a,+\infty)$内至多有一个实根.

综上所述,方程$f(x)=0$在$(a,+\infty)$内只有一个实根.

【题 12】 设$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内二阶可导且$f''(x)>0$,求证:

$$\int_0^1 f(x^n)\,dx\geqslant f\left(\frac{1}{n+1}\right),n\text{ 为自然数}.$$

【分析】 已知条件中出现高阶导数,且给出了最高阶导数的取值范围的积分不等式的证明,一般用泰勒公式完成,此时需对被积函数展开.

【证】 令$x_0=\frac{1}{n+1}\in(0,1)$,将$f(t)$在$x_0$点展开成一阶泰勒公式,有

$$f(t)=f(x_0)+f'(x_0)(t-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(t-x_0)^2.$$

由于$f''(x)>0$,所以$f(t)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(t-x_0)$.　　　(*)

(*)式中令$t=x^n$,则有$f(x^n)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x^n-x_0)$.

所以　$\int_0^1 f(x^n)\mathrm{d}x\geqslant f(\frac{1}{n+1})$,$n$为自然数.

【题13】 设$f(x)$在$[0,2]$上有二阶连续导数,且$f(1)=0$,记$M=\max\limits_{[0,2]}|f''(x)|$,证明:

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{3}M.$$

【证】 将$f(x)$在$x=1$展开为一阶泰勒公式,有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-1)^2.$$

于是$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f'(1)\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x$,

所以$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}M\int_0^2(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}M$.

【题14】 设$f(x)$在$[a,b]$上有二阶连续导数,且$f''(x)\leqslant 0$,证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

【证】 将$f(x)$在点$x=\frac{a+b}{2}$处展开为一阶泰勒公式,有

$$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\xi)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2.$$

由于$f''(x)\leqslant 0$,所以$f(x)\leqslant f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})$.

上式两端在区间$[a,b]$上积分得:$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant(b-a)f(\frac{a+b}{2})$.

第2部分

全真模拟经典试题

要求与建议

1. 考生一定要在全面复习之后，再做本书中的模拟训练试题.
2. 考生做本书模拟试题时，一定要动手做，而且要写出来. 这样有利于提高解题速度和解答正确性.
3. 不会的题目不要马上看答案，也不要一边查公式定理一边做.
4. 每套题要独立完成，做完后最好约几个同学一起讨论.
5. 对于本书十套经典模拟试题，考生最好用考试规定时间(180分钟)完成每套试题，以便较真实地检查自己的水平，查漏补缺，从而在后面冲刺复习阶段有的放矢.
6. 做完题要注意归纳总结，千万不可就题做题. 建议考生对每道试题做以下事情(写在本书每道试题的空白处)：
   (1) 概括每道试题的考查知识点(注：本书每道试题至少包含两个知识点)；
   (2) 总结每道试题所属题型的解题思路、方法和技巧(注：本书解答部分编者已给出，建议考生用自己的语言进行总结)；
   (3) 做对的题再探究本书介绍以外的解题方法(注：本书对绝大部分试题均介绍了几种解题方法)；
   (4) 做错的题查找错因(注：本书对部分试题给出了错误的解法)；
   (5) 归纳每道试题所考查知识点的衔接点.
7. 由于本书所编试题综合性较强，难度要高于2007年考研试题，因此希望考生遇到难题不要气馁，记住“失败是成功之母”，胜利往往在于再坚持.

模拟试题(一)

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题4分,共32分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}, & x \leqslant 0, \\ x^2+1, & x>0, \end{cases}$ 则 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ 在 $x=0$ 处

(A) 不连续.　　(B) 连续但不可导.

(C) 一阶可导,但二阶不可导.　　(D) 二阶可导.

(2) 设$f(x)$为恒大于零的可微函数,当$\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{4}$时,恒有$f'(x)\sin x<f(x)\cos x$,则当$\frac{\pi}{8}<x<\frac{\pi}{4}$时,下列不等式恒成立的是

(A) $f(\frac{\pi}{8})\sin x>f(x)\sin\frac{\pi}{4}$.　　(B) $f(x)\sin\frac{\pi}{8}>f(\frac{\pi}{4})\sin x$.

(C) $f(\frac{\pi}{8})\sin\frac{\pi}{8}>f(\frac{\pi}{4})\sin x$.　　(D) $f(x)\sin\frac{\pi}{4}>f(\frac{\pi}{4})\sin x$.

(3) 设$f(x)=ax^2+bx+\int_0^2 f(x)\,dx$,若$f(x)$在$x=1$处取极大值$\frac{1}{2}$,则$a=$

(A) 3.　　(B) -3.　　(C) $\frac{3}{2}$.　　(D) $-\frac{3}{2}$.

(4) 下列反常积分

① $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.　　② $\int_0^1 (x-1)\ln x\,dx$.

③ $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$.　　④ $\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}\,dx\quad(\alpha>0)$.

中发散的个数是

(A) 0个.　　(B) 1个.　　(C) 2个.　　(D) 2个以上.

(5) 已知4维列向量$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,若$\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$非零且与$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$均正交,则$r(\boldsymbol{\beta}_1\boldsymbol{\beta}_2\boldsymbol{\beta}_3\boldsymbol{\beta}_4)=$

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

(6) 设$\boldsymbol{A}$为n阶矩阵,对于齐次线性方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{n+1}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,必有

(A) (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解,(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解.