高等院校
精品课程系列规划教材·高等数学

概率统计教程

A Course in Probability and Statistics

叶 臣 陈军刚 周晖杰 主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等院校精品课程系列规划教材·高等数学

概率统计教程

叶　臣　陈军刚　周晖杰　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率统计教程/叶臣,陈军刚,周晖杰主编.—杭州:浙江大学出版社,2011.6
ISBN 978-7-308-08732-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①叶…②陈…③周… Ⅲ.①概率统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 097675 号

概率统计教程

叶　臣　陈军刚　周晖杰　主编

责任编辑　张　鸽
封面设计　十木米
出版发行　浙江大学出版社
(杭州市天目山路 148 号　邮政编码 310007)
(网址:http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　富阳市育才印刷有限公司
开　　本　710mm×1000mm　1/16
印　　张　11.5
字　　数　225 千
版 印 次　2011 年 6 月第 1 版　2011 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-08732-2
定　　价　23.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88925591

前　言

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的数学学科，也是高等院校大部分本科专业的一门十分重要且应用广泛的公共数学基础课. 这门课程不仅具有数学课程所共有的特点——高度的抽象性、严密的逻辑性和广泛的应用性，而且在思维方式、处理问题的主要方法上与高等数学、线性代数等公共数学基础课有许多不同之处. 一定程度上可以说，研究概率统计问题时不能完全拘泥于传统的数学思维，而要用随机的目光，透过表面的偶然性去寻找内部蕴含的必然性. 因此，该课程不仅难学，而且难教.

《概率统计教程》依据国家教育部颁布的“概率论与数理统计课程教学基本要求”，针对当前普通高校学生的特点，同时考虑到教学计划课时少的现状，在编写过程中，我们力争做到叙述简洁、深入浅出、清晰易懂、重点突出，便于教，利于学，强调基础知识、基本思想、基本方法，配以例题和解析，使学生易于掌握内容要点，注重学生基本运算能力的训练及分析问题、解决问题能力的培养. 习题的选择和安排在满足课程基本要求的基础上，兼顾了学生参加 2＋2 考试和将来考研的难度要求，满足不同层次学生的学习需要.

本书可作为普通高等院校非数学专业“概率统计”课程的教材或教学参考用书.

本书的出版得到宁波大学科学技术学院、浙江大学出版社的大力支持，在此表示衷心感谢.

因时间紧促、经验有限，书中疏漏与不当之处，恳请读者指正.

编　者

2011 年 5 月

目　录

第1章 随机事件及其概率

自然界和人类社会活动中存在两类不同的现象，一类是**确定性现象**，一类是**随机现象**. **确定性现象**是指在一定条件下必然出现或不出现某种结果的现象. 例如，一枚硬币向上抛起后必然会下落；标准大气压下，水加热到50℃一定不会沸腾等都是确定性现象. 研究确定性现象的数学工具是微积分学、线性代数等经典数学理论和方法. **随机现象**是指在一定条件下可能出现的结果不止一个，全部可能结果事先已知，但至于出现哪一个结果事先又无法确定的现象. 例如，抛一枚硬币出现正反面的情况，掷一颗骰子出现的点数，某同学下午1点至2点接到的电话数，使用取款机的服务等待时间等都是随机现象.

概率论是从数量的侧面研究随机现象的规律性的数学分支，是随机数学的基础课. **数理统计讨论概率论的思想和方法在实际问题中的应用**. 概率统计方法在自然科学、社会科学等几乎所有的领域都有广泛的应用. 由于随机问题的特殊性，在概率论中分析问题、解决问题的思想和方法有别于其他数学课，关键是对概率思想的理解.

通过本课程的学习，掌握分析、解决随机问题的基本思想和基本方法，建立、训练和完善随机性思维，也为后续课程的学习打好基础.

本章介绍概率论中的基本概念——随机试验、样本空间、随机事件及其概率，并进一步讨论随机事件的关系与运算，以及概率的性质与计算中的一些初等方法.

§1.1 随机试验及随机事件

1.1.1 随机试验

为了研究随机现象，就要对随机现象进行观测，观测的过程称为**随机试验**，简称为**试验**. 例如，观察一次抛两枚硬币出现正反面的情况；测量某一物体的长度；考查某段高速公路一周内发生的交通事故数等.

概率论中随机试验的特点如下：

(1) 在相同的条件下试验可以重复进行；

(2) 每次试验的结果具有多种可能性,而且在试验之前可以明确试验的所有可能结果;

(3) 在每次试验之前不能准确地预言该次试验将出现哪种结果.

例如,上抛一枚硬币,观察其正反面出现情况,这就是一个随机试验.

1.1.2 样本空间

随机试验的每一个可能结果称为一个**样本点**,一般用 ω 表示.对某一个随机试验而言,所有样本点构成的集合称为**样本空间**,一般用 Ω 表示.

例如,在抛一枚硬币的试验中,所有可能结果有两个 —— 正面、反面,即有两个样本点,样本空间 $\Omega=\{$正面,反面$\}$,若设 $\omega_1=$ 正面,$\omega_2=$ 反面,$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$;在掷一颗骰子的试验中,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$;在观察某交通路口中午1小时内汽车流量(单位:辆)的试验中,样本空间 $\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$;在观察一个灯泡使用寿命(单位:小时)的试验中,样本空间 $\Omega=[0,+\infty)$ 等.

按包含样本点的属性,样本空间分为离散型样本空间和非离散型样本空间.离散型样本空间是指包含有限个或可列无穷多个样本点的样本空间;非离散型样本空间是指包含不可列无穷多个样本点的样本空间.

注: 给定样本空间是描述随机现象的第一步.

1.1.3 随机事件

1. 随机事件的定义

通俗地讲,在一次随机试验中,可能发生也可能不发生的事件称为**随机事件**,简称为**事件**.随机事件一般用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示,也可用语言叙述加花括号或引号的形式来表示.例如,在掷一颗骰子试验中,$A=\{$点数为1点$\}$是一个随机事件,包含一个样本点;$B=\{$点数小于4点$\}$也是一个随机事件,包含三个样本点;$C=\{$点数为奇数点$\}$也是一个随机事件,包含三个样本点.可见事件 A,B,C 都是由样本空间 Ω 中若干个样本点构成的.

因此,准确地讲,**随机事件是由样本点组成的集合,或者说是样本空间 Ω 的子集.当且仅当它所包含的某个样本点出现称一个事件发生**.例如,在上述掷骰子试验中,事件 $A=\{$点数为3点$\}$,只包含3这一个样本点;事件 $B=\{$点数为奇数点$\}$,包含1,3,5三个样本点.我们说事件 A 发生必须掷得3点;而事件 B 发生只需掷得1,3,5点中的任何一个即可.

注: 样本空间 Ω 是全体样本点的集合,也是一个事件,因为 Ω 包含试验的所有可能结果,在每次试验中必然出现 Ω 中的某个样本点,即 Ω 必然发生,称 Ω 为必然事件;空集 $\varnothing$ 也是一个事件,它不含任何样本点,它在每次试验中都不会发生,称 $\varnothing$ 为不可能事件.必然事件与不可能事件可以说不是随机事件,但为了今

后研究的方便，还是将必然事件与不可能事件作为随机事件的两个极端情形来统一处理.

2. 随机事件的分类

随机事件分为**基本事件**和**复合事件**. 对于一个随机试验来说，它的每一个可能结果(即每个样本点)都是一个随机事件，它们是试验中最简单的随机事件，我们称之为**基本事件**. 如掷一颗骰子试验中，{点数为 1 点}、{点数为 4 点}等都是基本事件. 对于一个随机试验来说，由若干个可能结果(即若干个样本点)所构成的事件，相对于基本事件，称为**复合事件**. 如掷一颗骰子试验中，{点数小于 4 点}、{点数为奇数点}等都是复合事件.

注：对于某一随机试验而言，可能结果、样本点、基本事件三者是一一对应的，在某种意义上是等价的.

例 1.1.1　某袋中装有 3 只白球(编号为 1,2,3)和 1 只黑球(编号为 4)，从袋中每次取一只球但不放回地取两次，用数对 (i,j) 表示第一次取得 i 号球，第二次取得 j 号球，观察两次取球的结果.

(1) 写出样本空间；

(2) 用样本点的集合表示下列事件：$A=\{$第一次取出黑球$\}$，$B=\{$第二次取出黑球$\}$，$C=\{$第一次及第二次都取出黑球$\}$.

解　(1) 样本空间：

$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\}$；

(2) 事件 $A=\{$第一次取出黑球$\}=\{(4,1),(4,2),(4,3)\}$，

事件 $B=\{$第二次取出黑球$\}=\{(1,4),(2,4),(3,4)\}$，

事件 $C=\{$第一次及第二次都取出黑球$\}=\varnothing$.

§1.2　随机事件的关系及运算

1.2.1　随机事件的关系

1. 事件的包含关系

若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 含于事件 B，记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例 1.2.1　在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=\{$点数为 3 点$\}$，事件 $B=\{$点数为奇数点$\}$，则 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

注：(1) 若事件 B 包含事件 A，则属于事件 A 的每一个样本点也都属于事件 B.

(2) 事件 B 包含事件 A 的等价说法：如果事件 B 不发生，必然导致事件 A 也不会发生.

(3) 对任意事件 A，规定 $\varnothing \subset A$.

2. 事件的相等关系

若事件 A 包含事件 B，事件 B 也包含事件 A，即当 $B \supset A$ 且 $B \subset A$ 时，则称事件 A 与 B 相等，记为 $A = B$.

注： 相等的事件 A 与事件 B 的样本点完全相同.

1.2.2 随机事件的运算

1. 和事件

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生，即"A 或 B"，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$.

注： 事件 A 与事件 B 的和事件是由属于事件 A 或事件 B 的样本点组成的集合.

例 1.2.2 (1) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A = \{$点数为 3 点$\}$，事件 $B = \{$点数为奇数点$\}$，事件 $A \cup B = \{$点数为奇数点$\}$；

(2) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A = \{$点数为 3 点$\}$，事件 $B = \{$点数为偶数点$\}$，事件 $A \cup B = \{$点数为 2,3,4,6 点$\}$；

(3) 事件 $A = \{$甲同学迟到$\}$，事件 $B = \{$乙同学迟到$\}$，事件 $C = \{$丙同学迟到$\}$，事件 $A \cup B = \{$甲、乙两个同学至少一人迟到$\}$，事件 $A \cup B \cup C = \{$甲、乙、丙三个同学至少一人迟到$\}$.

推广： (1) n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生，是一个事件，称为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

(2) 可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 中至少有一个事件发生称为可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 的和事件，记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$，简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$.

2. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生，即"A 且 B"，是一个事件，称为事件 A 与事件 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB.

注： 事件 A 与事件 B 的积事件是由既属于事件 A 又属于事件 B 的所有公共样本点组成的集合.

例 1.2.3 (1) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A = \{$点数为 3 点$\}$，事件 $B = \{$点数为奇数点$\}$，事件 $AB = A$；

(2) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A = \{$点数为 3 点$\}$，事件 $B = \{$点数为偶数点$\}$，事件 $AB = \varnothing$；

(3) 事件 $A = \{$甲同学迟到$\}$，事件 $B = \{$乙同学迟到$\}$，事件 $C = \{$丙同学迟

到}，事件 $AB=$ {甲、乙两个同学都迟到}，事件 $ABC=$ {甲、乙、丙三个同学都迟到}.

推广：(1) n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生，是一个事件，称为事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，或 $A_1A_2\cdots A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(2) 可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生称为可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积事件，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，或 $A_1A_2\cdots A_n\cdots$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 差事件

事件 A 发生而事件 B 不发生，是一个事件，称为事件 A 与 B 的**差事件**，记作 $A-B$.

注：(1) 事件 A 与 B 的差事件是由属于事件 A 但不属于事件 B 的样本点组成的集合.

(2) $A-B=A-AB$.

例 1.2.4 (1) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=$ {点数为 3 点}，事件 $B=$ {点数为奇数点}，事件 $A-B=\varnothing$；

(2) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=$ {点数为 3 点}，事件 $B=$ {点数为偶数点}，事件 $A-B=A$；

(3) 事件 $A=$ {甲同学迟到}，事件 $B=$ {乙同学迟到}，事件 $C=$ {丙同学迟到}，事件 $A-B=$ {甲同学迟到而乙同学没有迟到}，事件 $A-B-C=$ {甲同学迟到而乙和丙同学都没有迟到}.

4. 互不相容(互斥)事件

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 是**互不相容事件**(**或互斥事件**).

注：互不相容事件 A 与事件 B 没有公共的样本点.

例 1.2.5 (1) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=$ {点数为 3 点}，事件 $B=$ {点数为偶数点}，事件 $AB=\varnothing$；

(2) 在掷一颗骰子的试验中，事件 $A=$ {点数为奇数点}，事件 $B=$ {点数为偶数点}，事件 $AB=\varnothing$.

推广：若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任何两个都不能同时发生，即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$，则称这 n 个事件是两两互不相容(或互斥)的.

注：(1) 事件 A 与事件 B 互不相容时，$A\cup B$ 记为 $A+B$.

(2) 两两互不相容的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$，或简记为 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$.

(3) 可列无穷多个事件两两互不相容可类似定义.

5. 对立事件(逆事件)

若 $AB=\varnothing$,且 $A+B=\Omega$,则称事件 B 为事件 A 的**对立事件**(或**逆事件**),表示 A 不发生,记作 $\overline{A}$.

注:(1) 事件 A 的对立事件是由样本空间中所有不属于事件 A 的样本点组成的集合.

(2) $\overline{A}=\Omega-A, A\overline{A}=\varnothing, A+\overline{A}=\Omega, \overline{\overline{A}}=A, A-B=A\overline{B}$.

(3) 必然事件与不可能事件是对立事件.

(4) 把握互不相容事件与对立事件的区别.

1.2.3 随机事件的运算律

1. 交换律:$A\cup B=B\cup A, AB=BA$.
2. 结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (AB)C=A(BC)$.
3. 分配律:$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$.
4. 对偶(De Morgan)律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

上述事件的运算律可推广到多个事件,如三个事件的对偶律:$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}, \overline{ABC}=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$. 在事件的表示、概率的计算中,对偶律很重要.

注:由于事件是样本空间的子集,事件的运算和关系与集合的运算和关系非常类似,但要学会用概率论的语言来解释这些事件的关系及运算,也要会用事件的运算来表示一些新事件,并且注意从概率的角度理解其特有的事件意义.

1.2.4 完备事件组(或样本空间的划分)

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, n\geqslant 2$,为两两互不相容的事件,并且和为必然事件,即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n; A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称这 n 个事件构成一个**完备事件组**(或**样本空间的划分**).

例 1.2.6 观察掷一颗骰子的点数结果,样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,则

(1) 事件组 $A=\{$点数为奇数点$\}$,$\overline{A}=\{$点数为偶数点$\}$ 构成一个完备事件组;

(2) 事件组 $A_1=\{1,2\}, A_2=\{3,4\}, A_3=\{5,6\}$ 构成一个完备事件组;

(3) 事件组 $A_1=\{1\}, A_2=\{2\}, A_3=\{3\}, A_4=\{4\}, A_5=\{5\}, A_6=\{6\}$ 构成一个完备事件组.

注:(1) 同一试验样本空间完备事件组不唯一.

(2) 样本空间中全体基本事件构成完备事件组.

(3) 学会用完备事件组**不相容分割事件**,例如,事件 $A,\overline{A}$ 构成完备事件组,$B=AB+\overline{A}B$;若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组,则 $B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB$.

例 1.2.7　若 A,B,C 是三个事件，用事件的关系和运算表示下列事件：

(1) A 发生，而 B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(3) 三个事件都发生；

(4) 三个事件恰好发生一个；

(5) 三个事件恰好发生两个；

(6) 三个事件至少发生一个；

(7) 三个事件至少发生两个.

解　(1) $A\overline{B}\overline{C}, A-B-C, A-(B\cup C)$；

(2) $AB\overline{C}, AB-C, AB-ABC$；

(3) ABC；

(4) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$；

(5) $AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC$；

(6) $A\cup B\cup C=A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C+AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$；

(7) $AB\cup BC\cup AC=AB\overline{C}+A\overline{B}C+\overline{A}BC+ABC$.

例 1.2.8　在掷一颗骰子的试验中，事件 A 表示{点数不大于 4}，事件 B 表示{出现偶数点}，事件 C 表示{出现奇数点}，试用样本点的集合写出下列事件的运算结果：$A\cup B, AB, A-B, B-A, \overline{B\cup C}, (A\cup B)C$.

解　$A=\{1,2,3,4\}, B=\{2,4,6\}, C=\{1,3,5\}$.

$A\cup B=\{1,2,3,4,6\}, AB=\{2,4\}, A-B=\{1,3\}$,

$B-A=\{6\}, \overline{B\cup C}=\varnothing, (A\cup B)C=\{1,3\}$.

§1.3　随机事件的概率

概率论研究的是随机现象的规律性. 因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的，还必须对事件发生的可能性大小进行量的描述.

1.3.1　概率的统计定义

1. 频率

定义 1.3.1　对随机事件 A，若在 n 次重复试验中发生了 m 次，则称 $\frac{m}{n}$ 为事件 A 发生的**频率**，记为 $f_n(A)$.

显然，必然事件的频率为 1，不可能事件的频率为 0. 必然事件和不可能事件以外的事件，频率介于 0 和 1 之间，但它有什么规律呢？来看抛硬币的随机试验，我们知道一次试验出现正反面是随机的，但大量重复试验时，事件 $A=\{$出

现正面}发生的频率总是在 0.5 附近摆动，而逐渐趋于 0.5(见表 1-1).

表 1-1

试验者	抛掷次数(n)	正面出现次数(m)	正面出现频率[$f_n(A)$]
普丰	4040	2048	0.5056
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

2. 统计规律性

随机现象有其偶然性的一面，也有其必然性的一面. 对一次试验而言，其试验结果表现出偶然性；但在大量重复试验下，其试验结果却呈现出某种规律性 —— **频率的稳定性**，随机现象的这种隐蔽的内在规律性叫做**统计规律性**. 本课程的任务就是研究和揭示随机现象的统计规律性.

3. 概率的统计定义

定义 1.3.2 在不变的条件下，重复进行 n 次试验，若事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动，且一般来说，n 越大，摆动的幅度越小，则称常数 p 为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)=p$.

注：(1) 概率度量随机事件发生的可能性大小.

(2) 频率的稳定性说明，随机事件发生的可能性大小(即概率)是随机事件本身所固有的，不随人的意志而改变的一种客观属性，是先于试验而客观存在的，因此可以对它进行度量.

(3) 频率与概率的上述关系提供了求事件概率近似值的一种手段，即当 n 足够大时，用频率 $f_n(A)$ 作为概率 $P(A)$ 的近似值.

(4) 虽然概率的统计定义很直观，但一般并不用概率的统计定义计算概率.

从概率的统计定义可以看出，直接计算某一事件的概率有时是非常困难的，甚至是不可能的. 下述的古典定义和几何定义就是在某些特定情形下直接计算事件概率的方法.

1.3.2 概率的古典定义

1. 古典概型 —— 有限等概模型

描述具有下列特点的随机试验的模型称为**古典概型**：

(1) 试验的全部可能结果只有有限个；

(2) 每一个可能结果出现的可能性相同.

2. 概率的古典定义

定义 1.3.3　在古典概型中，设样本空间 Ω 中有 n 个样本点，事件 A 由其中 m 个样本点构成，则事件 A 发生的概率为 $P(A)=\dfrac{m}{n}$.

因为此定义只适用于古典概型的情形，所以称为概率的古典定义. 应用概率的古典定义首先要验证古典概型，关键在于计算 m.

3. 古典概率计算例题

例 1.3.1　从 1,2,…,10 共 10 个数字中任取两个数字，试求取出的两个数字和为 8 的概率.

解　从 1,2,…,10 共 10 个数字中任取两个数字，所有结果有 C_{10}^2 种，每种结果等可能出现，两个数字和为 8 的有 3 种结果：1 和 7；2 和 6；3 和 5. 设事件 A ＝｛取出的两个数字和为 8｝，则 $P(A)=\dfrac{3}{C_{10}^2}=\dfrac{1}{15}$.

例 1.3.2　两封不同的信随机地向标号为 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 的 4 个邮筒投寄，求下列事件的概率：

(1) A ＝｛第 Ⅱ 个邮筒恰好被投入 1 封信｝；

(2) B ＝｛前两个邮筒中各有 1 封信｝.

解　所有投寄结果为 16 种，每种结果等可能出现.

(1) $P(A)=\dfrac{C_2^1C_3^1}{16}=\dfrac{3}{8}$；

(2) $P(B)=\dfrac{2}{16}=\dfrac{1}{8}$.

例 1.3.3　考试抽签，在 10 个签中，有 2 个难签和 8 个容易的签，现有 10 人任意抽签，每人一个，求第七人抽到难签的概率.

解　所有抽签结果有 A_{10}^{10} 种，每种结果等可能出现. 设事件 A ＝｛第七人抽到难签｝，

$$P(A)=\frac{C_2^1A_9^9}{A_{10}^{10}}=\frac{2}{10}.$$

此题说明抽签是公平的，结果只与签的结构有关，与抽签顺序无关.

1.3.3　概率的几何定义

1. 几何概型——不可列无限等概模型

具有下列特点的随机试验的模型称为**几何概型**：

(1) 试验的样本空间 Ω 是直线上某个有限区间，或者是平面上、空间内的某个度量有限的区域，从而样本空间 Ω 有不可列无限多个样本点；

(2) 每个样本点的出现具有相同的可能性，即每一个可能结果出现的可能性相同.

2. 概率的几何定义

定义 1.3.4 设试验的每个样本点是等可能地落入区域 Ω(即样本空间)上的随机点 M，且 $D \subset \Omega$，则 M 点落入子域 D 上(事件 A) 的概率为

$$P(A) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} \left(P(A) = \frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}}\right).$$

其中，当 Ω 是区间时，$m(\Omega)$ 及 $m(D)$ 表示相应的长度；当 Ω 是平面或空间区域时，$m(\Omega)$ 及 $m(D)$ 表示相应的面积或体积.

例 1.3.4 某路公共汽车每隔 15 分钟通过一车站，在一乘客对发车时间完全不知道的情况下，求此乘客到站等车时间不多于 5 分钟的概率.

解 由于乘客对发车时间完全不知，因此他在 15 分钟发车间隔内的任一时间点到达车站是等可能的，考察乘客的等车时间，可用几何概型来描述，到达时刻的样本空间 $\Omega = [0,15]$. 设事件 $A = \{$乘客到站等车时间不多于 5 分钟$\}$，事件 A 对应的子域 $D = [10,15]$，则

$$P(A) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

例 1.3.5 两人相约 7 点到 8 点之间在某地会面，先到者等候另一人 20 分钟，过时就可离去，试求这两人能会面的概率.

解 设两人到达会面地点的时刻分别为 7 点过 x 分和 7 点过 y 分. 两人到达时刻的样本空间 $\Omega = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60\}$.

设事件 $A = \{$两人能会面$\}$，则

$$A = \left\{(x,y) \,\middle|\, \begin{array}{l} |x-y| \leqslant 20; \\ 0 \leqslant x \leqslant 60, 0 \leqslant y \leqslant 60 \end{array}\right\},$$

记事件 A 对应的子域为 D，见图 1-1，所以

$$P(A) = \frac{m(D)}{m(\Omega)} = \frac{S_D}{S_\Omega} = \frac{5}{9}.$$

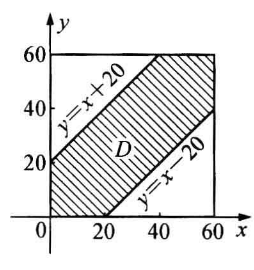

图 1-1

1.3.4 概率的性质

性质 1 不可能事件的概率为零，即 $P(\varnothing) = 0$；必然事件的概率为 1，即 $P(\Omega) = 1$；任意事件的概率在 0 和 1 之间，即 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 2 概率的**加法公式**：两个互斥事件之和的概率等于它们概率的和，即

$$AB = \varnothing, P(A+B) = P(A) + P(B).$$

例 1.3.6　一个袋内装有 10 个球，其中 5 个白球，3 个红球，2 个黄球，现从中任取一个球，事件 $A=\{$取到红球$\}$，事件 $B=\{$取到黄球$\}$，事件 $C=\{$取到彩色球$\}$，求三个事件的概率，并讨论它们的关系.

解　$C=A+B, P(A)=\dfrac{3}{10}, P(B)=\dfrac{2}{10}, P(C)=P(A)+P(B)=\dfrac{1}{2}$.

注：(1) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$，

称为**概率的有限可加性**.

(2) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为完备事件组，则

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1,$$

特别有 $P(A)+P(\overline{A})=1, P(A)=1-P(\overline{A})$.

(3) 利用完备事件组不相容分割事件及概率的加法公式，有下列常用结果：

$$B=AB+\overline{A}B, P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B).$$

若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成完备事件组，$B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB$，

$$P(B)=P(A_1B+A_2B+\cdots+A_nB)=P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB).$$

例 1.3.7　某班 60 名同学中，有男生 15 名，女生 45 名，现从此班随机抽出 5 名同学，求抽出的 5 名同学中至少有一名男生的概率.

解　设事件 $A=\{$抽出的 5 名同学中至少有一名男生$\}$，$\overline{A}=\{$抽出的 5 名同学中没有男生$\}$，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{45}^5}{C_{60}^5}\approx 0.7763.$$

该方法比直接计算事件 A 的概率要简便.

性质 3　若事件 A 包含事件 B，即 $A\supset B$，则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

注：(1) 事件 A 与事件 B 为任意事件，

$P(A-B)=P(A)-P(AB), P(B-A)=P(B)-P(AB)$.

(2) 若 $A>B$，则 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 4　**广义加法公式**

事件 A, B, C, D 为任意事件，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB);$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC);$$

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C\cup D)=&P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(AB)\\&-P(AC)-P(AD)-P(BC)-P(BD)-P(CD)\\&+P(ABC)+P(ABD)+P(ACD)+P(BCD)\\&-P(ABCD).\end{aligned}$$