高等学校数学系列

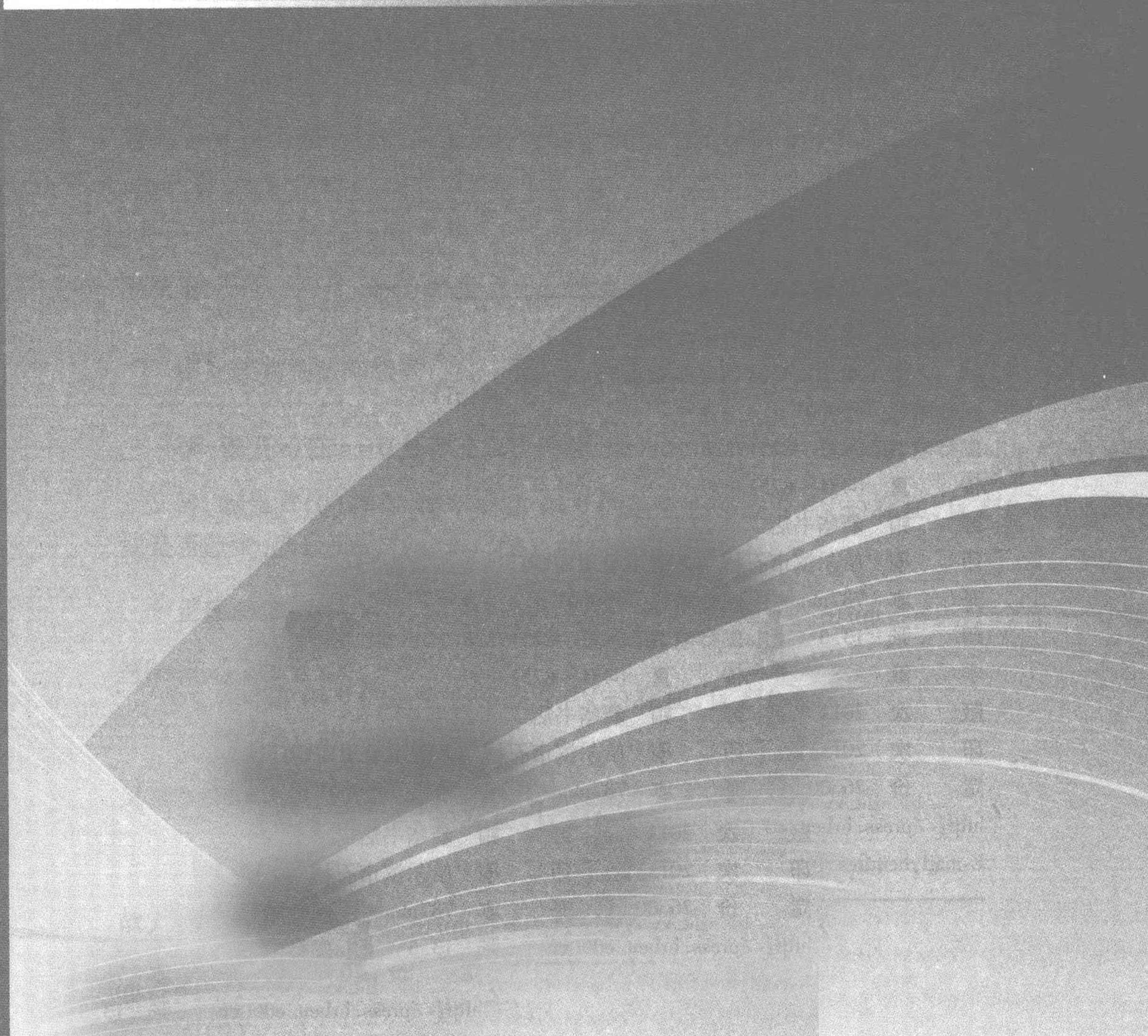
高等数学中的典型问题与方法

编著/王汝发 丁晓红

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

高等数学中的典型问题与方法

编著/王汝发 丁晓红



内容简介

本书是为学习过高等数学并对高等数学有兴趣的读者而编写的，着重对高等数学中的典型问题与方法及近年来全国硕士研究生入学统一考试中数学试卷出现的重要问题进行深入剖析和拓展，得出了一些新的结论和方法，扩充了高等数学教材内容；同时又对高等数学中的若干判定法则进行了比较，揭示其联系与区别，在此基础上得到了更精细、更有用的判定法则。本书的特点是可读性强，信息量大，选题具有很强的典型性、灵活性、启发性、趣味性和综合性。

全书共分11章，主要包括一元函数的极限、连续、微分、积分、级数、常微分方程；多元函数的极限、连续、微分、积分和数学解题理论等。

本书可供高等学校和中等学校数学教师、大学生、数学工作者、其他科技人员和数学爱好者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学中的典型问题与方法／王汝发，丁晓红编著.—哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2011.4
ISBN 978-7-5661-0103-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①王… ②丁… Ⅲ.①高等数学 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2011)第052170号

出版发行	哈尔滨工程大学出版社
社　址	哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码	150001
发行电话	0451-82519328
传　真	0451-82519699
经　销	新华书店
印　刷	哈尔滨市石桥印务有限公司印刷厂
开　本	787mm×1092mm　1/16
印　张	13.5
字　数	328千字
版　次	2011年4月第1版
印　次	2011年4月第1次印刷
定　价	26.00元

http://press.hrbeu.edu.cn

E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前言

《高等数学中的典型问题与方法》一书即将付梓，我们激动不已：终于完成了我们的又一个心愿。这不是一本很厚的书，但我们希望它是一本很有分量的书。

本书是笔者继完成《高等数学解题方法引论》《数学模型》《数学文化与数学教育》《数学·哲学与科学技术发展》等一系列著作之后，关于高等数学理论研究的又一新作。全书由十一章组成，是为学习过高等数学并对高等数学有兴趣的读者而编写的，着重对高等数学中的典型问题与方法及近年来全国硕士研究生入学统一考试中数学试卷出现的重要问题进行深入剖析和拓展，得出了一些新的结论，扩充了高等数学教材内容，介绍了新的知识点；同时又对高等数学中的若干判定法则进行了比较，发现其联系与区别，在此基础上得到了更精细、更有用的判定法则，展示了数学方法与技巧，这些方法与技巧在教科书上一般不容易找到。虽然书中涉及的知识面比较宽，但没有面面俱到，主要侧重于特色问题、有趣问题、新颖问题，其中的原因主要是考虑到目前现成的教科书随手可得，故将本书取名为《高等数学中的典型问题与方法》。

本书具有内容新、方法新、观点新的特点，所述问题均是读者感兴趣的问题，体现了现代数学发展的特点，有助于提高读者综合应用所学知识分析问题和解决问题的能力，激发读者进一步研究问题的兴趣。

本书可作为大学生进一步复习和钻研高等数学的参考书，也可作为高校数学教师以及其他科技工作者的参考用书。我们真诚地期望读者能从本书中获得一些启发，也希望有更多的数学爱好者喜欢它。本书主要介绍了我们多年来在高等数学教学实践中的研究成果，同时也采用了不少同行专家的最新研究成果。除了书末所列参考文献和脚注之外，有些尚未列入，谨向这些作者表示真诚的谢意。

本书第 1、3、5、6、9、10 章由王汝发撰写，第 2、4、7、8、11 章由丁晓红撰写，全书统稿、定稿工作由王汝发担任。

由于本书涉及的不少问题是在教学实践中遇到的新问题，也都是学过高等数学的人们想要搞清楚的问题，有些内容尚在探讨之中，加之我们水平有限，所以论述不周甚至错误在所难免，恳请广大读者批评指正。

编著者

2011 年 2 月 15 日

目 录

第1章 特殊函数及其性质

数学作为一门最古老的学科，从远古人类的屈指计数到现代电子计算机的发明和应用，经历了5 000多年的历史. 从古到今，数学都有着多种对象，这些对象有着不同的来源，最早形成的便是计数以及一些直观的几何图形，即数与形，但这时数学还没有形成一门学科. 变量数学产生于17世纪，大体上经历了两个重大发展阶段：解析几何的产生和微积分的创立. 解析几何的产生与发展，对推动工业革命，促进几何以及数学其他分支，乃至整个科学的发展起到巨大的作用. 微积分以笛卡儿(1596—1650)建立解析几何为起点，是17世纪80年代最显赫的成就和标志. 变量数学的产生，使其自身在思想方法上发生了重大的变革. 新的数学分支学科如雨后春笋般地涌现出来，如解析数论、微分几何、微分方程、级数论、差分学、函数论等，变量数学成了一个庞大的家族. 这一时期辩证法通过数学分析及其变量、函数和极限等概念，运动、变化等思想渗入到全部数学中.

§1.1 分段函数

一、分段函数的重要意义

分段函数有着独特的性质和特殊的作用. 一般高等数学教科书将分段函数定义为“在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数”. 对于分段函数的运用与研究，人们普遍关注的是它在分段处的解析性质. 它在极限论、微分论、积分学和无穷级数研究中有着特殊意义.

(一) 分段函数在微分学中用于举反例

在微分学中，证明充分非必要条件或必要非充分条件的命题的逆命题不成立时，最有效的办法是举反例，而这些反例多数是分段函数，并且出现在分段点处.

例1 完成下列问题：(1) $y=|x|$，求证其可导必连续的逆命题不成立. (2) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$ 求证 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$ 存在且连续，但 $z=f(x,y)$ 可微的逆命题不成立.

该题请读者自己证明。

例2 利用下列分段函数说明罗尔(Rolle)定理的三个条件缺一不可.

(1) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 在$[0,1]$上不连续；

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & x>0;\\ -x, & 0\leqslant x<1.\end{cases}$ 在$[-1,1]$内不可导；

(3) $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1;\\ \dfrac{1}{2}, & x=1.\end{cases}$ 有$f(0)\neq f(1)$.

显然这三个函数对罗尔定理都不成立.

(4) $f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|<1;\\ 0, & -2\leqslant x\leqslant -1;\\ 1, & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ 在$[-2,2]$上不连续,在$(-2,2)$内不可导,$f(2)\neq f(-2)$,即罗尔定理的三个条件都不满足,但在$(-2,2)$内存在一点$\xi=0$,满足$f(0)=0$,这说明罗尔定理的条件仅是充分并非必要.

例 3 $f_x'(x_0)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$常被初学者误认为是相同的,其实只要认真地分析一下它们各自的定义就明白了.

解 由于$f_x'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,而$\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$是导数的右极限,因此它们首先在要求$x_0$点有无定义方面有所不同,即$(x_0,x_0+\Delta x)$内的可微性不同;其次是它们的极限意义不同. 故两者有着本质的不同. 用下列分段函数即可说明问题.

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由定义得$f_x'(0)=0$,而$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$不存在.

练习题 设$f(x)=\begin{cases}x^2e^{-x^2}, & |x|\leqslant 1;\\ \dfrac{1}{e}, & |x|>1.\end{cases}$ 求$f'(x)$.

(二) 分段函数在积分学中用于理解定积分的定义和计算

由于定积分$\int_a^b f(x)\,dx=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$是$f(x)$在积分区间$[a,b]$上通过分割、近似代替、求和、取极限而得到的,如果以分段函数

$$f(\xi_i)=\begin{cases}f(\xi_1), & \xi_1\in\Delta x_1;\\ f(\xi_2), & \xi_2\in\Delta x_2;\\ \quad\vdots & \quad\vdots\\ f(\xi_n), & \xi_n\in\Delta x_n.\end{cases}$$

近似代替函数$y=f(x)$,对分段函数$f(\xi_i)$做成积分和$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,再取极限,相当于用$f(\xi_i)$逼近$f(x)$得出

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx.$$

这说明在定积分的极限方法中"以直代曲"的辩证思想可将函数$y=f(x)$转化为分段函数. 另外,定积分的区间可加性用分段函数表示也是很方便的.

(三) 分段函数在极限论中用于解决由局部开拓到整体或在整体中找出具体某种属性的局部点问题

例 4 若函数在$(-\infty,+\infty)$上任意点都有确定值,则能否有函数在$(-\infty,+\infty)$上一定是有限的?

解 不一定. 如

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases} \text{和 } g(x)=\begin{cases} n, & \text{当 } x=\dfrac{m}{n}\text{为有理点}, m,n\text{ 互质};\\ 0, & \text{当 } x \text{ 取无理点}.\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上任何一点都有确定值,可是它在$(-\infty,+\infty)$上任意点的邻域都无界.

高等数学中的许多定理、法则都是在有限条件下得出的,如果要开拓到无限情况必须进行证明,否则往往会出错. 如

$$f_k(n)=\begin{cases}1, & \text{当 } n<k;\\ \dfrac{k}{n-k+1}, & \text{当 } n\geqslant k.\end{cases} \quad (k=1,2,\cdots)$$

当 $n\to\infty$ 时,$f_k(n)=0$,所以,$f_k(n)$对任意 k 都是 $n\to\infty$ 时的无穷小. 另外由

$$f_1(n)f_2(n)\cdots f_n(n)=\frac{1}{n}\frac{2}{n-1}\frac{3}{n-2}\cdots\frac{n-1}{2}n=1$$

可见,$k\to\infty$ 时,无穷多个无穷小量之积不是无穷小量.

(四)分段函数在级数中的应用

一般情况下,函数 $y=f(x)$所对应的幂级数如果收敛于和函数 $S(x)$,人们便认为 $S(x)=f(x)$,其实不然,如

$$f(x)=\begin{cases}e^{1/x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

就是一例.

关于函数项级数的和函数,在其收敛域上的连续、可微、可积性质,对于有限个函数的和函数 $S_n(x)=\sum\limits_{k-1}^{n}U_k(x)$ 来说,由 $U_k(x)$的分析性质可推出 $S_n(x)$也有相应的属性;但作为无穷多个函数的"和函数",就不一定有这些性质. 如

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1}),\quad S_n(x)=x^n,$$

可得

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\begin{cases}0; & 0\leqslant x<1;\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

说明由 $U_k(x)$的连续性推不出 $S(x)$的连续性,通项微分、通项积分也不成立.

总之,分段函数反映了现实生活中的变量依赖现象,是高等数学中不可缺少的一部分,并在高等数学各个阶段的学习和研究命题的过程中常常起到画龙点睛的作用.

由上面的讨论可知,分段函数有着极其重要的地位,不仅如此,分段函数在分段点处的可导性问题也是一个重要问题. 一般情况下,讨论分段点处的可导性,是用导数的定义分别求出分段点的左、右导数,然后判断它们是否相等,当二者相等时,导数存在,否则不可导. 如果要求分段函数$f(x)$在 $x=a$ 点处的导数$f'(a)$,可用导数在 $x=a$ 点处的左(右)极限确定左(右)导数,即"分段函数分段点,左右运算要先行".

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}f'(x),\quad f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}f'(x).$$

下面给出分段函数在分段点处可导的一个充要条件.

定理 1 **设$f(x)$在点 $x=a$ 处分段,且在$[a-\delta,a+\delta]$($\delta>0$)上连续,在$(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$内可导,导数$f'(x)$在点 a 处左、右极限存在,则$f(x)$在点 a 处可导的充要条件是导函数$f'(x)$在点 a 处的左、右极限相等,即**

$$f'(a+0)=\lim_{x\to a^+}f'(x)=\lim_{x\to a^-}f'(x)=f'(a-0).$$

证 必要性是显然的,以下只证充分性.因为$f(x)$在$[a-\delta,a]$上连续,在$(a-\delta,a)$内可导,所以满足拉格朗日(Lagrange)中值定理的条件,于是至少存在一点$\xi\in(a-\delta,a)$,使得

$$\frac{f(a-\delta)-f(a)}{a-\delta}=f'(\xi),\quad \xi\in(a-\delta,a).$$

令$\delta\to0$,则$\xi\to a$.所以

$$\lim_{\delta\to0}\frac{f(a-\delta)-f(a)}{a-\delta}=\lim_{\xi\to a^-}f'(\xi),$$

即
$$f'_-(a)=f'(a-0).$$
同理
$$f'_+(a)=f'(a+0).$$
又因
$$f'(a-0)=f'(a+0)\Rightarrow f'_+(a)=f'_-(a),$$
故$f(x)$在点$x=a$处的导数$f'(a)$存在.

由定理1可以看出:(1)在满足定理1的前提下,若在点$x=a$处的左、右极限不相等,则在该点处的导数不存在.(2)定理1的前提是导数$f'(x)$在点a的左、右极限都存在时,$f(x)$在点a处可导;若$f'(x)$在点a的左、右极限不存在时,$f(x)$在点a处的导数可能存在,也可能不存在.

例5 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant0;\\ -x^3, & x<0.\end{cases}$判断$f(x)$在点$x=0$处是否可导?

解 显然$f(x)$在点$x=a$处连续,在$(0,+\infty)$内可导,且导数$f'(x)=2x$,在点$x=a$处的右极限$f(0+0)=0$;在$(-\infty,0)$内可导,且导数$f'(x)=-3x^2$,在点$x=0$处的左极限$f'(0-0)=0$,所以$f(x)$在点$x=0$处可导,$f'(x)=0$.

例6 讨论函数$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0;\\ 0, & x=0\end{cases}$的可导性.

解 由导数的定义不难知道,$f(x)$在点$x=0$处可导,且$f'(0)=0$,而$f(x)$的导数

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在点$x=0$处左、右极限均不存在.

例7 讨论函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq0;\\ 0, & x=0\end{cases}$的可导性.

解 当$x\neq0$时,$f(x)$可导,且

$$f'(x)=\frac{(1-e^{\frac{1}{x}})\cdot1-x(-e^{\frac{1}{x}})\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(1-e^{\frac{1}{x}})^2}=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{(1-e^{\frac{1}{x}})^2}.$$

当$x=0$时

$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{\dfrac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}}-0}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

所以
$$f'_-(0)\neq f'_+(0),$$
$f(x)$在$x=0$处不可导.

例8 设函数$f(x)$具有一阶连续导数,$f''(0)$存在,且$f'(0)=0,f(0)=0$,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0;\\ a, & x=0.\end{cases}$$

(1) 确定a,使得$g(x)$处处连续;(2) 对以上所确定的a,证明$g(x)$具有一阶连续导数.

分析 前面说过分段函数的连续和导数,在分段点处的导数一般用定义来求.

解 (1) 若$g(x)$处处连续,则$g(x)$在$x=0$处连续. 于是$f(0)=0$,且

$$a=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=0.$$

(2) 因
$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

$$g'(0)=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{f(x)}{x}-0}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\frac{1}{2}f''(0),$$

于是
$$g'(x)=\begin{cases}\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}, & x\neq0;\\ \dfrac{1}{2}f''(0), & x=0.\end{cases}$$

显然,当$x\neq0$时,$g'(x)$连续;当$x=0$时,因为

$$\lim_{x\to0}g'(x)=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\left[\frac{f'(x)}{x}-\frac{f(x)}{x^2}\right]=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$$
$$=f''(0)-\frac{1}{2}f''(0)=\frac{1}{2}f''(0)=g'(0),$$

所以$g'(x)$在$x=0$处连续,$g(x)$具有一阶连续导数.

对分段函数,我们还有如下定理.

定理2 设$h(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a-\delta,a);\\ g(x), & x\in[a,a+\delta).\end{cases}$ **$f(x),g(x)$都在$(a-\delta,a+\delta)$内有定义且在点a处可导,$f'(a)=g'(a)$,则当$h(x)$在点a处连续时,$h(x)$在点a处可导.**

证 因$f(x),g(x)$在点a处可导,$f'(a)=g'(a)$,即

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}.$$

由$h(x)$在点a处的连续性,得

$$\lim_{x\to a}h(x)=h(a),\quad \lim_{x\to a^+}h(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=g(a),\quad \lim_{x\to a^-}h(x)=\lim_{x\to a^-}f(x)=f(a).$$

因为
$$h'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a),$$
$$h'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a),$$
由
$$f'(a)=g'(a)\Rightarrow h'_+(a)=h'_-(a),$$
故 $h(x)$ 在点 $x=a$ 处可导.

二、分段函数的初等性

我们知道,若一个函数在其他定义域内对应于不同的区间段有不同的表达式,则该函数称为分段函数.常见的分段函数有:

(1) 符号函数 $y=f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & 当\ x>0;\\ 0, & 当\ x=0;\\ -1, & 当\ x<0.\end{cases}$

(2) 最大整数函数 $y=f(x)=[x]$.

(3) 狄利克莱函数 $y=f(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数;\\ 0, & 当\ x\ 为无理数.\end{cases}$

由基本初等函数通过有限次的四则运算和有限次的复合运算而构成,并能用一个数学式子来表示的函数称为初等函数.显然,初等函数是非常广泛的,我们经常研究的函数基本上都是初等函数.然而,对于分段函数而言,有些是初等函数,有些却不是初等函数,分段函数是不是初等函数,关键在于定义域的不同区间所对应的不同分段数学表达式能否统一为一个数学表达式,能否实现这种转变,怎样实现这种转变?下面讨论这个问题.

引理 1　分段函数 $f(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant a;\\ x, & a\leqslant x\leqslant b;\\ b, & x\geqslant b.\end{cases}$ $(a\leqslant b)$ 是初等函数.

证　因为 $f(x)=\frac{1}{2}[a+b+\sqrt{(x-a)^2}-\sqrt{(x-b)^2}]$,所以 $f(x)$ 是初等函数.

定理 3　设 $a\leqslant x\leqslant b$, $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & a<x<c;\\ F_2(x), & c<x<b.\end{cases}$ $F_1(c)=F_2(c)$,若 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 分别是 $[a,c]$, $[c,b]$ 上的初等函数,则 $F(x)$ 是 $[a,b]$ 上的初等函数.

证　令
$$f_1(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant a;\\ x, & a\leqslant x\leqslant c;\\ c, & x\geqslant c.\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}c, & x\leqslant c;\\ x, & c\leqslant x\leqslant b;\\ b, & sx\geqslant b.\end{cases}$$
则
$$F_1[f_1(x)]=\begin{cases}F_1(x), & a\leqslant x\leqslant c;\\ F_1(c), & c\leqslant x\leqslant b.\end{cases}\quad F_2[f_2(x)]=\begin{cases}F_2(c), & a\leqslant x\leqslant c;\\ F_2(x), & c\leqslant x\leqslant b.\end{cases}$$
即 $F(x)=F_1[f_1(x)]+F_2[f_2(x)]-F(c)$,而 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $F_1(x)$, $F_2(x)$ 都是初等函数,故 $F(x)$ 是初等函数.

引理 2　函数 $f_1(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant a;\\ a, & x\geqslant a.\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant a;\\ x, & x\geqslant a.\end{cases}$ 都是初等函数.

证　因为 $f_1(x)=\frac{1}{2}[a+x-\sqrt{(x-a)^2}]$, $f_2(x)=\frac{1}{2}[a+x+\sqrt{(x-a)^2}]$,所以 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 都是初等函数.

定理4 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\leqslant a;\\ F_2(x), & x\geqslant a.\end{cases}$ $F_1(a)=F_2(a)$，若 $F_1(x),F_2(x)$ 分别是 $(-\infty,a],[a,+\infty)$ 上的初等函数，则 $F(x)$ 也是初等函数.

证 因为 $F_1[f_1(x)]=\begin{cases}F_1(x), & x\leqslant a;\\ F_1(a), & x\geqslant a.\end{cases}$ $F_2[f_2(x)]=\begin{cases}F_2(a), & x\leqslant a;\\ F_2(x), & x\geqslant a.\end{cases}$

$$F_1[f_1(x)]+F_2[f_2(x)]=\begin{cases}F_1(x)+F_2(a), & x\leqslant a;\\ F_2(x)+F_1(a), & x\geqslant a.\end{cases}$$

所以有
$$F(x)=F_1[f_1(x)]+F_2[f_2(x)]-F_1(a).$$
又因为 $f_1(x),f_2(x),F_1(x),F_2(x)$ 都是初等函数，故 $F(x)$ 也是初等函数.

定理5 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\leqslant a;\\ F_2(x), & a\leqslant x\leqslant b;\\ F_3(x), & x\geqslant b.\end{cases}$ $F_1(a)=F_2(a),F_2(b)=F_3(b)$，若 $F_1(x),F_2(x),F_3(x)$ 分别是 $(-\infty,a],[a,b],[b,+\infty)$ 上的初等函数，则 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的初等函数.

证 令 $f_1(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant a;\\ a, & x\geqslant a.\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant a;\\ x, & a\leqslant x\leqslant b;\\ b. & x\geqslant b.\end{cases}$ $f_3(x)=\begin{cases}b, & x\leqslant b;\\ x, & x\geqslant b.\end{cases}$

则
$$F_1[f_1(x)]=\begin{cases}F_1(x), & x\leqslant a;\\ F_2(a), & x\geqslant a.\end{cases}\quad F_2[f_2(x)]=\begin{cases}F_2(a), & x\leqslant a;\\ F_2(x), & a\leqslant x\leqslant b;\\ F_2(b), & x\geqslant b.\end{cases}$$

$$F_3[f_3(x)]=\begin{cases}F_3(b), & x\leqslant b;\\ F_3(x), & x\geqslant b.\end{cases}$$

故 $F(x)=F_1[f_1(x)]+F_2[f_2(x)]+F_3[f_3(x)]-F_1(a)-F_2(b)$ 为初等函数.

推论1 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x\leqslant a_1;\\ F_2(x), & a_1\leqslant x\leqslant a_2;\\ \vdots & \vdots\\ F_n(x), & x\geqslant a_{n-1}.\end{cases}$ $F_1(a_1)=F_2(a_1),F_2(a_2)=F_3(a_2),\cdots,F_{n-1}(a_{n-1})=F_n(a_{n-1})$，其中 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_{n-1}$，若 $F_1(x),F_2(x),\cdots,F_n(x)$ 分别是 $(-\infty,a_1],[a_1,a_2],\cdots,[a_{n-1},+\infty)$ 上的初等函数，则 $F(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的初等函数.

证略.

引理3 函数 $g(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ 1, & a<x<b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$ 是初等函数，其中 $g(x)$ 在 a,b 两点无定义，则 $g(x)$ 是初等函数.

证 因为 $g(x)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sqrt{(x-a)^2}}{(x-a)}-\dfrac{\sqrt{(x-b)^2}}{x-b}\right]$，所以 $g(x)$ 是初等函数.

定理6 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & a<x<c;\\ F_2(x), & c<x<b.\end{cases}$ 若 $F_1(x),F_2(x)$ 分别为 $(a,c),(c,b)$ 上的初等

函数,则 $F(x)$ 是 $(a,c)\cup(c,b)$ 上的初等函数.

证 设

$$g_1(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ 1, & a<x<c;\\ 0, & x>c.\end{cases}\quad g_2(x)=\begin{cases}0, & x<c;\\ 1, & c<x<b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

$$f_1(x)=\begin{cases}a, & x\leqslant a;\\ x, & a\leqslant x\leqslant c;\\ 0, & x\geqslant c.\end{cases}\quad f_2(x)=\begin{cases}c, & x\leqslant c;\\ x, & c\leqslant x\leqslant b;\\ b, & x\geqslant b.\end{cases}$$

则

$$F_1[f_1(x)]=\begin{cases}F_1(a), & x\leqslant a;\\ F_1(x), & a\leqslant x\leqslant c;\\ F_1(c), & x\geqslant c.\end{cases}\quad F_1[f_1(x)]g_1(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ F_1(x), & a<x<c;\\ 0, & x>c.\end{cases}$$

$$F_2[f_2(x)]=\begin{cases}F_2(c), & x\leqslant c;\\ F_2(x), & c\leqslant x\leqslant b;\\ F_1(c), & x\geqslant b.\end{cases}\quad F_2[f_2(x)]g_2(x)=\begin{cases}0, & x<c;\\ F_2(x), & c<x<b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

即 $F(x)=F_1[f_1(x)]g_1(x)+F_2[f_2(x)]g_2(x)$ 是 $(a,c)\cup(c,b)$ 上的初等函数.

定理 7 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x<a;\\ F_2(x), & x>a.\end{cases}$ 若 $F_1(x),F_2(x)$ 都是 $\Delta=(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ 上的初等函数,则 $F(x)$ 是 Δ 上的初等函数.

证 令 $g_1(x)=\begin{cases}1, & x<a;\\ 0, & x>a.\end{cases}$ $g_2(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ 1, & x>a.\end{cases}$ 可以证明 $g_1(x),g_2(x)$ 都是 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$ 上的初等函数,从而

$$F_1(x)g_1(x)=\begin{cases}F_1(x), & x<a;\\ 0, & x>a.\end{cases}\quad F_2(x)g_2(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ F_2(x), & x>a.\end{cases}$$

即 $F(x)=F_1(x)g_1(x)+F_2(x)g_2(x)$ 是 Δ 上的初等函数.

定理 8 设 $F(x)=\begin{cases}F_1(x), & x<a;\\ F_2(x), & a<x<b;\\ F_3(x), & x>b.\end{cases}$ 若 $F_1(x),F_2(x),F_3(x)$ 都是 $\Delta=(-\infty,a)\cup(b,+\infty)$ 上的初等函数,则 $F(x)$ 是 Δ 上的初等函数.

证 令 $g_1(x)=\begin{cases}1, & x<a;\\ 0, & x>a.\end{cases}$ $g_2(x)=\begin{cases}0, & x<a;\\ 1, & a<x<b;\\ 0, & x>b.\end{cases}$ $g_3(x)=\begin{cases}0, & x<b;\\ 1, & x>b.\end{cases}$ 容易验证 $g_1(x),g_2(x),g_3(x)$ 都是初等函数,从而 $F(x)=F_1(x)g_1(x)+F_2(x)g_2(x)+F_3(x)g_3(x)$ 都是 Δ 上的初等函数.

此外,对于多元函数的情形也有类似的性质,有兴趣的读者不妨一试. 下面我们再来讨论分段函数的连续性和不定积分问题. 这里主要判断分段函数在分段点的连续性,函数在一点连续有以下两个定义.

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $y=$

$f(x)$在点 x_0 连续.

分段函数$f(x)$在某点 x_0 处极限的计算及连续性的判断原则是：当 x_0 为非分界点时，该点处极限的计算与连续性的判断与初等函数求法一样；当 x_0 为分界点时，按前面确定的原则去做即可. 一般而言，在证明命题时用定义 1 比较方便，但在判断分段函数在分段点处的连续性时用定义 2 比较方便.

例 9 设 $a=2k\pi+\frac{\pi}{2}(k=0, \pm 1, \cdots)$，试判断下列函数在分段点 $x=0$ 处的连续性.

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & x \leqslant 0 ; \\ \sin (x+a), & x>0 .\end{cases}$$

解 $f(0)=1, f(0-0)=\lim\limits_{x \rightarrow 0} \cos x=1, f(0+0)=\lim\limits_{x \rightarrow 0^{+}} \sin (x+a)=\sin a=1$，由连续函数的定义 2 知$f(x)$在点 $x=0$ 处连续.

对于分段函数$f(x)$在非分界点 x_0处导数的求法可由导数的定义或运算法则计算. 而在分界点 x_0处判定可导性，一般根据导数的定义或导数存在的充要条件来判断. 若分段函数在分界点两侧的表达式一样，则根据前者；若分段函数在分界点两侧的表达式不同，则根据后者. 求分段函数的导数，一般分为两个步骤：(1) 先按导数公式或求导法则求出分段函数在各分段区间内的导数；(2) 再讨论分段函数在分界点处的可导性.

三、如何求分段函数的不定积分

一般而言，其思路是连续函数必有原函数，且原函数连续. 若分段函数的分界点是函数的第 1 类间断点，则包含该点在内的区间不存在原函数. 解题程序是先分别求出各区间段的不定积分表达式，积分常数用不同的字母，然后由原函数的连续性确定出各积分常数的关系，最后要用一个字母表示不定积分中的任意常数.

例 10 求 $\int \max \{x^3, x^2, 1\} \mathrm{d} x$.

解 令$f(x)=\max \{x^3, x^2, 1\}=\begin{cases}x^3, & x \geqslant 1 ; \\ x^2, & x \leqslant-1 ; \\ 1, & |x|<1 .\end{cases}$ 则$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，由连续函数必有原函数且原函数连续的性质知：当 $x \geqslant 1$ 时，$\int f(x) \mathrm{d} x=\int x^3 \mathrm{~d} x=\frac{1}{4} x^4+C_1$；当 $x \leqslant -1$ 时，$\int f(x) \mathrm{d} x=\int x^2 \mathrm{~d} x=\frac{1}{3} x^3+C_2$；当$|x|<1$ 时，$\int f(x) \mathrm{d} x=\int \mathrm{d} x=x+C_3$.

由 $\lim\limits_{x \rightarrow 1^{+}}\left(\frac{1}{4} x^4+C_1\right)=\lim\limits_{x \rightarrow 1^{-}}(x+C_3)$，得

$$\frac{1}{4}+C_1=1+C_3. \tag{1-1}$$

又由 $\lim\limits_{x \rightarrow-1^{+}}(x+C_3)=\lim\limits_{x \rightarrow-1^{-}}\left(\frac{1}{3} x^3+C_2\right)$，得

$$-1+C_3=-\frac{1}{3}+C_2. \tag{1-2}$$

联解(1-1)式，(1-2)式并令 $C_3=C$，则 $C_1=\frac{3}{4}+C, C_2=-\frac{2}{3}+C$.

故
$$\int \max\{x^3,x^2,1\}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^4+\dfrac{3}{4}+C, & x\geqslant 1;\\ x+C, & -1<x<1;\\ \dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{2}{3}+C, & x\leqslant -1.\end{cases}$$

例 11 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 试判定:(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续;(2) $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 是不是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个原函数.

解 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在,故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

(2) 当 $x\neq 0$ 时, $F'(x)=\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$;当 $x=0$ 时, $F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x}=0$. 由此可知, $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的一个原函数.

例 12 设 $f'(\ln x)=\begin{cases}1, & 0<x\leqslant 1;\\ x, & 1<x<+\infty.\end{cases}$ (1) 求 $f(x)$;(2) 当 $f(0)=1$ 时,求 $f(x)$.

解 (1) 先由 $f'(\ln x)$,求 $f'(x)$,再求 $f(x)$,为此设 $t=\ln x$,则 $x=\mathrm{e}^t$,于是
$$f'(t)=\begin{cases}1, & -\infty<t\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^t, & 0<t<+\infty.\end{cases}$$
从而 $f(x)=\int f'(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}x+C_1, & -\infty<x\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^x+C_2, & 0<x<+\infty.\end{cases}$ 其中 C_1,C_2 是积分常数. 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,且 $f(0)=C_1$, $f(0+1)=1+C_2$,知 $C_1=1+C_2$. 取 $C_1=C$,则 $C_2=C-1$,故
$$f(x)=\begin{cases}x+C, & -\infty<x\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^x-1+C, & 0<x<+\infty.\end{cases}$$

(2) 由 $f(0)=1$ 知 $C=1$,于是 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -\infty<x\leqslant 0;\\ \mathrm{e}^x, & 0<x<+\infty.\end{cases}$

§1.2 黎曼函数的特性

数学分析课程着重研究了函数的极限、连续、微分、积分等性质,而黎曼(Riemann)函数有许多有趣的特性,对此加以讨论,有助于深刻理解上述性质,弄清它们之间的区别和联系. 下面着重讨论其不可微性,其他性质只作简单小结.

一、黎曼函数的定义、简单性质和图像

黎曼函数
$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & x=\dfrac{m}{n},m,n\text{ 为互质的整数},n>0;\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

由此定义，不难看出 $R(x)$ 的下列特性.

1. 函数 $R(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的非初等函数，当 x 为正、负整数及零时，$R(x)$ 取最大值 1，又因 $R(x)\geqslant 0$，所以在整个数轴上 $0\leqslant R(x)\leqslant 1$.

2. $R(x)$ 是一个周期函数，一切整数 T 都是它的周期，而 1 是它的最小正周期，这是因为：(1) 若 x 是无理数，则 $x+T$ 仍为无理数，故有 $R(x+T)=R(x)=0$；(2) 若 $x=\frac{m}{n}$（m,n 为互质的整数，$n>0$），则 $\frac{m}{n}+T=\frac{m+nT}{n}$，因为 $m+nT$ 与 n 仍互质，所以 $R(x+T)=R(x)=\frac{1}{n}$. 容易证明，任意小于 1 的正整数 a 都不可能是 $R(x)$ 的周期，所以 1 就是它的最小正周期.

由于 $R(x)$ 的周期性，所以我们可以只限于在闭区间 $[0,1]$ 上讨论它的分析性质. 不难看出，$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的值是这样分布的：当 x 为无理数时，$R(x)$ 都落在 x 轴上；当 x 为不等于 0 与 1 的有理数时，点 $(x,R(x))$ 落在直线 $y=x$，$y=1-x$ 及 $y=0$ 所围成的等腰三角形内部及两腰上，且关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称地分布着.

二、黎曼函数的几个重要性质

1. 函数 $R(x)$ 在无理点上连续，在有理点上间断.

证 设 x_0 为有理点，$x_0=\frac{p}{q}$（为既约分数），$q>0$，则 $R(x_0)\frac{1}{q}>0$. 由无理点的稠密性，存在无理点列 $\{x_n\}\to x_0\ (n\to\infty)$ 时，但

$$|R(x_n)-R(x_0)|=\left|0-\frac{1}{q}\right|=\frac{1}{q}>0\quad(\forall n\in\mathbf{N}),$$

即 $R(x_n)\nrightarrow R(x_0)$，故 $R(x)$ 在有理点上不连续.

再设 $x_0\in[0,1]$ 为无理点，则 $R(x_0)=0$，从 $R(x)$ 的定义可以看出，$\forall\varepsilon>0$，$R(x)\geqslant\varepsilon$ 的点 x 在 $[0,1]$ 上最多只有有限个，这是因为要使得 $R(x)\geqslant\varepsilon>0$，$x$ 必经过有理点，若 $x=\frac{p}{q}$，$R\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon$，则 $0\leqslant p<q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$，可见满足该不等式的有理数 $\frac{p}{q}$ 最多只有有限个. 于是，可取 $\delta>0$ 充分小，使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 不含有 $R(x)\geqslant\varepsilon$ 之点，此即 $\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，有 $|R(x)-R(x_0)|=R(x)<\varepsilon$. 这就证明了 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上的无理点连续，又因为前面知 $R(x)$ 以 1 为最小正周期，所以 $R(x)$ 在一切无理点上都连续.

注 $R(0)=1$，因为要使得 $0=\frac{m}{n}$ 为既约分数，且 $n>0$，故只可能 $n=1$，$m=0$.

2. $R(x)$ 在数轴上处处不可微.

证 (1) 在有理点处，因 $R(x)$ 不连续，所以不可微.

(2) 设 x_0 是任一无理点，由定义 $R(x_0)=0$，我们来考察在 x_0 附近 $R(x)$ 变化的情况，设 x 是在 x_0 附近的点.

① 若 x 取无理点，则 $R(x)=0$，所以

$$\frac{\Delta R}{\Delta x}=\frac{R(x)-R(x_0)}{x-x_0}=0.$$

因此，当 x 只取无理点趋近于 x_0 时，$\frac{\Delta R}{\Delta x}$ 是以 0 为极限的.

② 若 x 取有理点，我们把无理点 x_0 表示为 $x_0=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$（$a_i=0,1,2,\cdots,9$），取一